

伊藤清先生の業績紹介

重川 一郎 (昭和 51 年学部卒業 京都大学理学研究科数学教室 教授)

1 序

伊藤先生は数学教室とは縁の深い先生であり、また顕著な業績を残された人でもあります。また去年がちょうど生誕百周年でもありました。この機会に伊藤先生の業績の一端を、伊藤の確率積分や、確率微分方程式の理論を中心に紹介させていただきたいと思います。その前に、簡単に昨年の記念事業のこともこの機会に紹介させていただきます。

2015 年は伊藤清先生の生誕百周年でした。その記念行事として、日本数学会主催で各種のイベントが行われました。「伊藤清生誕百年記念事業」実行委員会を作って、具体的な詳細はそこで決められました。委員長は当時数学会理事長の舟木直久氏が務められましたが、入念な心配りで、委員会の運営は非常に効率的になされました。また、数学会からも委員に加わってくださり、各種催し物の経験も豊富で、しかも非常な熱意をもってあたっていただきました。私も委員会のメンバーの一人ではありましたが、そうした人たちの努力には本当に頭が下がる思いでした。日本数学会には、伊藤清生誕記念事業のホームページも作られ、そこで伊藤先生の業績や写真などが紹介されています。URL は次の通りですので、ぜひそこを訪れてみてください。

<http://mathsoc.jp/meeting/ito100/index-jp.html>

小平邦彦先生も伊藤先生と同級で、やはり日本数学会が記念行事を開催しました。同じく日本数学会のホームページに小平先生の記念事業のホームページが作られています。1915 年は偉大な日本人数学者が次々に生まれた特別な年のように思えます。

さて、その記念行事の一つとして、2015 年 9 月 12 日京都産業大学において市民講演会が開催されました。「伊藤清先生の数学」と題し、渡辺信三先生が講演されました。その講演記録は数学通信第 20 巻第 4 号に公表されています。また次の数学通信のホームページにも掲載されています。

<http://mathsoc.jp/publication/tushin/2004/2004watanabe.pdf>

さらに市民講演会の折に、パネル討論「伊藤清先生の数学をめぐって」も開催され、その記録は上記数学通信に掲載されています。ホームページの URL は

<http://mathsoc.jp/publication/tushin/2004/ito100.pdf>

になります。パネル討論の方は、筆者が進行役でしたので、手前みそになり大変恐縮ですが併せて紹介させていただきました。

伊藤先生の業績は、前述の渡辺信三先生の講演の中で詳しく紹介され、また数学通信の記事として見ることができますので、そちらを見られることをお勧めいたします。数学的にはより正確ではありますが、やや専門的な部分もありますので、この小文ではもう少し初等的な解説を試みたいと思います。それでも多少の数式は使わざるを得ないですが、数学教室同窓生にはむしろ数式が多少あったほうが却って分かりやすいかもしれないと思います。

2 略歴



伊藤清

業績の紹介の前に、簡単にその経歴を辿ってみたいと思います。伊藤清先生(1915–2008)は三重県の御出身で、京都大学数学教室には1952年から1966年の間、教授として就任されていました。この間に確率論の研究を深めるとともに、多くの学生を指導されてこられました。この写真は1952年当時のもので、数学教室に保管されていたものです。この種の数学教室関係の文書や写真などは、現在数学教室同窓会が、保存、管理に当たっています。皆様の中にも、数学教室の古い資料や写真で、特に将来に残しておいた方がよいと思われるものがあれば、ぜひ同窓会の方にお持ちください。同窓会の活動の一端の紹介とともに、この機会を借りて、場違いではありますが、同窓会への協力とご支援をお願いいたします。

