動く折り紙「カライドサイクル」をめぐる機構学と幾何学の出会い

鍛治 静雄 (九州大学)
1999 年学部入学・2007 年博士課程修了

数学教室同窓会の講演会でお話をする機会をいただけたこと，たいへん光栄に思います．ひょんなことから始めた折り紙に関する研究が，一般にも分かりやすいということからメディアにも取り上げられて，それをご覧になった世話人の方からお声がけを頂いたのだと思います．

この記事では，その講演をもとに，折り紙のおもちゃ「カライドサイクル」をめぐって，どのような数学的話題が提起されるのかを，未解決の問題を交えて紹介します．また，その過程で明らかになったリンク機構や離散曲線，可積分系との関係にも触れます．一見遊びのように見える研究が，予想以上に深い数学的背景を持っていたこと，さらには特許出願など珍しい経験をしたことなどの体験談もお伝えできればと思います．

私は京都大学数学教室を 2008 年 3 月に離れ，福岡大学応用数学科に 2 年勤めた後，2010 年から 2018 年まで山口大学理学部数学科に在籍していました．そこでは以下の二つの理由から，数学にまつわる分かりやすく面白い話題を見つけるというのが大きな仕事でした．

- 小中高校生を対象とする「夏休みジュニア科学教室」や「やまぐちサイエンス・キャンプ」といった講座が年に数回開催されていた
- 学部生全員が卒業論文を執筆する必要があり，毎年 5 名程度の研究テーマを用意する必要があった

どちらも数学は好きだけれど知識は十分でないという子どもや学生を対象に，短期間で興味を惹きつける必要のある難しい要求です．湯田温泉に浸かりながら題材探しに励む毎日だったのですが，当時のネタ帳の中には例えば，ヘクサフレクサゴンという折り紙の話題があります．これは，平坦に折り畳まれた状態から順に「めくる」ことで，異なる図柄が次々に現れる構造を持つ折り紙です．この題材は，小学生向けの工作講座で用いたほか，台湾で 2018 年に学部生向けに行われたサマーコースにおいて

図 1 左に示す作品の制作を行いました．正六角形の各面には世界地図の一部が等角写像によって配置されており，参加学生は Schwarz–Christoffel 写像 (多角形領域を上半平面に等角に写す複素関数) を理論的に学ぶとともに，その具体的な計算 [11] を行い，デザインに活かすという課題に取り組みました．

もう一つ，動く折り紙の話題としてネタ帳にしまっていたのが，今回のテーマである**カライドサイクル**でした (図 1 右)．これはヘクサフレクサゴンの 3 次元版とも言えるもので，数珠繋ぎになった四面体を，イルカのバブルリングのようにクルクル回すことができます．この折り紙については，長らく一つの疑問を抱いていました．

カライドサイクルは紙だから回るのか？ 鉄板で作っても回るのか？

つまり，回転の過程で各四面体がわずかに変形しており，その柔軟性によって回転運動が可能になっているのではないか，という疑問です．幸いなことに，この問いに 2011 年当時に学部 4 年生だったある学生さんも興味を持ってくれたので，卒業研究の題材にすることにしました．大学院には進学しないことを決めていた学生さんだったので，「簡単」でおもしろいことをやろうという軽い気持ちでスタートしたのですが，まさかその後 10 年以上も研究を続けることになるとは思ってもみませんでした．

