

平成 25 年度 京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

- ⊗ [1] から [5] までの全問を解答せよ.
- ⊗ 解答時間は 3 時間 である.
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 計算用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

1 複素数を成分とする 2 次正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{C})$ で表す . $A \in M_2(\mathbb{C})$ は単位行列のスカラー倍でないとし , $S = \{B \in M_2(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$ とおく . このとき , $X, Y \in S$ なら $XY = YX$ であることを示せ .

2 $b > a > 0$ を実数 , $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする . このとき以下を示せ .

(i)
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}.$$

(ii) 広義積分 $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ が収束するなら

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) \log \frac{a}{b}$$

が成り立つ .

3 p を素数とする . アーベル群 A は位数 p^4 であり , 位数 p の部分群 N で $A/N \simeq \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ となるものをもつとする . このような A を同型を除いてすべて求めよ .

4 写像 $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を $F(x, y, z, w) = (xy, y, z, w)$ と定め , 写像 $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を F の 3 次元球面

$$S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$$

への制限とする . S^3 の各点 p における f の微分 df_p の階数を求めよ .

5 $a, b > 0$ を実数 , $n \geq 2$ を整数とするとき , 次の広義積分を求めよ :

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ia(x - ib))}{(x - ib)^n} dx.$$