平成 28 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

専門科目

◎　問題は 12 題ある．数学系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{10}$のうちの 2 題を選択して解答せよ．数理解析系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{12}$のうちの 2 題を選択して解答せよ．（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 2 題であり, 両系をともに志望している者の解答問題数は, 選択によって 2〜4 題となる．）選択した問題番号を選択票に記入すること．

◎　解答時間は 3 時間 である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．

[注意]

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は, 選択票, 答案用紙（問題番号順）, 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

[記号]

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 有理数係数の既約多項式 $f(x) = x^3 + ax + b$ を考え, $K \subset \mathbb{C}$ を $f(x)$ の最小分解体とする. $a > 0$ のとき, $K/\mathbb{Q}$ の Galois 群が 3 次対称群と同型であることを示せ.

$\boxed{2}$ K を標数が 2 でない代数的閉体とし, K の元 a に対して, 2 変数多項式環 $K[X, Y]$ の剰余環

$$R_a = K[X, Y]/(X^2 - Y^2 - X - Y - a)$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(i) $a = 0$ のとき R_a の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ を求めよ. また $\mathfrak{m}$ はいつ R_a の単項イデアルとなるか ? 理由を付けて答えよ.

(ii) $a \neq 0$ のとき R_a の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ を求めよ. また $\mathfrak{m}$ はいつ R_a の単項イデアルとなるか ? 理由を付けて答えよ.

$\boxed{3}$ 位数が奇素数 p である有限体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を考え,

$$G = GL_2(\mathbb{F}_p) = \{X \in M_2(\mathbb{F}_p) \mid \det X \neq 0\}$$

とおく. ただし, $M_2(\mathbb{F}_p)$ は $\mathbb{F}_p$ の元を成分とする 2 次正方行列全体の集合を表す. 以下の問に答えよ.

(i) G の元で対角行列と共役でないものの個数を求めよ.

(ii) G の 2 つの元 X, Y の最小多項式 $\phi_X(t)$, $\phi_Y(t) \in \mathbb{F}_p[t]$ が一致すれば, X と Y は互いに共役であることを示せ.

(iii) 対角行列を含まない G の共役類の個数を求めよ.

$\boxed{4}$ $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=1\right\}$ とおく．$j : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を自然な埋め込み写像とする．$\omega = j^*\big(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy\big)$ とおく．このとき, 以下の問に答えよ.

(i) 各点 $p \in S^2$ において, ω_p は 0 でないことを示せ.

(ii) 各点 $p \in S^2$ において, 接空間 T_pS^2 と余接空間 $T_p^*S^2$ の間の線形写像 $\Phi_p : T_pS^2 \longrightarrow T_p^*S^2$ を

$$\Phi_p(v) = \iota_v \omega_p$$

で定める．(ただし, ι_v は v による内部積を表す.) Φ_p が同型であることを示せ.

(iii) S^2 上の C^∞ 級関数 f, g に対し, S^2 上の関数 $\{f, g\}$ を

$$\{f,g\}(p) = \omega_p(\Phi_p^{-1}(df_p), \Phi_p^{-1}(dg_p))$$

として定義する．x と y を制限によって S^2 上の C^∞ 級関数とみたとき, $\{x, y\}$ を求めよ.

$\boxed{5}$ S^2 を 2 次元球面とする．$I = \{t \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le t \le 1\}$ とおく．$S^2 \times S^2 \times I$ の商空間 $X = (S^2 \times S^2 \times I)/\sim$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．ただし, $\sim$ は

$$(p,q,0) \sim (q,p,1) \qquad (p,q \in S^2)$$

が生成する同値関係とする.