たします。

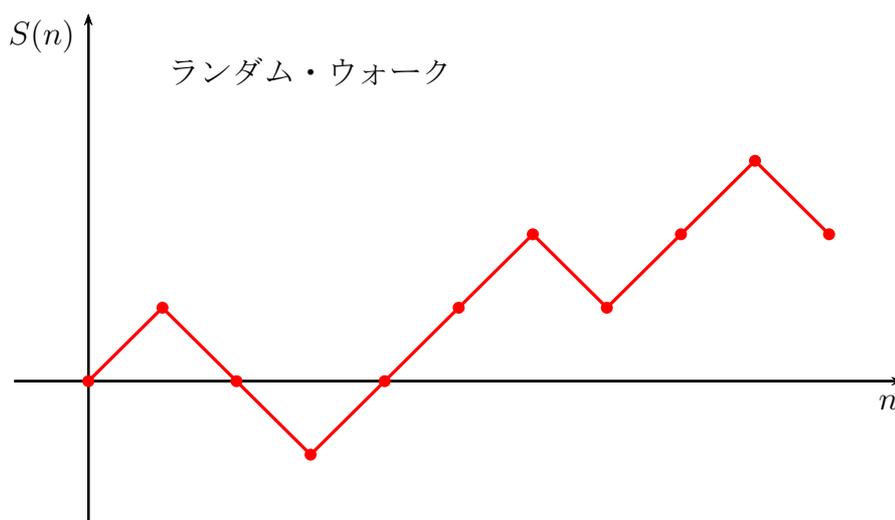
さて、伊藤先生はその後、数理解析研究所、海外でスタンフォード大学、オルフス大学、コーネル大学などの教授を歴任され、1978年日本学士院賞恩賜賞、1998年京都賞、2006年ガウス賞、2008年文化勲章、などの様々な賞を受けられました。そして2008年11月10日に永眠されました。享年93歳でした。

3 ブラウン運動

伊藤先生の業績で一番よく知られているのは、伊藤の公式と呼ばれるブラウン運動に関する一種の変数変換の公式でしょう。その説明をするには、まずブラウン運動とは何かを説明する必要があります。数学的に厳密な定義はいろいろ概念が必要になるので、ここではランダム・ウォークの極限と考えることにします。ランダム・ウォークは次のように定義されます：

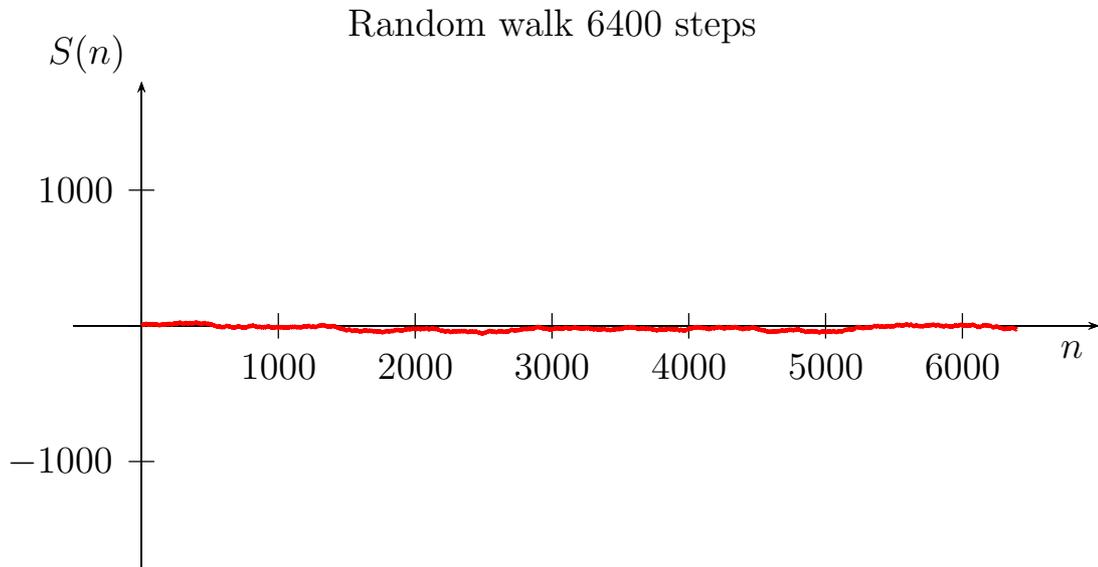
$$S(n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

X_n は 1 を取る確率が $\frac{1}{2}$ で、 -1 を取る確率が $\frac{1}{2}$ の確率変数で、互いに独立であることを仮定します。コインを投げて、表が出れば 1 円獲得し、裏が出れば 1 円失う、というイメージです。確率論ではこのように、ギャンブルをやっているかのような状況設定をすることがしばしばあります。そのほうが切実感があるからかもしれません。その一方で確率論を使えば大儲けができるという幻想を持つ方もおられるようですが、ほとんどの場合その幻想は完膚無き体に打ち砕かれてしまいます。失望ばかりでなく、現実に損害を被った話も聞かないわけではありません。またサイコロ遊びをするのは人間ばかりで、神はサイコロ遊びをしない、と言っている人もいます。それはともかくとして、 $S(n)$ のグラフを書くと次のようなものになります。

