平成 29 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

基礎科目

◎　問題は 7 題ある．数学系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{6}$の 6 題を解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{5}$の 5 題を解答し，さらに，$\boxed{6}$〜$\boxed{7}$のうちの 1 題を選択して解答せよ．(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 6 題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって 6〜7 題となる．）選択した問題番号を選択票に記入すること．

◎　解答時間は <u>3 時間 30 分</u> である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・<u>時計</u>等の持ち込みは <u>禁止</u> する．指定された荷物置場に置くこと．

［注意］

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
6. この問題冊子は持ち帰ってよい．

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D e^{-\max\{x^2,\,y^2\}} dxdy$$

ここで $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$ とする．

$\boxed{2}$ 実行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(i) 連立 1 次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を全て求めよ．

(ii) 連立 1 次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

が解を持つような実数 c を全て求めよ．

$\boxed{3}$ m, n を正の整数とし，A を複素 (n,m) 行列，B を複素 (m,n) 行列とする．
複素数 $\lambda \neq 0$ について，以下の問に答えよ．

(i) λ が BA の固有値ならば，λ は AB の固有値でもあることを示せ．

(ii) $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ の部分空間 V, W をそれぞれ

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m \mid \text{ある正の整数}\, k\, \text{に対して}\, (BA - \lambda I_m)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}\, \text{が成り立つ}\}$$

$$W = \{\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n \mid \text{ある正の整数}\, \ell\, \text{に対して}\, (AB - \lambda I_n)^\ell \mathbf{y} = \mathbf{0}\, \text{が成り立つ}\}$$

で定める．ただし，I_m, I_n は単位行列，$\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す．このとき，$\dim V = \dim W$ であることを示せ．

$\boxed{4}$ f を $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ 上の実数値連続関数とする．正の整数 n に対し，I 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = f(x+n)$$

で定める．関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で一様収束するとき，以下の問に答えよ．

(i) I 上の関数 g を

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

で定める．このとき g は I 上で一様連続であることを示せ．

(ii) f は I 上で一様連続であることを示せ．

$\boxed{5}$ p を正の実数とし，$f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数で

$$\int_0^{\infty} |f(t)|dt < \infty$$

を満たすものとする．このとき $\mathbb{R}$ 上の常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -px + f(t)$$

の任意の解 $x(t)$ に対し $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{6}$ X, Y を位相空間とし，直積集合 $X \times Y$ を積位相によって位相空間とみなす．写像 $f\colon X \times Y \to Y$ を $f(x,y) = y$ で定める．X がコンパクトならば，$X \times Y$ の任意の閉集合 Z に対し，$f(Z)$ は Y の閉集合であることを示せ．

$\boxed{7}$ n を正の整数とし，$\mathbb{R}^n$ の 2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ の距離 $d(x,y)$ を

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

と定める．$\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合 A に対し，関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \inf_{z\in A} d(x,z)$$

で定めるとき，$\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点 x, y に対して $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$ が成り立つことを示せ．