

平成 24 年度 京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

基礎数学

- ⊗ 1 から 4 までの全問を解答せよ.
- ⊗ 解答時間は 2 時間 である.
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 下書用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す. また, \mathbb{R}^n の元 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ と書く.

- 1 V を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で生成される \mathbb{R}^4 の部分ベクトル空間とし,
 W を $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で生成される \mathbb{R}^4 の部分ベクトル空間
 とする. このとき, $V \cap W$ の基底をひとつ求めよ.

- 2 複素数体 \mathbb{C} の元を成分とする n 次正方形行列全体のなす集合を $M_n(\mathbb{C})$ とする.

(1) $M_n(\mathbb{C})$ の元 N が, ある自然数 k に対して N^k が零行列になるとする. このとき, N の固有値がすべて 0 であることを示せ.

(2) $M_n(\mathbb{C})$ の元 A をひとつ決めて, 写像 $f_A : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ を $f_A(X) = XA - AX$ によって定義する. $M_n(\mathbb{C})$ は複素数体 \mathbb{C} 上の n^2 次元のベクトル空間であり, f_A は $M_n(\mathbb{C})$ の線形変換である. このとき, ある自然数 m に対して A^m が零行列になるとすると, 線形変換 f_A の固有値がすべて 0 となることを示せ.

- 3 $x > 0$ で定義された次の函数項級数は各点収束するが $(0, \infty)$ 上で一様収束しないことを示せ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{n^2 x + 1}$$

- 4 次の広義積分が収束するような実数 s の範囲を定めよ. またそのときの積分値を計算せよ.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(x^2 - xy + y^2 + 1)^s}$$