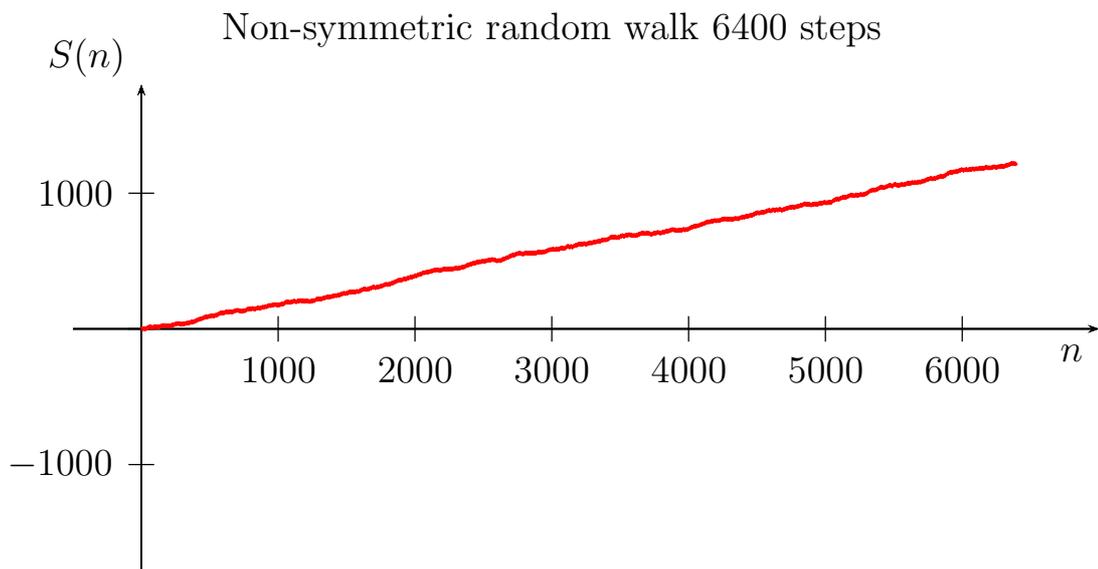


とりたてて面白みのないグラフですが、これで n をどんどん大きくしていくことを考えます。例えば次は 6400 回繰り返したときのグラフです。実際、コンピューターで (疑似) 乱

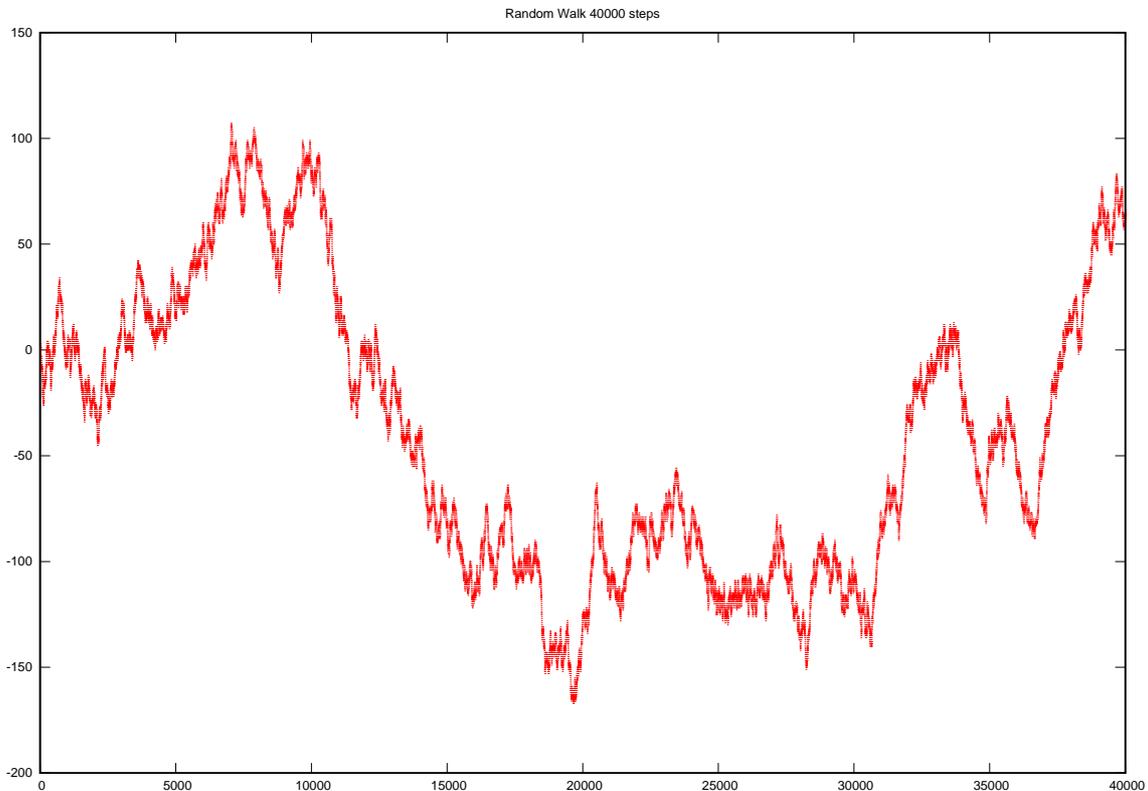
数を 6400 個生成させて書きました（書いたのはコンピューターで筆者ではありません）。



