

平成 23 年度 京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

基礎数学

- ⊗ [1] から [4] までの全問を解答せよ.
- ⊗ 解答時間は 2 時間 である.
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 計算用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す. また, \mathbb{R}^n の元 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ と書く.

1 x を複素数とする. 4 次複素正方行列

$$\begin{pmatrix} x & 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ -1 & 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ.

2 3 次複素正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

- (1) A, B の固有値 2 に属する固有空間の基底を一組ずつ求めよ.
- (2) A と B は相似かどうか理由を付けて答えよ. ただし, 2 つの 3 次複素正方行列 A, B が相似とは, $A = P^{-1}BP$ をみたす正則な 3 次複素正方行列 P が存在することをいう.

3 函数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

が区間 $[0, 1]$ 上で一様収束するかどうかを, 理由を付けて答えよ.

4 $a < b$ とし区間 $[a, b]$ 上の実数値連続函数 $f(x), \varphi(x)$ は共に狭義単調増加とする.

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

ならば, $\int_a^b \varphi(x)f(x) dx > 0$ となることを証明せよ.