平成 30 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題
基礎科目

◎　問題は 8 題ある．数学系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{6}$の 6 題を解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{4}$の 4 題を解答し，さらに，$\boxed{5}$, $\boxed{7}$のうちの 1 題および $\boxed{6}$, $\boxed{8}$のうちの 1 題を選択して解答せよ.（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 6 題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって 6〜8 題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること.

◎　解答時間は 3 時間 30 分 である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計 等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと.
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.
6. この問題冊子は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ 広義積分

$$\iiint_V \frac{1}{(1+x^2+y^2)z^{3/2}}\,dxdydz$$

を計算せよ．ただし，$V = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \le z\}$ とする．

$\boxed{2}$ a, b を実数とする．実行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 連立 1 次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が解を持つような実数 a, b をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ 広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{1+x^2+x^4}\,dx$$

を求めよ．

$\boxed{4}$ 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，各 f_n は広義単調増加であるものとする．つまり，$0 \le x < y \le 1$ なら，$f_n(x) \le f_n(y)$ である．この関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ で関数 f に各点収束したとする．

(1) 任意の $0 \le x < y \le 1$ に対し，不等式

$$\sup_{z \in [x,y]} |f_n(z) - f(z)| \le \max\{\,|f_n(x) - f(y)|, |f_n(y) - f(x)|\,\}$$

を示せ．

(2) 関数 f が連続であるとき，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に $[0,1]$ 上で一様収束することを示せ．

$\boxed{5}$ p を素数とし，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を位数 p の有限体とする．行列の乗法による群 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

で定める．このとき，G から乗法群 $\mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ への準同型写像の個数を求めよ．

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 M を

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, \quad xy + zw = 0\}$$

で定める．

(1) M が 2 次元微分可能多様体になることを示せ．

(2) M 上の関数 f を

$$f(x, y, z, w) = x$$

で定めるとき，f の臨界点をすべて求めよ．ただし，$p \in M$ が f の臨界点であるとは，p における M の局所座標 (u, v) に関して

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = 0$$

となることである．

$\boxed{7}$ A を実正方行列，k を正の整数とし，$\mathrm{rk}(A^{k+1}) = \mathrm{rk}(A^k)$ が成り立つとする．このとき，任意の整数 $m \geq k$ に対し，$\mathrm{rk}(A^m) = \mathrm{rk}(A^k)$ であることを証明せよ．ここで行列 X に対し，$\mathrm{rk}(X)$ は X の階数を表す．

$\boxed{8}$ $(X, \leqq)$ を半順序集合とする．$a \lneqq b$ であるような X の元 a, b に対して，$a \lneqq c \lneqq b$ なる $c \in X$ が存在しないとき，$a \prec b$ と書くことにする．$(X, \leqq)$ が次の 3 条件を満たすとする．

(A) 任意の $a, b, c \in X$ について，$a \prec b$ かつ $a \prec c$ ならば，$\{b, c\}$ は上界を持つ．

(B) $a \lneqq b$ かつ $a \lneqq c$ を満たし，さらに $\{b, c\}$ は上界を持たないような $a, b, c \in X$ が存在する．

(C) $a \lneqq b$ ならば，ある $c \in X$ で，$a \prec c$ かつ $c \leqq b$ となるものが存在する．

このとき，X の中に無限上昇列 $a_1 \lneqq a_2 \lneqq \cdots$ が存在することを示せ．