$\boxed{6}$ 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は次の条件をみたすと仮定する．

(*) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は μ-可積分な関数列であって，$n \to \infty$ のとき ほとんどいたるところ 0 に収束する．

このとき，以下の条件を考える．

(A) $\displaystyle \lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_n|\geq\lambda\}} |f_n| d\mu = 0.$

(B) $\displaystyle \inf_{\substack{E\in\mathcal{F}\\ \mu(E)<\infty}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X\setminus E} |f_n| d\mu = 0.$

(C) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| d\mu = 0.$

以下の問に答えよ．

(i) (A) と (B) が成り立つならば (C) が成り立つことを示せ．

(ii) (C) が成り立つならば (A) が成り立つことを示せ．

(iii) 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ の σ-有限性を仮定するとき，(C) が成り立つならば (B) が成り立つことを示せ．

$\boxed{7}$ U, V, W を実 Banach 空間とし，$\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ をそれぞれのノルムとする．写像 $T : U \times V \to W$ は以下の条件 (A), (B) をみたすとする．

(A) $u, u' \in U$, $v, v' \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ならば，

$$T(\alpha u + \beta u', v) = \alpha\, T(u, v) + \beta\, T(u', v),$$
$$T(u, \alpha v + \beta v') = \alpha\, T(u, v) + \beta\, T(u, v').$$

(B) U, V の点列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = u \in U$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = v \in V$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T(u_n, v_n) = w \in W$ をみたすならば，$T(u, v) = w$ である．

このとき，ある定数 $M > 0$ が存在して，任意の $u \in U$, $v \in V$ に対して，

$$\|T(u, v)\|_W \leq M \|u\|_U \, \|v\|_V$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{8}$ C^2 級関数 $u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \qquad (0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0)$$

および境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (t \geq 0)$$

をみたすとする．$[0,1]$ 上の 2 乗可積分関数 $h(x)$ に対して

$$\|h\| = \left(\int_0^1 |h(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(i) C^1 級関数 $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ が $g(0) = 0$ または $g(1) = 0$ をみたすとき，

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| \leq \|g'\|$$

を示せ．

(ii) $E(t) = \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t) \right\|^2$ と定める．このとき，E は $[0,\infty)$ 上の C^1 級関数で

$$\frac{dE}{dt}(t) + E(t) \leq 0 \qquad (t \geq 0)$$

をみたすことを示せ．

(iii) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x,t)| = 0$ を示せ．

$\boxed{9}$ xy-平面に平行な二枚の平面 $z=\pm 1$ の間にはさまれた流体を考える．一方の平面 $z=1$ は x-方向に一定速度 1 で動き，もう一方の平面 $z=-1$ は x-方向に一定速度 -1 で動くものとする．流体内に速度差が生じると粘性の効果によって熱が発生し，その熱は伝導によって z-方向に運ばれる．速度と温度は x-方向および y-方向に一様であるとし，流れの x-方向成分および温度を $u(z), T(z)$ とする $(T(z)>0, -1\leq z\leq 1)$. 定常状態では運動量の輸送量が一定の条件から,

$$\frac{d}{dz}\left(\nu(T)\frac{du}{dz}\right)=0 \tag{1}$$

が成り立つ．ここで $\nu(T)$ は温度に依存する粘性率である．粘性によって発生した熱が全て熱の伝導によって運び去られる条件から,

$$\frac{d^2T}{dz^2}+\nu(T)\left(\frac{du}{dz}\right)^2=0 \tag{2}$$

が満たされる．以下, (1) と (2) は認めてよい．境界条件は $u(\pm 1)=\pm 1$ (複号同順), $T(\pm 1)=1$ とする．

(i) 粘性率 $\nu(T)$ が一定値 ν_0 であるときの $u(z), T(z)$ を求めよ．

(ii) 粘性率が $\nu(T)=A/T$ であるとき ($A>0$ は定数), 以下の問に答えよ．

(a) $A=1$ の場合の $u(z), T(z)$ を求めよ．

(b) A が大きい場合の $u(z), T(z)$ を $1/\sqrt{A}$ の 1 次のオーダーまで求めよ．

$\boxed{10}$ 二つの文字 a, b からなる集合 $\mathcal{A} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ と，$\mathcal{A}$ の有限文字列全体からなる集合 $\mathcal{A}^* = \{x_1 \cdots x_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{A}, n \geq 0\}$ を考える．空文字列を ε，文字列 $w, w' \in \mathcal{A}^*$ の連結を ww' で表す.

