平成 31 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

基礎科目

◎　問題は 7 題ある．数学系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{6}$ の 6 題を解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{5}$ の 5 題を解答し，さらに，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$ のうちの 1 題を選択して解答せよ.（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 6 題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって 6〜7 題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること.

◎　解答時間は 3 時間 30 分　である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと.
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.
6. この問題冊子は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ α は $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする．このとき広義積分

$$\iint_D e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}dxdy$$

を計算せよ．ただし，$D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とする．

$\boxed{2}$ 複素数 α に対し，3 次複素正方行列 $A(\alpha)$ を次のように定める．

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-4 & \alpha+4 & -2\alpha+1 \\ -2 & 2\alpha+1 & -2\alpha+2 \\ -1 & \alpha & -\alpha+2 \end{pmatrix}$$

(1) $A(\alpha)$ の行列式を求めよ．

(2) $A(\alpha)$ の階数を求めよ．

$\boxed{3}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の連立常微分方程式

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x^2y - y^3 \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + xy^2 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{array}\right.$$

の解 $(x(t), y(t))$ は周期をもつことを示し，最小の周期を求めよ．ただし正の実数 T が $(x(t), y(t))$ の周期であるとは，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$$

が成り立つことである．

$\boxed{4}$ f は $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級関数で任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x+1) = f(x)$ をみたすとする．このとき以下の 2 条件は同値であることを示せ．

(A) 広義積分

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1+f(x)^2}}dx$$

が収束する．

(B) $f(x) = 0$ となる $x \in \mathbb{R}$ が存在しない．

$\boxed{5}$ n を 2 以上の整数，A を n 次複素正方行列とする．A^{n-1} は対角化可能でないが，A^n が対角化可能であるとき，$A^n = 0$ となることを示せ．

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^2$ 上の実数値連続関数 f についての次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 任意の正の実数 R に対して，次の集合は有界である．

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |f(x, y)| \leq R\}.$$

以下の問いに答えよ．

(1) 条件 $(*)$ をみたす連続関数 f の例を与え，それが $(*)$ をみたすことを示せ．

(2) 連続関数 f が条件 $(*)$ をみたすとき，次のいずれかが成り立つことを示せ．

(a) f は最大値を持つが，最小値は持たない．

(b) f は最小値を持つが，最大値は持たない．

$\boxed{7}$ 2 以上の整数 n に対し，(i, j) 成分が $|i - j|$ となる n 次正方行列を A_n とする．すなわち，

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とする．A_n の行列式を求めよ．