

平成 28 年度 京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

基礎科目 I

問題は 4 題ある。4 題とも解答せよ。

解答時間は 2 時間 である。

参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する。
指定された荷物置場に置くこと。

[注意]

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い、問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ。
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
5. 提出の際は、答案用紙を問題番号順に重ね、下書用紙をその下に揃え、記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること。
6. この問題用紙は持ち帰ってよい。

[記号]

以下の問題で \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ、自然数の全体、整数の全体、有理数の全体、実数の全体、複素数の全体を表す。

1 線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

を用いて $f(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{R}^4$) として定める. V を3つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

が張る \mathbb{R}^4 の部分空間としたとき, f の V への制限 $g = f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ. ただし, g の階数とは, $g(V)$ の次元のこととする.

2 a を実数とする. 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問に答えよ.

- (i) 行列 A の固有値を求めよ.
- (ii) 行列 A が対角化可能となる実数 a をすべて求めよ. ただし, A が対角化可能であるとは, 複素正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものが存在することをいう.

3 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-x} (nx - [nx]) dx$$

ただし, n は自然数とし, $[y]$ は y を超えない最大の整数を表す.

4 \mathbb{R}^2 で定義された関数

$$f(x, y) = \frac{xy(xy + 4)}{x^2 + y^2 + 1}$$

の最大値および最小値のそれぞれについて, 存在するなら求め, 存在しないならそのことを示せ.