$\mathcal{A}^*$ 上の写像 $f_0, f_1, f_2, f_3 : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ を以下のように再帰的に定義する.

$$f_0(w) = \begin{cases} \varepsilon & (w = \varepsilon) \\ \mathsf{a}\, f_1(w') & (w = \mathsf{a}w') \\ f_3(w') & (w = \mathsf{b}w') \end{cases} \qquad f_1(w) = \begin{cases} \varepsilon & (w = \varepsilon) \\ f_1(w') & (w = \mathsf{a}w') \\ f_2(w') & (w = \mathsf{b}w') \end{cases}$$

$$f_2(w) = \begin{cases} \mathsf{b} & (w = \varepsilon) \\ f_2(w') & (w = \mathsf{a}w') \\ f_1(w') & (w = \mathsf{b}w') \end{cases} \qquad f_3(w) = \begin{cases} \mathsf{b} & (w = \varepsilon) \\ \mathsf{ba}\, f_1(w') & (w = \mathsf{a}w') \\ f_0(w') & (w = \mathsf{b}w') \end{cases}$$

また，$\mathcal{A}^*$ 上の二項関係 $\sim$ を，以下の条件をみたす最小の合同関係 (同値関係であり，$w_1 \sim w_1'$, $w_2 \sim w_2' \implies w_1 w_2 \sim w_1' w_2'$ が成り立つもの）とする.

$$\mathsf{aba} \sim \mathsf{ab} \qquad \mathsf{bb} \sim \varepsilon$$

このとき，任意の $w, w' \in \mathcal{A}^*$ について

$$f_0(w) = f_0(w') \iff w \sim w'$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{11}$ 有限集合 E と $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ が以下の条件 (A), (B), (C) をみたすとき，組 $(E, \mathcal{I})$ をマトロイドとよぶ.

(A) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(B) $J \subseteq I$，$I \in \mathcal{I}$ ならば，$J \in \mathcal{I}$.

(C) $I, J \in \mathcal{I}$，$|I| > |J|$ ならば，$J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となる $e \in I \setminus J$ が存在する.

以下の問に答えよ.

(i) マトロイド $(E, \mathcal{I})$ において極大な $I \in \mathcal{I}$ はすべて同じサイズであることを示せ.

(ii) 有限無向グラフ $G = (V, E)$ において，$\mathcal{F} \subseteq 2^E$ を森族，$\mathcal{M} \subseteq 2^E$ をマッチングの族とする．このとき，$(E, \mathcal{F})$，$(E, \mathcal{M})$ はそれぞれ常にマトロイドになるか? マトロイドである場合は証明を，マトロイドでない場合は反例を与えよ.

$\boxed{12}$ 時間に依存する一様な外力 $f(t)$ の下での調和振動子の古典的運動はハミルトニアン

$$H(p,x,t) = H_0(p,x) - f(t)x, \quad (p,x) \in \mathbf{R}^2,\ t \in \mathbf{R}$$

を用いて記述される．ただし，

$$H_0(p,x) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

は外力を受けない時のハミルトニアンである．この外力下の調和振動子の量子力学を考え，その波動関数を

$$\psi(x,t) = e^{i\theta(x,t)}\psi_0(x-\xi(t),t)$$

の形で探すことを考える．ただし，$\psi_0(x,t)$ は外力を受けないときの規格化された波動関数とし，$\theta(x,t)$ および $\xi(t)$ は求めるべき十分滑らかな実関数であり，$\theta(x,t)$ は x に関して 1 次式と仮定する．$\hbar = 1$ として，以下の問に答えよ．

(i) 古典的軌道，すなわち $H(p,x,t)$ に対する正準方程式の解 $\bar{p}(t), \bar{x}(t)$ および，適当な実関数 $\varphi(t)$ を使って，$\theta(x,t)$ と $\xi(t)$ は

$$\theta(x,t) = \bar{p}(t)x - \varphi(t), \qquad \xi(t) = \bar{x}(t)$$

の形に表せることを示せ．

(ii) 前問の $\varphi(t)$ は

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = L_0(\bar{p}(t), \bar{x}(t))$$

をみたすことを示せ．ただし，L_0 は，外力を受けない時のラグランジアン

$$L_0(p,x) = \frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{2}$$

である．