

平成 25 年度 京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

基礎数学

- ⊗ 1 から 4 までの全問を解答せよ.
- ⊗ 解答時間は 2 時間 である.
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 計算用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

1 \mathbb{R}^4 に標準的な内積を入れる． V を

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で生成される \mathbb{R}^4 の部分ベクトル空間とする．このとき V の \mathbb{R}^4 における直交補空間 W の基底を 1 組求めよ．

2 3 次の複素正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

を考える．行列 A と B は相似かどうか理由をつけて答えよ．ただし，行列 A と B が相似とは，複素正則行列 P で $A = P^{-1}BP$ をみたすものが存在することをいう．

3 \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x, y) = (3xy + 1)e^{-(x^2+y^2)}$ の最大値が存在することを示し，その最大値を求めよ．

4 α, β を実数とする．広義積分

$$\int_1^{\infty} \frac{x^\alpha \log x}{(1+x)^\beta} dx$$

が収束するような α, β の範囲を求めよ．