

平成 27 年度 京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

基礎科目 I

- ◎ 問題は 4 題ある。4 題とも解答せよ。
- ◎ 解答時間は 2 時間 である。
- ◎ 参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する。
指定された荷物置場に置くこと。

[注意]

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い、問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ。
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
5. 提出の際は、答案用紙を問題番号順に重ね、下書用紙をその下に揃え、記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること。
6. この問題用紙は持ち帰ってよい。

[記号]

以下の問題で \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ、自然数の全体、整数の全体、有理数の全体、実数の全体、複素数の全体を表す。

1 次の広義積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{y^2 e^{-xy}}{x^2 + y^2} dx dy.$$

ここで, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq x\}$ とする.

2 \mathbb{R}^2 で定義された関数

$$f(x, y) = \frac{4x^2 + (y + 2)^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

のとりうる値の範囲を求めよ.

3 a, b を複素数とする. 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ b & 2 & 0 \\ -b & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 以下の間に答えよ.

(i) 行列 A の固有値を求めよ.

(ii) 行列 A と行列 B が相似となるような複素数 a, b をすべて求めよ. ただし, A と B が相似であるとは, 複素正則行列 P で $A = P^{-1}BP$ をみたすものが存在することをいう.

4 a, b, c, d を複素数とする. 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 0 & -6 & a \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 8 & b \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & c \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & d \end{pmatrix}$$