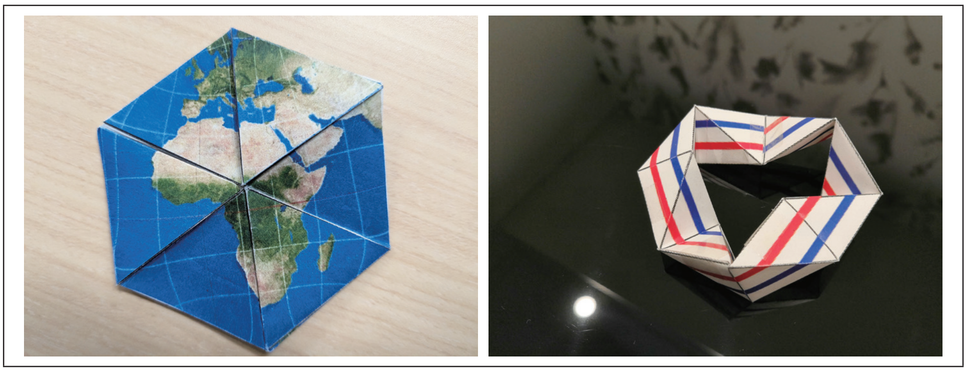

図 1　左：世界地図ヘクサフレクサゴン．`https://github.com/shizuo-kaji/worldhexaflex` にて型紙が入手可能．右：カライドサイクル．`https://github.com/shizuo-kaji/Kaleidocycle` から型紙や 3D プリンタ設計図が入手可能．また，九州大学マス・フォア・インダストリ研究所では，ミシン目を切り取ることで簡単に組み立て可能な体験キットを作成・配布しています：`https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/public/kaleidocycle` 必要部数をご連絡いただいたら，在庫がある限りお送りします．

以下は，2024 年 10 月 26 日に行われた京都大学数学教室同窓会総会における講演内容をもとに再構成したものです．流行にのって，文字起こしや下書きを 2024 年を象徴する大規模言語モデル達に手伝ってもらいました．文章化にあたってかなり内容や構成も変わっているのですが，その点はご了承ください．

1　講演会の模様

1.1　はじまり

まずは司会の菊地克彦さん[*1]が，ちょうど同日に重なってしまった解散総選挙に絡めて会場を和ませ，続いて座長の小磯深幸さんによるご紹介をいただいて，温かな雰囲気のもと講演会が始まりました．

図 2　選挙の喧騒から離れた，理学部 3 号館 110 号室．

改めまして，九州大学の鍛冶です．このような場でお話しさせていただくことを大変光栄に思っておりますが，同時に緊張しております．どうぞよろしくお願いいたします．まず，自己紹介をさせてください．私は 1999 年の入学で，現在数学教室にいらっしゃる方の中では，入谷寛さんの一つ後輩にあたります．指導教員は河野明先生で，ポケットゼミという制度を利用して一回生の頃からマンツーマンでご指導いただきました．大変恵まれた環境だったことを，非常に感謝しております．また，河野先生には，西門を出てすぐの小料理屋によく連れて行っていただきました．学部の講究では加藤文元さんにお世話になり，お寺で合宿をしたのも良い思い出です．

修士課程に進学後，会場にいらっしゃる稲生啓行さんと，当時数学教室におられた荒井迅さんに誘われ，計算機管理の仕事をすることになりました．名前こそ「計算機管理」ですが，実際には計算機とはあまり関係のない力仕事も多く，一番の大仕事は，耐震補強工事のために教室全体が理学部一号館に一時的に移転し，1 年後に元の建物に戻るという 2 度の引越しでした．また，重川一郎さんが最近の同窓会誌に記事を書かれていますが，雑誌室の並べ替えにも参加しました．

博士課程では有理ホモトピー論に関する博士論文を執筆しましたが，その分野で論

[*1] 敬称をどうするか，当日の座長も悩まれていましたが，ここでは指導教員の先生以外は「さん」で統一したいと思います．

文を書いたのはそれが最初で最後です．その後，福岡大学，山口大学を経て，現在は九州大学マス・フォア・インダストリ研究所に所属しています．九州大学といえば箱崎キャンパスのイメージが強い方も多いかと思いますが，現在は伊都キャンパスに移転しています．伊都キャンパスのある糸島半島は自然に恵まれていて，数学をするには良い環境です．図 3 左は学内，右は最寄りというより唯一の路線である JR 筑肥線から大学へ向かう風景です．

図 3　左：日本一広い九州大学伊都キャンパスには，広大な散歩道があり，イノシシも出没します．右：鉄道駅とキャンパスの間には，田んぼと牧場が広がっています．風向きによって芳しい香りが漂うことがあるのは，私が通っていた頃の京大北部キャンパス (近くに養豚場がありました) と共通しています．

