

平成 26 年度 京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

基礎科目 I

問題は 4 題ある。4 題とも解答せよ。

解答時間は 2 時間 である。

参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する。
指定された荷物置場に置くこと。

[注意]

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと。
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに、受験番号・氏名を記入せよ。
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い、問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ。
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは、つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること。
5. 提出の際は、答案用紙を問題番号順に重ね、下書用紙をその下に揃え、記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること。
6. この問題用紙は持ち帰ってよい。

[記号]

以下の問題で \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ、自然数の全体、整数の全体、有理数の全体、実数の全体、複素数の全体を表す。

- 1 (i) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数列で, 任意の正整数 k について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$$

をみたすとする. このとき, この数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するか? 理由をつけて答えよ.

- (ii) 次の広義積分は収束するか? 理由をつけて答えよ:

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-1/x}) dx.$$

- 2 n は 2 以上の整数とする. \mathbb{R}^2 上の関数

$$f(x, y) = x^{2n} + y^{2n} - nx^2 + 2nxy - ny^2$$

について次の問に答えよ:

- (i) f の最大値・最小値は存在するか? 理由をつけて答えよ.
(ii) f が極大値・極小値をとる点をすべて求めよ.

- 3 次の 4 次実正方行列 A, B は正則か? 正則ならば逆行列を求め, 正則でないならば階数を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- 4 3 次の複素正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$$

に対して, A と B が相似となるような複素数 x をすべて求めよ. ただし, 行列 A と B が相似とは, 複素正則行列 P で $A = P^{-1}BP$ をみたすものが存在することをいう.