少し凸凹がありますが，ほとんど時間軸と重なっている感じです． n を大きくしていくと，直線に近づいていきます．これは平均的な動きを表しているわけで，確率論では大数の法則と呼ばれる定理を実際に見ていることになります． $\frac{S(n)}{n}$ の動きを見ているわけです．これは X_n の平均が 0 だからで， $X_n = 1$ となる確率を変えれば $S(n)$ の動きも変わってきます．例えば次は $P(X_n = 1) = 0.6$ としたものです． P は確率を表します．



平均 $\frac{1}{5}$ だから、大体傾きが $\frac{1}{5}$ になっていますよね。ほぼ直線だけれど、多少凸凹しています。この凸凹の部分が確率的な揺らぎです。この揺らぎの部分をもう少しはっきり見るためには、時間と空間のスケールを変える必要があります。先ほどは時間の刻みを $\frac{1}{n}$ にし、空間の刻みも $\frac{1}{n}$ にしたことになります。平均的な動きを見るには、このスケールでいいわけです。しかし平均の周りの揺らぎを見るには、空間方向を小さくしすぎているわけです。従って空間方向を拡大してやればいいのですが、どれくらい大きくすればうまくいくか？答えは \sqrt{n} 倍です。 $\frac{S(n)}{n} \times \sqrt{n} = \frac{S(n)}{\sqrt{n}}$ なので元々のスケールで考えれば空間方向を $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 倍することになります。それを次に見てみましょう。



この図は、ブラウン運動らしさが分かるようにステップ数を 40000 回に増やしています。単に n を大きくしていただけですが、 $n = 10$ のときとは全く質的に異なったものが見えてきていると思います。時間が $\frac{1}{n}$ 進んだときには、空間的には $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 動きます。時間の微小変異を dt 、空間の微小変異を dx とすると $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ なので $dx^2 = dt$ と思えます。あるいは軌道の変異なので

$$dx(t)^2 = dt \quad (1)$$

と表した方がより正確でしょう。グラフを見ても非常にギザギザした動きになっています。このグラフは $n = 40000$ の場合ですが、さらに n を無限大にした極限をブラウン運動と呼びます。

これまでで一応ブラウン運動は定義できました。実はブラウン運動はどの点でも微分できないのですが、その感覚もなんとなく分かるのではないのでしょうか。確率変数には平均の他に分散という基本的な特性量があります。平均を引いて、平方して、さらに平均した量です。例えば $\frac{S(n)}{\sqrt{n}}$ の分散は、平均が 0 なので

