平成27年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

専門科目

◎　問題は12題ある．数学系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{10}$のうちの2題を選択して解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{12}$のうちの2題を選択して解答せよ．（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は2題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって2〜4題となる．）選択した問題番号を選択票に記入すること．

◎　解答時間は 3時間 である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．

[注意]

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
4. 1問を2枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，選択票，答案用紙（問題番号順），下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

[記号]

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，自然数の全体，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ G は非可換群で次の条件 $(*)$ を満たすとする.

$(*)$ $N_1, N_2 \subset G$ が相異なる自明でない (つまり $\{1\}$ とも G とも異なる) 正規部分群なら，$N_1 \not\subset N_2$ である.

このとき，以下の問に答えよ.

(i) N_1, N_2 が相異なる G の自明でない正規部分群なら，$G = N_1 \times N_2$ であることを証明せよ.

(ii) G の自明でない正規部分群の数は高々2個であることを証明せよ.

$\boxed{2}$ X, Y, T を変数とし，$A = \mathbb{Z}[X, Y]/(Y^2 - 6X^2)$, $B = \mathbb{Z}[X, T]/(T^2 - 6)$ とおく．また，A における X, Y の剰余類を x, y，B における X, T の剰余類を x', t とする．A のイデアル P_1, P_2 と B のイデアル Q_1 を

$$P_1 = xA + yA + 5A,\ P_2 = (x - y)A + 5A,\ Q_1 = x'B + (t + 1)B$$

と定めるとき，以下の問に答えよ．

(i) 単射な環準同型 $\phi : A \to B$ で $\phi(x) = x', \phi(y) = x't$ であるものが存在することを証明せよ．

(ii) P_1, P_2 は A の素イデアルで $P_2 \subsetneq P_1$ であることを証明せよ．

(iii) (i) により A を B の部分環とみなすとき，Q_1 は B の素イデアルで $Q_1 \cap A = P_1$ であることを証明せよ．

(iv) B の素イデアル Q_2 で $Q_2 \subset Q_1$, $Q_2 \cap A = P_2$ となるものは存在しないことを証明せよ．

$\boxed{3}$ $\mathbb{C}(t)$ を $\mathbb{C}$ 上の 1 変数有理関数体とする．a を複素数とし，$s = t^3 + 3t^2 + at \in \mathbb{C}(t)$ とおく．$\mathbb{C}$ 上 s で生成された $\mathbb{C}(t)$ の部分体を $\mathbb{C}(s)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(i) 拡大次数 $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(s)]$ を求めよ．

(ii) $\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}(s)$ がガロア拡大となる複素数 a をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ とおき，自然に $\mathbb{R}^4$ の C^∞ 級部分多様体とみなす．また，S^3 上の微分形式 ω の外微分を $d\omega$ で表す．このとき，以下の問に答えよ．

(i) S^3 上の 1 次微分形式 φ が $d\varphi = 0$ を満たすならば，$\varphi_p = 0$ となる $p \in S^3$ が存在することを示せ．

(ii) $j\colon S^3 \to \mathbb{R}^4$ を包含写像とする．$\mathbb{R}^4$ 上の 2 次微分形式

$$\eta = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$$

の S^3 への制限 $\zeta = j^*\eta$ は次の条件を満たすことを示せ．

(a) $d\zeta = 0$.

(b) $\zeta_p = 0$ となる $p \in S^3$ は存在しない．

$\boxed{5}$ $S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) $S^1 \times S^1 \times S^1$ の商空間 $X = (S^1 \times S^1 \times S^1)/\sim$ の整数係数ホモロジーを求めよ．ただし，$\sim$ は

$$(x, y, z) \sim (-x, -y, -z) \qquad (x, y, z \in S^1)$$

が生成する同値関係とする．

(ii) $S^2 \times S^1$ の商空間 $Y = (S^2 \times S^1)/\sim$ の整数係数ホモロジーを求めよ．ただし，$\sim$ は

$$(x, y) \sim (-x, -y) \qquad (x \in S^2,\ y \in S^1)$$

が生成する同値関係とする．

$\boxed{6}$ $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，f_n $(n \in \mathbb{N})$ と f をその上の可測関数とし， 次の (a) と (b) を仮定する．

(a) 全ての x で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,

(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$.

このとき，以下を示せ.

(i) $\|f\|_2 < \infty$.