マス・フォア・インダストリ研究所 (Institute of Mathematics for Industry) は，名前がカタカナなので分かりづらいですが，「産業のための数学」を研究する研究所ということになっています．産業に限らず，数学を様々な分野に応用すること，また応用可能な数学を生み出すことを目標としています．時に，仕事なのか遊びなのか分からないと思われるような研究もしていて，私自身，稲生さんと VR(バーチャル・リアリティー) 技術を使って 4 次元図形を見るというようなことにも取り組んでいます．稲生さんとは，一回生の時に自主ゼミを見ていただいたのに始まり，計算機管理の “戦友” として，そして現在は「京大数学サイクリング部」でもご一緒しています．

1.2　リンク機構

この講演の主役は「カライドサイクル」です．折り紙で作れる立体模型で，ご存知の方，あるいは作ってみたことのある方もいらっしゃるかもしれません．カライドサイクルが本当に存在するのか，つまり，紙の柔軟性に頼らず，硬い素材でも滑らかに回転できるのか，というのが本日のテーマです．この問題を定式化するには様々なアプ

ローチがあり得ますが，ここでは「リンク機構」の枠組みで考えることにします．リンク機構とは，複数のリンク (節) と呼ばれる剛体が，可動式のジョイント (関節) で繋がっているような構造物です．身の回りでも使われているのですが，中でも私が仕組みを知って感心したのは，車のワイパーでした．ワイパーの往復運動は，普通のモーターで生成できる一定速度の回転運動をリンク機構によって変換することで実現されていて，とても単純なからくりですが，エネルギー効率が良く，コストも低い優れた機構です (図 5 左から 2 番目)．他にも，ジェームズ・ワットが蒸気機関のために発明した機構や，車のサスペンションなど，工学的に様々な場面で活躍している他，魚の顎など生物の中にもリンク機構が現れます [8].

リンク機構の解析を紹介する例として，まずはパンタグラフを取り上げます．パンタグラフといえば，電車の屋根の上にある電力供給装置が有名ですが，語源は「コピー機」を意味し，もともとは図形を拡大・縮小する製図道具でした． このパンタグラフの動作は，図 4 のように三角形の相似を使って説明できます． このように基本的なリンク機構は，小中学生にも理解できる内容であり，生活と結びつけて算数を扱う題材としても有用だと思っています．

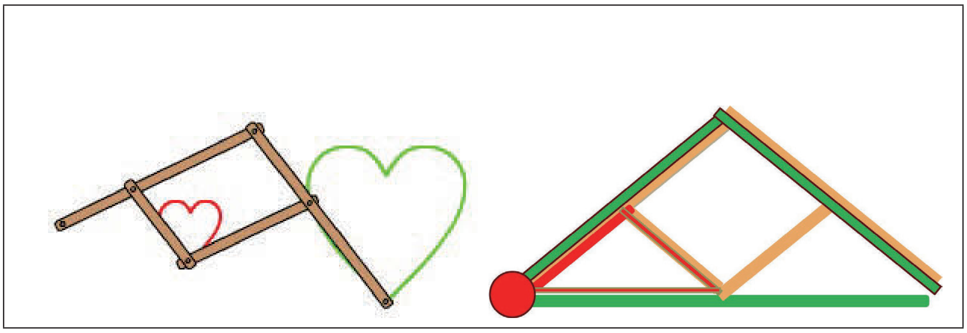

図 4　左：パンタグラフ (画像は Wikipedia より．パブリックドメイン)．右：赤色と緑色の三角形が常に相似であることから，拡大コピーが実現できることが分かる．

さらに一般的なリンク機構を記述するために，グラフのユークリッド空間への実現という数学モデルを考えます．頂点も辺も有限個であるグラフ G の各辺に長さが定められているとします．このグラフ G の頂点を，定められた辺の長さを満たすように，d 次元ユークリッド空間に配置したものを d 次元の**実現**と呼ぶことにします．ここで頂点はジョイント，辺はそれらを繋ぐリンクを表し，リンクはジョイント間の距離を一定に保つ役割を持ちます．実用上は通常 $d = 2$ または $d = 3$ を考え，それぞれを平面リンク機構，空間リンク機構と呼びます．

この枠組みにおいて，カライドサイクルは，四面体の頂点をジョイント，辺をリンクとする空間リンク機構として定式化できます．例えば，標準的なカライドサイクルは 6 個の四面体を連結した構造で，12 個のジョイントと 30 個のリンクで構成されま