$$E\left[\left(\frac{S(n)}{\sqrt{n}}\right)^2\right] = 1 \quad (2)$$

となります (E は平均を表す記号で、以後いたるところに現れてきます)。したがって先ほどのスケールは分散を 1 に正規化するようなものだった訳です。揺らぎを見るには、分散を基準に見る、というのが基本的な考え方です。これは覚えておいて損はない。尤も世の中のことを損得でだけ忖度するのは、いささか心の貧しさを感じてしまいますが、それはおくとして、ブラウン運動は空間的には非常に激しく動いているのですが、行ったり来たりしているので、グローバルな動きは緩慢です。このグラフでも、空間方向は ± 200 の間に収まっています。ただひたすら上向きに進んでいけば 40000 に達するのに、たった 200 までしか動いていない。 n ステップの間に \sqrt{n} しか広がらないわけです。これが熱の伝導の特徴です。波などは時間と同じスケールで空間的に伝わりますが、熱はずっと遅い訳ですね。熱しやすく冷めやすい、というものがもしあれば、それは熱とは別の要因で動いていることになります。ランダム・ウォークは日本語では乱歩とか酔歩とかよばれます。酔歩というのは、酔っぱらいの足取りがふらふらとして、まるでランダム・ウォークそのものだからですが、言い得て妙というものです。それで、話は元に戻りますが、酔っぱらいがなかなか家に辿り着かないのは、お家に帰りたくないという心情的なことではなく、熱現象における遅延性に因るわけ。多少数学的に対応する方程式を考えると、波動方程式は $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ で時間空間とも 2 次ですが、熱方程式は $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ で時間 1 次、空間 2 次で、先ほど言ったスケールとも辻褄が合っています。

4 伊藤の公式・確率積分

さて、このランダム・ウォークの極限がブラウン運動であるわけですが、以後それを $B(t)$ と表すことにします。 t は時刻を表し、ランダム・ウォークと違って連続変数になります。このように時間とともにランダムに変位する量を確率過程といいます。ブラウン運

動は確率過程の典型的なものです。ではこのブラウン運動に対する伊藤の公式というものを紹介しましょう。ここからが伊藤の理論の紹介ということになります。但し厳密な証明はしないで、直感的な説明をします。\$f\$ を実数上の関数として \$f(B(t))\$ というものを考えてみます。この \$f(B(t))\$ が \$t\$ とともにどのように変化するかを考えます。微小な変異を考えて、

$$B(t + dt) - B(t) = dB(t) \tag{3}$$

とすると \$f(B(t + dt)) - f(B(t))\$ は Taylor の定理を使って

$$\begin{aligned} f(B(t + dt)) - f(B(t)) &= f(B(t) + dB(t)) - f(B(t)) \\ &= f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dB(t)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(B(t))dB(t)^3 + \dots \end{aligned}$$

となりますが、先ほどの直感的な規則 \$dB(t)^2 = dt\$ を使い、さらに \$dt\$ より高位の項を無視すると

$$f(B(t + dt)) - f(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt$$

となります。これは通常積分形で表わして

$$f(B(T)) - f(B(0)) = \int_0^T f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f''(B(t))dt \tag{4}$$

と書きます。これを**伊藤の公式**と呼びます。しかし、右辺の第1項は何でしょうか。これが確率積分で、次のように定義します。

$$\int_0^T f'(B(t))dB(t) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_j f'(B(t_j))(B(t_{j+1}) - B(t_j)).$$

ここで \$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}\$ は区間 \$[0, T]\$ の分割で \$|\Delta| \to 0\$ は分割の幅をどんどん小さくして行った極限を取るということを意味します。積分を区分求積法的考えで求めたものに他なりません。

ただいくつか問題があります。ブラウン運動 \$B(t)\$ が微分できないということは紹介しましたが、有界変動でもありません。先ほどの区分求積法は \$B(t)\$ が有界変動ならば Stieltjes 積分として意味を持ちます。しかし \$B(t)\$ は有界変動ではないので、上のような積分を考えようというのは普通は発想として出てこない。実際一つ一つのブラウン運動の軌跡ごとに定義することはできないのです。\$L^2\$ で収束するという形で定式化します。また上の積分の定義で \$f'(B(t_j))(B(t_{j+1}) - B(t_j))\$ の \$f'(B(t_j))\$ は小区間 \$[t_j, t_{j+1}]\$ の左端

