平成16年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

$\otimes$　問題は７題あり，次の３つの分野群に分かれる．分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題，分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題，分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題である．

$\otimes$　この７問題中, ３問題 を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ．

$\otimes$　解答時間は ４時間 である．

$\otimes$　参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する．

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと．
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ．
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，選択表を上におき，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

1 自然数 m に対して $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$ とおく．$3 \leq n \in \mathbb{Z}$ と n と互いに素な整数 a に対して

$$E = \frac{\sin(a\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$$

とおく．また n と互いに素な整数 t に対して，$\sigma(t)$ は $\zeta_n \mapsto \zeta_n^t$ で定まる $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ の元を表す．

(1) $E \in \mathbb{Q}(\zeta_n)$ であることを示せ．

(2) n が偶数ならば

$$E^{\sigma(t)} = \frac{\sin(at\pi/n)}{\sin(t\pi/n)}$$

であることを示せ．n が奇数ならばどうなるか．

2 体 K 上の多項式環 $R = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ のイデアル I について

$$\dim I = \max\left\{ r \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n \text{ が存在して} \\ K[x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}] \cap I = \{0\} \end{array} \right\}$$

と定義する．ただし，右辺の集合が空集合のときは，$\dim I = 0$ と定義する．R のイデアル I, J に対して次を示せ．

(1) $I \subset J$ ならば $\dim I \geq \dim J$.

(2) $\dim I = \dim \sqrt{I}$.

(3) $\dim(I \cap J) = \max\{\dim I, \dim J\}$.

(4) I が素イデアルならば，$\dim I$ は $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]/I$ の商体の K 上の超越次数に等しい．

3 n を自然数とし，円板 $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ 上の同値関係 $\sim_n$ を次のように定義する．

$z_1 \sim_n z_2$ であるのは，$z_1 = z_2$ または，$|z_1| = |z_2| = 1$ かつ $z_1^n = z_2^n$ であることとする．

このとき，商空間 $X_n = D^2/\sim_n$ のホモロジー群を計算せよ．

4 $n+1$ 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の 複素 1 次元部分ベクトル空間全体の集合，すなわち複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ を考える．$j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}P^n$ を，$(z_1, \ldots, z_n)$ に，$(1, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ を含む複素 1 次元部分ベクトル空間を対応させる写像とする．このとき，j は $\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{C}P^n$ の開集合との間の微分同相写像を定めている．

$(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ とし，$z_k = x_k + iy_k$ とおくと，$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ は $\mathbb{C}^n$ の座標を与える．この座標により $\mathbb{C}^n$ 上のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ が定まる．このベクトル場が $\mathbb{C}P^n$ 上の C^∞ 級のベクトル場の制限になっていることを示せ．

5 函数空間 $L^2(\mathbb{R}, dx)$ の有界閉部分集合 Γ に以下の 2 条件を仮定する：

(a) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \sup_{f\in\Gamma} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|^2 dx = 0.$

(b) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \sup_{f\in\Gamma} \int_{|x|\geq r} |f(x)|^2 dx = 0.$

このとき，次の命題 (R) を考える．

(R) Γ は $L^2(\mathbb{R}, dx)$ のコンパクト部分集合である．

次の問に答えよ．

(i) $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$, $t > 0$ に対し

$$T_t f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_x^{x+t} f(y)dy, & |x| \leq 1/t, \\ 0 & |x| > 1/t \end{cases}$$

とおく．各 $t > 0$ に対し $\Gamma_t = \{T_t f \ ; \ f \in \Gamma\}$ は $L^2(\mathbb{R}, dx)$ の相対コンパクト部分集合である．このことを，区間 $[-1/t, 1/t]$ 上の連続函数全体の集合に sup norm を与えた函数空間で Ascoli-Arzelà の定理を用いることにより示せ．

(ii) 次を示せ：

$$\lim_{t\to 0} \sup_{f\in\Gamma} \int_{\mathbb{R}} |T_t f(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

(iii) 小問 (i)，(ii) の結果から (R) を導け．

6 $f(t,x)$ を $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ で定義された C^1-級の実数値函数で，変数 t については周期 1 の周期函数である，すなわち

$$f(t+1,x) = f(t,x) \qquad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

を満たすとする．$x(t)$ に関する常微分方程式

$$\text{(E)} \qquad \frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

を考える．この常微分方程式 (E) の解 $x(t)$ が，ある $T > 0$ について

$$x(t+T) = x(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

を満たすとき，$x(t)$ を周期解，T をその周期と呼ぶ．

(i) $\varphi(t)$ は常微分方程式 (E) の解とする．このとき，$\psi(t) = \varphi(t+1)$ も常微分方程式 (E) の解であることを示せ．

(ii) $x(t)$ は，常微分方程式 (E) の解であるが，周期 1 の周期解ではないとする．このとき，数列 $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ は，狭義単調増大列か狭義単調減少列であることを示せ．

(iii) 常微分方程式 (E) がある周期 $T > 0$ の周期解をもてば，この周期解は $T = 1$ を周期として持つことを示せ．

(iv) $x(t)$ を (E) の有界な解とする．そのとき，(E) のある周期解 $\varphi(t)$ で

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - \varphi(t)| = 0$$

となるものが存在することを示せ．

7 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ をヒルベルト空間 H の正規直交基底とし, H の有界線型作用素 U が任意の整数 n に対して $Ue_n = e_{n+1}$ を満たすとする.

(i) T が H の有界線型作用素であり, 整数 i, j が存在して任意の $x \in H$ に対して $Tx = \langle x, e_i \rangle e_j$ を満たすとする. このとき次が成り立つことを示せ.

$$(*) \qquad \lim_{n \to \infty} || \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T U^{-k} || = 0.$$

ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は H の内積とし, $||T||$ は T の作用素ノルムとする.

(ii) H の任意のコンパクト線型作用素 T に対して, $(*)$ が成り立つことを示せ.