す．四面体の全辺をリンクとするのは冗長にも思われますが，後でもう少し効率的な表現を考えます．

カライドサイクルに話を移す前に，リンク機構に関する重要な古典的結果として，ケンペ（Kempe）の定理を紹介します．

“One can design a linkage which will sign your name”

として知られるこの定理の主張は，任意の平面代数曲線の有界部分に対して，一部のジョイントを固定したときに，特定のジョイントがその曲線をなぞるような 1 自由度の平面リンク機構を構成できるというものです．[9] には二つの線分を描く機構の例が示されていますが，この定理に基づく構成の複雑さが実感できます．ケンペは 19 世紀にこの定理を示しましたが，証明に間違いがあり，最終的には 100 年後に正しい証明が与えられました [7]．ちなみにケンペは 4 色定理の提唱者としても知られており，やはり正しい証明には 100 年かかりました．ケンペは，誤りながらも優れた発想で問題提起や証明を試みる数学者だったようです．

グラフ G と辺の長さが与えられた時に，それを実現する頂点配置の全体 (のユークリッド空間の等長変換による同値類) を**配置空間**と呼びます．リンク機構にまつわる問題の多くは，この配置空間の言葉で表現することができます [3]．例えば，ある状態から別の状態に遷移できるかという問題は，配置空間の中の与えられた二点が道で結べるかと言い換えられます．このようにして，機構学の問いにトポロジーや幾何を使って答えることが可能になります．

配置空間は，辺の長さについての連立 2 次方程式の実数解集合として表され，その各解がリンク機構の具体的な状態に対応します．2 次方程式なので簡単そうに思われるかもしれませんが，なかなか手強い対象です．そのことは，よく研究されているリンク機構の一つである「平面 4 節リンク機構」からもわかります．この機構は，4 つのリンクが 4 つのジョイントで繋がった四角形の平面機構で，辺の長さによって様々な動きを生み出します．たとえば，全ての辺が等しい場合は平行四辺形となり，一対のリンクが連動して回転運動を行います． 一方で，長さの比を調整すると，片方が回転，もう片方が往復する「クランク・ロッカー機構」が現れます（図 5)．このように，同じグラフ構造でも，リンクの長さという連続的パラメータの違いによって，運動の性質が大きく変わるのです．平面 4 節リンク機構の配置空間は空集合，一点集合，円周，線分 (やその和集合) と様々なトポロジーを持ちます．*2．リンク機構を設計するという観点からは，グラフと辺の長さが設計変数になりますが，離散的であるグラフ

*2 ウェブページ `https://dynref.engr.illinois.edu/aml.html` では，平面 4 節リンク機構のインタラクティブなシミュレーションを試すことができます．

の方を固定すれば，連続的なパラメーターの最適化問題となります．後にお話しするカライドサイクルの設計では，この方針で特殊な動作をするものが見つかりました．

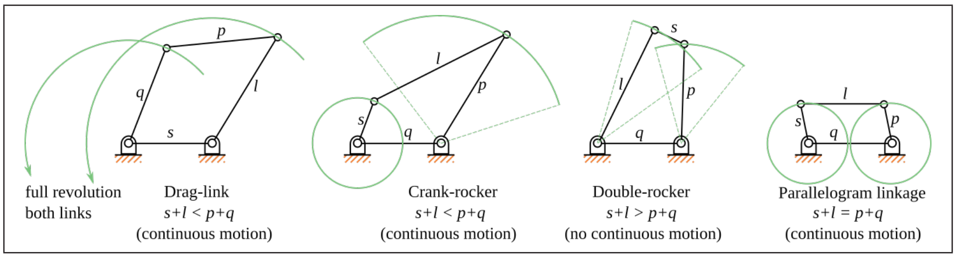

図 5　平面 4 節リンク機構 (画像は Wikipedia より．作者 Cdang, Salix alba, CC BY-SA 3.0)．運動の途中で辺が交差することも起きるが，現実的には各リンクが乗る平面を平行に少しずつずらすことで，自己交叉を避けるように設計される．