を取っていますが、こう取るということが非常に巧妙なところであり、ブラウン運動は独立増分性と言う性質を持っていて、上の積分は瞬間瞬間に独立な要因が加わって時間発展していく様子を表しています。この時間とともに発展していくという考え方も重要で、左端を取るというのは自然のメカニズムをうまく反映したものでもあるわけです。実際このおかげで確率積分は、積分区間の上端を時間パラメーターとしてマルチンゲールと呼ばれるものになっています。マルチンゲールは公平な賭けを一般化した概念で、確率論では非常に重要な概念です。被積分関数は一般化できて、それを一般的に $\Phi(t)$ とすると確率積分

$$I(\Phi)(T) = \int_0^T \Phi(t) dB(t)$$

が定義できます。 $\{\Phi(t)\}$ は確率過程とみて $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合というような条件は必要ですが、ここで \mathcal{F}_t は時刻 t までのすべての情報を表します。このとき $\{I(\Phi)(t)\}$ はマルチンゲールになります。その原理を大雑把に説明すると以下ようになります。 $B(t)$ は平均が一定（ふつう 0 から出発するもの考えることが多い）なのでしたがって

$$E[dB(t)] = 0$$

となります。過去と独立になるので

$$E[dB(t) | \mathcal{F}_t] = 0$$

としたほうが正確です。ここで $E[\cdot | \mathcal{F}_t]$ は \mathcal{F}_t で条件付けるということを表します。

上の計算は単なる形式的な表現に過ぎないですが、これを援用すると $s < t$ のとき

$$E\left[\int_0^t \Phi(u) dB(u) \mid \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_0^s \Phi(u) dB(u) + \int_s^t \Phi(u) dB(u) \mid \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s \Phi(u) dB(u)$$

という式が得られて、これがマルチンゲールの定義そのものになっています。このマルチンゲールという概念は、現代確率論のありとあらゆる場面で非常に強力な道具となっています。確率積分がマルチンゲールになっていることも、確率積分を有用足らしめている根幹の一つです。上のことから特に

$$E\left[\int_0^t \Phi(u) dB(u)\right] = 0$$

が成り立っていることに注意しておきます。つまり平均すると、確率積分の影響は消えてしまう訳です。

さて最後に、伊藤の公式 (4) は微分形で

$$df(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt$$

で書かれることがよくあります。もちろん $dB(t)$ や dt そのものに厳密な意味があるわけではありません。正確には (4) の形で理解する必要があります。しかしこの方が直感的な理解に合いますし、形式的な計算を行って最後に積分で書き直せば正しい答えが得られます。こういう形式的な計算に合理化を与えたのが伊藤理論の有効性と言ってよいと思います。

5 マルコフ過程

次に確率微分方程式の話に移ります。ニュートンは万有引力の発見者として有名です。それもリンゴを見ながら発見したという秀逸なエピソード付きで。これは実によくできた話だと感心しますが、ニュートンは、でも、それよりも $F = m\ddot{x}$ という運動方程式、敷衍して物理法則が微分方程式で記述できるという思想、でもって褒め称えられるべきでしょうね。確率微分方程式はこの微分方程式にランダムな効果を取り入れたものということができます。

確率微分方程式を説明する前に、Kolmogorov の仕事を紹介する必要があります。マルコフ過程の数学的な定式化は Kolmogorov によってなされました。次に Kolmogorov の 1931 年に出版された論文 *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, (Math. Ann., **104** (1931), no. 1, 415–458.) の一部を紹介します。この論文は現在でも時々引用されるほどの非常に基本的な論文です。

ブラウン運動をランダム・ウォークの極限から構成する話を前にしましたが、平均的な動きの部分と、揺らぎの部分の二つの部分に分けて説明しました。マルコフ過程も同じような視点で特徴付けられます。確率過程 $\{X(t)\}$ が与えられているとしましょう。粒子が空間の中を動いているというイメージです。空間は簡単のため 1 次元の実数直線 \mathbb{R} ということにします。この空間は多次元にも、また多様体にも一般化することが出来ませんが、基本的な考え方は同じです。マルコフ過程は、現在で条件付けたとき、過去と未来が独立になっているという風に説明されます。数学的には次のように定義されます、

$$E[f(X(s+t))|\mathcal{F}_s] = E[f(X(s+t))|X(s)].$$

$E[\cdot | X(s)]$ は現時点の時刻 s における情報だけで条件付けることを意味します。これは、過去全体で条件付けても、現在で条件付けたのと同じことなので、現在だけの条件が未来