(ii) $\mu(X) = 1$ ならば，任意の $p \in [1, 2)$ に対し $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

ただし，$p \in [1, \infty)$ と可測関数 g に対し $\|g\|_p = \left(\int_X |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$ とする．

$\boxed{7}$ 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ と $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$Tf(x) = \int_0^\infty \left\{\int_{x-t}^{x+t} f(s)ds\right\} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

と定める．このとき，以下の問に答えよ．

(i) T は $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ への作用素として定義でき，有界であることを示せ．

(ii) T は $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2([0, 1])$ への作用素としてコンパクトであることを示せ．

$\boxed{8}$ C^2 級関数 $u\colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ は全ての $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ で方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + x^2 u(x, t) + (u(x, t))^3 = 0$$

を満たし，$t > 0$ において

$$\int_{\mathbb{R}} \left(|u(x, t)|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right|^2 \right) dx$$

は有限値で，t について連続とする．このとき，

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx = 0$$

を示せ．

$\boxed{9}$ 現象のモデリングでは，複雑な要素を切り捨てて単純化することも必要である．いま，半径 l で内部が一様の剛体球が，球の半分だけが水面下にある状態で水に浮いているとしよう．この球に上から力を加えて元の位置から鉛直下向きに h $(0 \le h \le l)$ だけ沈めて静止させる．ここで力を突然ゼロにすると球は上下運動を行う．このとき重力加速度を g とおいて，以下の問に答えよ．ただし，(i) と (ii) においては，球が水から受ける力は浮力だけであるとし，水の運動は無視し，空気からは力を受けないと仮定する．

(i) この球の上下運動を記述する常微分方程式を求めよ．

(ii) h が小さい時の球の周期運動の周期を h の 2 次のオーダーまで正しく求めよ．

(iii) 現実には球の上下振動は次第に減衰する．この減衰は水のどのような影響によるか，そのメカニズムを説明せよ．

$\boxed{10}$ 正の整数 m, n について次の再帰プログラムを考える．

$$f(x) \;=\; \textsf{if } x > 2014 \textsf{ then } x - m \textsf{ else } f^n(x+3).$$

このとき，以下の問に答えよ．

(i) この再帰プログラムが定める部分関数 $f\colon \mathbb{Z} \rightharpoonup \mathbb{Z}$ は

$$f^n(x) \;=\; f(x - m(n-1)) \qquad (x \in \mathbb{Z})$$

を満たすことを示せ．ここで等号は，左辺，右辺のうちどちらか一方が値を持つときには，他方も同じ値を持つことを意味する．

(ii) f が全域関数となるような m, n を全て決定せよ．

$\boxed{11}$ 有限の頂点集合 V と辺集合 $E \subseteq V \times V$ を持つ有向グラフ $G = (V, E)$ において相異なる 2 頂点 $s, t \in V$ を与える．k 本の s-t 有向パス（閉路を含まない s から t への有向パス）$P_1, \ldots, P_k \subseteq E$ が辺素 (すなわち，$P_i \cap P_j = \emptyset$ $(i \neq j)$) であるとし，$E^* = (E \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_k)) \cup \{(u,v) \mid (v,u) \in P_1 \cup \cdots \cup P_k\}$ と定義する．このとき，$G^* = (V, E^*)$ が s-t 有向パスを持たないことと，G 中に存在する辺素な s-t パスの最大本数が k であることが同値であることを示せ．

$\boxed{12}$ ある量子力学系に対して，その物理的状態はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で記述され，観測量はその上の自己共役作用素で，時間発展のハミルトニアンは自己共役作用素 H で表されるものとする．$\mathcal{H}$（の内積）に関してディラックのブラ・ケット記法を使用し，虚数単位を i，プランク定数は $\hbar = 1$ とする．以下では規格化された状態ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$，$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ を固定して考える．更に，状態ベクトルの時間発展を $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi\rangle$ と表す．

観測量 A に対して $\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$ とおく．また $\Delta_\psi A = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 観測量 A に対し，$|\psi\rangle$ に直交する規格化された状態ベクトル $|\psi_\perp\rangle$ を選んで，

$$A|\psi\rangle = \langle A\rangle_\psi|\psi\rangle + \Delta_\psi A|\psi_\perp\rangle$$

とできることを示せ．また $\Delta_{\psi_\perp} A \geq \Delta_\psi A$ であることを示せ．

(ii) 観測量 A, B に対し，$[A, B] = AB - BA$ とおくと，

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A, B]\rangle_\psi\right|$$

が成り立つことを (i) の結果を使って示せ．

(iii) 観測量 A に対し，

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)}\right| \leq \Delta_\psi H \Delta_{\psi(t)} A$$

を示せ．

(iv) 射影作用素 $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ は $0 \leq \langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} \leq 1$ を満たすことを示せ．$\langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} = \cos^2\theta(t)$，$0 \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{2}$ により $\theta(t)$ を導入すると

$$|\theta(t)| \leq \Delta_\psi H t \quad (t \geq 0)$$

となることを導け．これにより

$$\langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} \geq \cos^2(\Delta_\psi H t) \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\Delta_\psi H}\right)$$

を示せ．