ガロア祭　懸賞問題　2014年

次の問題のうちから好きなだけ解いて（小問だけでもかまいません）解答してください．提出期限は5月23日（金）午後5時，提出場所は数学教室事務室です．

問題1　n 次元ユークリッド空間（n は3以上かもしれない！）に住んでいてどの方向にも自在に動いて生活している生物がいるとしましょう．彼らも最近無線のインターネットのようなものを開発していたのですが，そのために無数のスポットを，ちょうど

$$L = \left\{ \sum a_i v_i \mid v_i (1 \le i \le n) \in \mathbb{R}^g \text{でそれらは線形独立} \right\}$$

の全点上に（つまり格子状に）用意し，利用する際は，いる場所からもっとも近いスポットの電波を利用することにしました．

それに動機づけられて，彼ら彼女らは原点スポット $(0, 0, ..., 0)$ からの電波の「勢力範囲」

$$P := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < |x - d| \text{ for any } d \in L \}$$

の形がどういった形をとりうるか，詳しく研究しているようです．

格子 L の基底 $v_1, \cdots, v_n$ を変えるごとに P としては様々な凸多面体が現れるようです．そこで P としてありうる凸多面体の組み合わせ的なタイプの種類の数 $f(n)$ を考えます．たとえば $f(1) = 1$（区間），$f(2) = 2$（四角形と六角形）であるようです．では $n > 2$ の場合，$f(n)$ はどうでしょうか？有限と証明できるでしょうか？仮にそうならばそれを具体的な n の式による不等号で評価できるでしょうか．それとも，とある n については $f(n)$ は無限でしょうか？

P や $f(n)$ について自由に論じてください．

問題2　$\mathbb{R}^d$ 内の格子点の集合を $\mathbb{Z}^d = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \mid x_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \cdots, d \right\}$ で表わす．$\mathbb{Z}^d$ 内の点列 $\lambda = [\lambda(0), \lambda(1), \cdots, \lambda(m)]$ が長さ m（m は非負整数）のパスであるとは，各 $i = 1, 2, \cdots, m$ に対して $\lambda(i) \in \mathbb{Z}^d$ かつ $|\lambda(i-1) - \lambda(i)| = 1$ が成立することをいう[1]．パス $\lambda = [\lambda(0), \lambda(1), \cdots, \lambda(m)]$ に対して次のようなループを除去する操作を考える．まず

$$s_0 = \max\{ j \le m \mid \lambda(j) = \lambda(0) \}$$

とする．$i \ge 1$ に対しては帰納的に

$$s_i = \max\{ j \le m \mid \lambda(j) = \lambda(s_{i-1} + 1) \}$$

[1]ただし $|\cdot|$ は $\mathbb{R}^d$ のユークリッド距離．

と定義する．また

$$n = \min\{i \mid s_i = m\}$$

とおく．このときパス λ からループを除去したパスを

$$LE(\lambda) := [\lambda(s_0), \lambda(s_1), \cdots, \lambda(s_n)]$$

によって定義する（LE は Loop-Erasure の略）．

さて $S = (S(n))_{n\geq 0}$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の原点から出発する単純ランダムウォークとする．すなわち $S(0) = 0$ であって，その後の推移確率が

$$P\big(S(n+1) = y \mid S(n) = x\big) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & (|x-y| = 1) \\ 0 & (|x-y| \neq 1) \end{cases}$$

によって与えられる $\mathbb{Z}^d$ 上のマルコフ連鎖を考える．このランダムウォークの時刻 m までのパスを

$$S[0,m] = [S(0), S(1), \cdots, S(m)]$$

と書くことにする．$S[0,m]$ からループを除去して得られる $LE(S[0,m])$ をループ除去ランダムウォークと呼ぶ．$LE(S[0,m])$ の長さを $\ell_m^{(d)}$ で表わす．

(i) $\ell_m^{(d)}$ の平均を $E(\ell_m^{(d)})$ で表わすとき

$$\lim_{d\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \frac{E(\ell_m^{(d)})}{m} = 1$$