に影響して、それ以外の過去の条件は影響しない、ということになります。現在の位置が x にあると、そこから新たにマルコフ過程が始まると思ってください。時刻 t で x にいるという条件付期待値を $E[\cdot | X(t) = x]$ と表します。確率過程は、平均的な動きの部分と、平均の周りの揺らぎの部分から成立していると述べました。出発点に応じて、これらの特性量は変わってきますので $dX(t) = X(t + dt) - X(t)$ とすると

$$\begin{aligned} E[dX(t) | X(t) = x] &= b(x)dt \\ E[dX(t)^2 | X(t) = x] &= a(x)dt \end{aligned}$$

と表せます。 $b(x)$ は x での平均的な運動を表し、 $a(x)$ は x での揺らぎ (分散の大きさ) を表します。空間の点ごとに定数が変わってもよい訳です。実際は微小時間 Δt を使って

$$E[X(t + \Delta t) - X(t) | X(t) = x] = b(x)\Delta t + o(\Delta t)$$

として、後で $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取るという操作を、 dt という記号で象徴的に表していると思ってください。従って、初めから等号の関係にしてあります。

こういう確率過程が存在すると、滑らかな関数 f に対して

$$df(X(t)) = f(X(t + dt)) - f(X(t))$$

とおくと、Taylor 展開を使って

$$\begin{aligned} E[f(X(t + dt)) - f(X(t)) | X(t) = x] &= E[f(X(t) + dX(t)) - f(X(t)) | X(t) = x] \\ &= E[f(x + dX(t)) - f(x) | X(t) = x] \\ &= E[f'(x)dX(t) + \frac{1}{2}f''(x)(dX(t))^2 | X(t) = x] \\ &= b(x)f'(x)dt + \frac{1}{2}a(x)f''(x)dt \\ &= E[b(X(t))f'(X(t))dt + \frac{1}{2}a(X(t))f''(X(t))dt | X(t) = x]. \end{aligned}$$

さらに $X(t)$ の分布で x を積分すると、

$$E[f(X(t + dt)) - f(X(t))] = E[b(X(t))f'(X(t))dt + \frac{1}{2}a(X(t))f''(X(t))dt].$$

t で積分して

$$E[f(X(T)) - f(X(0))] = \int_0^T E[b(X(t))f'(X(t)) + \frac{1}{2}a(X(t))f''(X(t))]dt$$

が得られます。積分の順序交換は自由にできるとして計算しています。微分して

$$\frac{\partial}{\partial t} E[f(X(t))] = E[b(X(t))f'(X(t)) + \frac{1}{2}a(X(t))f''(X(t))].$$

特に $X(0) = x$ と条件付けて初めから考えると

$$\frac{\partial}{\partial t} E[f(X(t)) | X(0) = x] = E[b(X(t))f'(X(t)) + \frac{1}{2}a(X(t))f''(X(t)) | X(0) = x]$$

$X(0) = x$ の条件の下で $X(t)$ の分布が密度関数を持つとしてそれを $p(t, x, y)$ と表すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} p(t, x, y) f(y) dy &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ b(y)p(t, x, y)f'(y) + \frac{1}{2}a(y)p(t, x, y)f''(y) \right\} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ -\frac{\partial}{\partial y}(b(y)p(t, x, y)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a(y)p(t, x, y)) \right\} f(y) dy \end{aligned}$$

これから次のような微分方程式が自然に得られます。

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = -\frac{d}{dy}(b(y)p(t, x, y)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a(y)p(t, x, y)). \quad (5)$$

これを Kolmogorov の前進方程式と言います。初期条件は $p(0, x, y)dy = \delta_x(dy)$ と Dirac で与えます。この場合 $t = 0$ のときは、左辺 $p(0, x, y)dy$ は超関数的に考える必要がありますが、物理に近い分野では (5) は Fokker-Plank 方程式という名前と呼ばれています。

x に関する微分方程式も導けます。結果だけ書くと

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x, y) = b(x)\frac{\partial}{\partial x}p(t, x, y) + \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t, x, y)$$

と表され、後退方程式と呼ばれます。いずれにしても、マルコフ過程は推移確率で定まり、それが偏微分方程式とつながっていることが分かります。Kolmogorov は偏微分方程式を解くことにより、マルコフ過程が構成できることを示したわけです。

