

平成 24 年度 京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 外国人留学生修士課程入学試験問題

2012 Entrance Examination For Foreign Students

Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

数学

Mathematics

- ⊗ [1] から [5] までの全問を解答せよ . Answer all questions from [1] to [5].
- ⊗ 解答時間は 3 時間 である . The duration of the examination is three hours.
- ⊗ 問題は日本語および英語で書かれている . 解答は日本語または英語どちらかで書くこと . The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する . It is not allowed to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

[注意 (Cautions)]

1. 指示のあるまで開かぬこと . Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに , 受験番号・氏名を記入せよ . Write your name and applicant number in each answer sheet and scratch pad.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い , 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ . Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは , つづきのあることを明示して次の用紙に移ること . If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい . You may take home this problem sheet.

[記号 (Notations)]

以下の問題で \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ , 実数の全体 , 複素数の全体を表す .

In the problems, we denote the set of all real numbers by \mathbb{R} , and the set of all complex numbers by \mathbb{C} .

- 1 a, b, c, d を複素数とする．複素行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & d & c \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

がいつ相似であるかを決定せよ．ここで， A と B が相似であるとは， $P^{-1}AP = B$ をみたす可逆な複素行列 P が存在することをいう．

- 2 次の命題が成立するような $\alpha \in \mathbb{R}$ の範囲を求めよ．

実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha |x_n - x_{n+1}| = 0$ をみたせば， $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束列である．

- 3 \mathbb{F}_5 を位数 5 の有限体， $\mathbb{F}_5[x]$ を \mathbb{F}_5 上の 1 変数多項式環とする． I を多項式 $x^4 + 2x^2$ で生成された $\mathbb{F}_5[x]$ のイデアルとする．このとき剰余環 $\mathbb{F}_5[x]/I$ の可逆元の個数を求めよ．

- 4 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とする．写像度が 2 であるような S^2 から S^2 へのなめらかな写像の例を与えよ．

- 5 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{1 + x^3}$$

- 1** Let a, b, c, d be complex numbers. Determine when the complex matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & d & c \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

are similar. Here, A and B are said to be similar if there exists an invertible complex matrix P satisfying $P^{-1}AP = B$.

- 2** Determine the range of $\alpha \in \mathbb{R}$ for which the following statement holds.

If a sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ of real numbers satisfies $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha |x_n - x_{n+1}| = 0$, then it is a convergent sequence.

- 3** Let \mathbb{F}_5 be the finite field of order 5, and $\mathbb{F}_5[x]$ the polynomial ring in one variable over \mathbb{F}_5 . Let I be the ideal of $\mathbb{F}_5[x]$ generated by the polynomial $x^4 + 2x^2$. Determine the number of invertible elements of the quotient ring $\mathbb{F}_5[x]/I$.

- 4** Set $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Give an example of a smooth map of degree 2 from S^2 to S^2 .

- 5** Compute the following integral.

$$\int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{1 + x^3}$$