を示せ．

(ii) ループ除去ランダムウォークの時間反転に関する対称性を考えるために次の記号を導入する．パス $\lambda = [\lambda(0), \lambda(1), \cdots, \lambda(m)]$ に対して，その時間反転 $\lambda^R = [\lambda^R(0), \lambda^R(1), \cdots, \lambda^R(m)]$ を

$$\lambda^R(j) = \lambda(m-j),\ j = 0, 1, \cdots, m$$

によって定義する．また $LE^R(\lambda)$ を $LE^R(\lambda) = \big(LE(\lambda^R)\big)^R$ により定める．このとき

(ii-1) $LE(\lambda) \neq LE^R(\lambda)$ となる λ の例をひとつ挙げよ．

(ii-2) $LE(S[0,m])$ と $LE^R(S[0,m])$ は同分布であること，すなわち原点出発のすべてのパス λ に対して

$$P\big(LE(S[0,m]) = \lambda\big) = P\big(LE^R(S[0,m]) = \lambda\big) \tag{1}$$

であることを示せ（この性質 (1) をループ除去ランダムウォークの時間反転に関する対称性という）．

問題３

(1) 平面上に n 個の点が与えられたとします．このとき，平面上の点 x が存在し，x を通る任意の直線を境界とする半平面に，与えられた点のうち $n/3$ 以上が必ず含まれことを示してください．

(2) 平面上に $3r$ 個の点が与えられたとします．これらの点を 3 点ずつ r 個の組に分割し，それぞれの組のなす三角形を描きます．このとき，うまく分割を選べば，すべての三角形に属する平面上の点が存在することを示してください（図 1 参照）．ただし，3 点が一直線上にあるときは，それらがはる線分のことを三角形と呼びます．

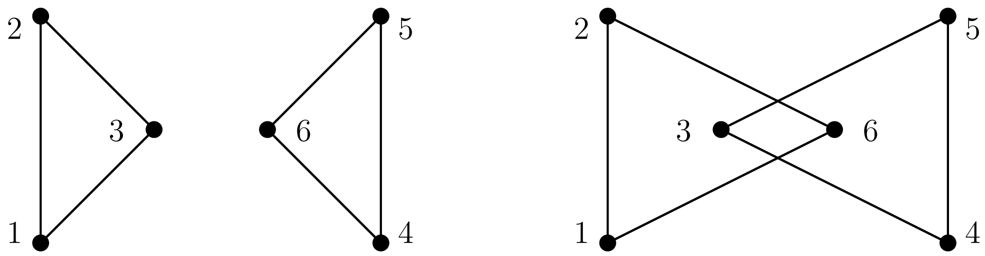


図 1: $r = 2$ のとき，左のように三角形を描いてはだめで，右のように描くとよい．

(3) (2) において，三角形を凸多角形にかえたとき，どのようなことが成り立つか考えてください．

問題４　いくつかの頂点とそれらを結ぶ辺からなる図形 G をグラフといいます．ここで，頂点の集合 $V(G)$ は有限集合とします．また，辺には向きはつけられておらず（無向グラフである），両端点が同一である辺はなく（ループを持たない），二つの相異なる頂点を両端点とする辺は 2 本以上はない（多重辺をもたない）とします．また，どの二つの頂点も，いくつかの辺をたどっていくと結ぶことができる（連結である）とします．まとめると，ループも多重辺ももたない連結な有限無向グラフ G を考えます．辺の集合を $E(G)$ で表します．

$V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ とします．$i = 1, \ldots, n$ に対して，頂点 v_i に整数 a_i を置きます．このような配置を $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ で表し，$|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_n$ とおきます．このとき，新しい配置を作る次の操作を考えます．

- ある頂点 v_i を選び，v_i を端点とする辺が全部で m_i 本あるとし，それらを $e_{i_1}, \ldots, e_{i_{m_i}}$ で表します．辺 e_{i_j} の v_i 以外の端点を v_{i_j} とします．このとき，$a'_i := a_i - m_i$ とおき，$j = 1, \ldots, m_i$ について，$a'_{i_j} := a_{i_j} + 1$ とおき，$k \neq i, i_1, \ldots, i_{m_i}$ については $a'_k := a_k$ とします．こうして，新しい配置 $\mathbf{a}' = (a'_1, \ldots, a'_n)$ を作ります．