6 確率微分方程式

さていよいよ本題である確率微分方程式に入ります。Kolmogorov の解析的なアプローチに対して、伊藤の理論は初めから、マルコフ過程を確率論的に構成することを考えたこととなります。そこで現れたのが確率微分方程式ということです。確率微分方程式は次の形の確率積分方程式として定式化されます。

$$X(t) = x + \int_0^t \sigma(X(s)) dB(s) + \int_0^t b(X(s)) ds.$$

σ を拡散係数, b をドリフト係数と呼びます. σ, b には連続性などの適当な仮定を設定します. これは, 積分方程式の形をしていますが, 次のように微分形で書いて, **確率微分方程式**と呼びます.

$$\begin{cases} dX(t) = \sigma(X(t)) dB(t) + b(X(t)) dt \\ X(0) = x. \end{cases} \quad (6)$$

$\sigma = 0$ であれば $\frac{dX(t)}{dt} = b(X(t))$ という常微分方程式になります. 従って, 確率微分方程式は, 常微分方程式にランダムな項を付け加えたものとなります. 自然界には, ランダムな影響を受けて運動しているものも多く見受けられ, 経済現象でも株価などは何らかのランダムな影響を受けて変動しているとみられます. それを確率モデルとして, 確率微分方程式の形で定式化することにより, 数学的に, そして計算可能な形での取り扱いが初めて可能となるわけです.

これはまた, Kolmogorov が考えた問題を, 確率論的に解くことにもなっていました. (6) の解が存在したとして,

$$\begin{aligned} E[dX(t)|X(t) = x] &= E[\sigma(X(t)) dB(t) + b(X(t)) dt|X(t) = x] \\ &= \sigma(x)E[dB(t)|X(t) = x] + b(x)E[dt|X(t) = x] \\ &= b(x) dt \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} E[dX(t)^2|X(t) = x] &= E[(\sigma(X(t)) dB(t) + b(X(t)) dt)^2|X(t) = x] \\ &= E[(\sigma(X(t)))^2(dB(t))^2|X(t) = x] \\ &= \sigma(x)^2 dt \end{aligned}$$

という計算でマルコフ過程の特徴づけが $b = b, a = \sigma^2$ として成立していることが分かります. むしろ, 確率微分方程式によってマルコフ過程の特徴づけが明瞭になったとも言えます. 揺らぎの項が $\sigma(X(t)) dB(t)$ として, 瞬間瞬間に独立な $dB(t)$ の影響から引き起こされたという描像を見て取ることができると思います. こうして確率微分方程式を解くことにより, マルコフ過程が構成されたこととなります.

伊藤先生のこの理論は「Markoff 過程ヲ定メル微分方程式」というタイトルで『全国紙上数学談話会』244号に発表されました. 1942年のことです. 謄写版刷りの粗末な印刷物でした. 戦争中という日本の混乱期に出版されたということ, 伊藤先生はまだ27歳という若さであったこと, 伊藤先生が内閣統計局で勤務されていた時に発表されたことなど, 現在ではおよそ想像することすら出来ないような状況の中で, このような時代を画す

る理論が生み出されたことは驚嘆すべきことのように思われます。伊藤先生は、当時の内閣統計局局长・川島孝彦さんから、「あなたのご専門は、大きい意味で統計局の仕事につながりがあると言えますから、時間はすべて自由な研究に使ってください」と言っていたと回想されています。ある意味ではおおらかな、そして幸せな時代だったかもしれません。

この1942年の論文を書いた当時、伊藤先生はまだKolmogorovに直接会ったことはありませんでした。その後3度Kolmogorovと会われたそうですが、次の写真は1982年にグルジアの首都トビリシで第4回日ソ確率論シンポジウムが開催された時のものです。左がKolmogorov、右が伊藤先生です。



Kolmogorov と伊藤清 (写真提供：河野敬雄氏)

筆者は何度か伊藤先生のセミナーを聴いたことがありますが、すべて根本に帰って、きちんと考えることを心がけておられるように感じました。そういう態度であったからこそ、今では物理や、生物、工学、経済まで応用範囲の広い理論の基礎を築き上げることができたのではないかと思います。

伊藤先生は京都大学の数学教室で教えてこられ、我々同窓生もそういう伝統のある環境で学ぶことができたことを幸運に思います。以上、不十分ではありますが、伊藤先生の生誕百周年記念事業にちなみ伊藤先生の御業績の紹介をさせていただきました。伊藤理論の奥深さの、その一端にでも触れていただくことができれば大変幸せに思います。