

平成 23 年度 京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 I

- ⊗ [1] から [5] までの全問を解答せよ.
- ⊗ 解答時間は 3 時間 である.
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 計算用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す. また, \mathbb{R}^n の元 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ と書く.

1 V を \mathbb{C} 上の有限次元ベクトル空間とし, $f: V \rightarrow V$ を一次変換とする. W_1, W_2 を V の部分空間で, $V = W_1 + W_2$, $f(W_1) \subset W_1$, $f(W_2) \subset W_2$ をみたすとする. f の W_1 への制限を $f|_{W_1}: W_1 \rightarrow W_1$ とおき, f の W_2 への制限を $f|_{W_2}: W_2 \rightarrow W_2$ とおく.

- (1) $f|_{W_1}$ の最小多項式を $P_1(x)$, $f|_{W_2}$ の最小多項式を $P_2(x)$ とおく. f の最小多項式は $P_1(x), P_2(x)$ の最小公倍元であることを示せ.
- (2) $f|_{W_1}, f|_{W_2}$ が対角化可能であるとき, f も対角化可能であることを示せ.

ただし, $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ に対し, $P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れるとき, $P(x)$ は $Q(x)$ の倍元であるという. また, $P(x), Q(x)$ の最小公倍元とは, $P(x), Q(x)$ の倍元のうち次数が最小のモニック多項式のことをいう.

2 区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ は $f(0) = 0, f(1) = 1$ をみたしている. このとき, 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 f(x)x^{2n} dx$$

を求めよ.

3 L を階数 2 の自由アーベル群 \mathbb{Z}^2 の部分群で $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ により生成されるものとする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 商群 \mathbb{Z}^2/L の位数が有限になるための必要十分条件を a, b, c, d を用いて表せ.
- (2) $abcd \neq 0$ をみたし, かつ \mathbb{Z}^2/L の位数が有限となるもののうちから,
 - (i) $\mathbb{Z}^2/L = \{0\}$ となる例
 - (ii) \mathbb{Z}^2/L が非自明な巡回群になる例
 - (iii) \mathbb{Z}^2/L が巡回群にならない例
 を各々 1 つずつ与えよ.

4 n を 2 以上の自然数とする.

- (1) n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ を計算せよ. ただし, n 次元単位球面 S^n が単連結であることを用いてよい.
- (2) $\mathbb{R}P^n$ から単位円 S^1 への連続写像は, 常に定値写像とホモトピックであることを示せ.

5 函数 $f(z) = \frac{e^{(1+i)z}}{(e^z + 1)^2}$, $z \in \mathbb{C}$ に関する以下の問に答えよ.

- (1) $L > 0$ とし, 複素平面上の4点 $L, L + 2\pi i, -L + 2\pi i, -L$ を頂点とする長方形の内部にある $f(z)dz$ の極と留数を求めよ.
- (2) 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ を計算せよ.