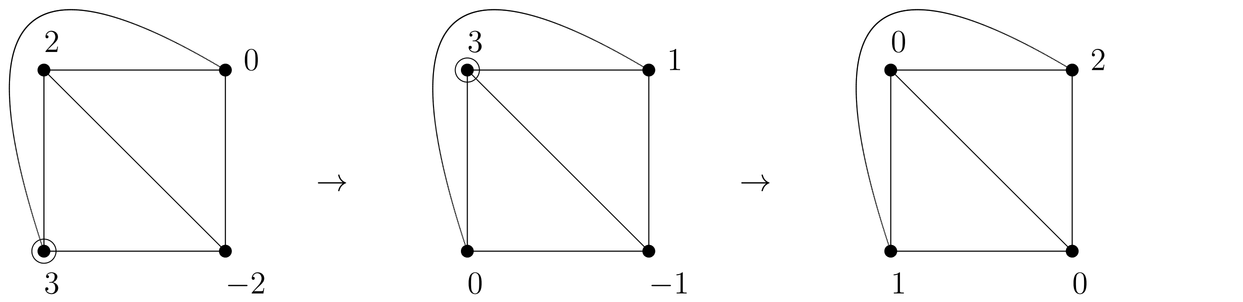
このとき次の問題を考えて下さい.

(1) $|\mathbf{a}| \geq \#E(G) - \#V(G) + 1$ を満たす任意の配置 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ を考えます．このとき，上の操作を繰り返すことで，配置 $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ で $b_i \geq 0$（$i = 1, \ldots, n$）となるものにできるでしょうか.

(2) $|\mathbf{a}| = \#E(G) - \#V(G)$ である任意の配置 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ について，(1) のような結論を導けるでしょうか.

(1), (2) とも，一般の G で考えるのが大変なときは，いくつかのグラフ G について考えて下さい.

例： $\#E(G) - \#V(G) + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$.



問題５　a を 0 でない有理数とし，a の平方根をとる操作を繰り返すと，いつかは有理数でなくなります．このことを言い換えると，$f(x) = x^2$ とおき，初期値 a を有理数とするとき，

$$\text{すべての } n \text{ について } a_n \text{ は有理数で，} a_0 = a,\ f(a_n) = a_{n-1}\ (n = 1, 2, \ldots)$$

をみたす数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在すれば，$a = 0$ で $a_n = 0$（$n = 1, 2, \ldots$）が成り立つことになります.

ここで $f(x)$ を変えることを考えます．c を固定された有理数とし，$g(x) = x^2 + c$ とおきます．このとき，次の問題を考えてください.

(1) 次の性質をみたす有理数 b は有限個しかないことを示して下さい：

$$\text{すべての } n \text{ について } b_n \text{ は有理数で，} b_0 = b,\ g(b_n) = b_{n-1}\ (n = 1, 2, \ldots) \qquad (\star)$$

をみたす数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在する.（上の場合では，そのような初期値 a は 0 だけの 1 個です.）

(2) 初期値 b を (1) をみたす有理数とし，数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $(\star)$ をみたすものとします．このとき，$\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ に現れる有理数は有限個であることを示して下さい.（上の場合では，$a_n = 0$（$n = 1, 2, \ldots$）なので，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に現れる有理数は 0 だけの 1 個になっています.）

(3) (1) をみたす有理数の個数を c によらない定数で上から評価できるでしょうか. ((3) は未解決問題と思います.）

一般の有理数 c で考えるのが大変なときは，まずは c は整数であると仮定して考えて下さい．また，$g(x)$ を他の関数に変えるとどうなるかなど，いろいろと自由に考えて下さい.

問題 6　ある生命体 A の寿命は一日で，一日の終わりに（つまり死ぬ直前に）何個かの子孫を残し，そして死ぬことが分かっています．一個の生命体 A が n 個の子孫を残す確率 p_n がわかっているとします．ただし A にはオス・メスの区別はなく，また子孫を残さずに死ぬ可能性もあるとします（つまり，$p_0 > 0$ となることがある）．0 日目に一個の生命体 A が与えられたとき，N 日目に一個以上の生命体 A が存在する確率 x_N を求めてください．また N が大きいときの x_N の漸近的なふるまいはどうなるでしょうか．$\sum_{n=0}^{\infty} np_n = 1$ のときと $\sum_{n=0}^{\infty} np_n > 1$ のときに分けて考察してみてください.

出題者：１．尾高悠志，２．白石大典，３．岸本大祐，４–５．川口周，６．入谷寛