ところで，実は与えられたリンク機構の配置空間が空集合かどうか，すなわちその構造が実現可能かどうかを調べることさえ容易ではありません．例えば，辺の長さが与えられた多角形を 1 次元のユークリッド空間に実現する問題，つまり，多角形を直線に折り畳むことができるかという問題を考えてみましょう．折り畳むには，各辺を左に伸ばすか右に伸ばすか決めるわけですが，これは辺長の集合を和が等しくなるように 2 つの部分集合に分割する問題に帰着されます． この「分割問題（Partition problem)」は NP 完全であることが知られています．つまり，この問いに答える効率的なアルゴリズムを見つければ，ミレニアム懸賞問題である P = NP を解決したことになり，100 万ドルが手に入るわけです．

1.3　カライドサイクル

カライドサイクルが誰によってどのように発見されたか，私が調べた限りでは明確な起源を示す文献は見つかりませんでした．比較的古い文献の一つに [1] がありますが，初版には掲載されておらず，後の版で追加されたようです．広く知られるようになったのには，エッシャーの絵がプリントされた型紙が多数収録された書籍 [10] が大きく貢献したと思います．また現在では，天童智也さんという方がコンピュータグラフィックスを用いて多彩なカライドサイクルを制作しており，独創的なアイデアに富んでいて見飽きることがありません． Youtube で “The Variety of Kaleidocycles” で検索してみてください．

20 世紀初頭に活躍したブリカール (Bricard) という数学者は，今日 Bricard6R と呼ばれる，本質的にカライドサイクルと同じ構造を含む一連のリンク機構を考察しています (図 6 左)．ブリカールは動く幾何学的構造に関心を持っており，「ブリカールの 8 面体」という模型も作っています．これは，「凸多面体を，面を合同に保ったまま

変形することはできない」というコーシーの剛性定理と関連があります．「凸」という条件を外すと，面角だけが変化するフレキシブルな多面体が存在するのですが，ブリカールの 8 面体は，自己交差を許容するものの，このような可動多面体の最初の例を与えました．

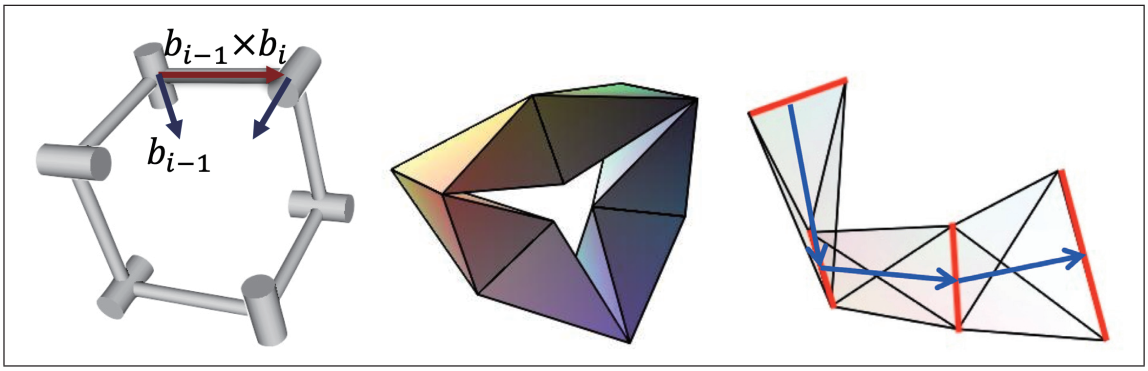

図 6　左：全てのリンクが合同である Bricard6R 機構の特別な場合．古典的なカライドサイクルと見なせる．中：古典的なカライドサイクル．右：カライドサイクルの中心線として得られる空間多角形の一部分を矢印で表示．この多角形は一つの平面に載るとは限らない．

カライドサイクルをリンク機構として理解するため，まず古典的な例（図 6 中央）を詳しく観察してみましょう． 以下のような特徴が見られます：

1. 偶数個（6 個, 8 個, 10 個, ⋯）の合同な四面体が連なっている．
2. 四面体は正四面体ではないが，各面は合同な三角形（等面）である．
3. 隣接する四面体は一つの辺ヒンジ (蝶番) として共有している．
4. ヒンジ辺は，それぞれの四面体において対辺の位置にある．
5. 各ヒンジ辺の中点を順につないでいくと空間多角形が得られる．
6. この中心多角形の各辺は，接続するヒンジと常に直交する（図 6 右）．

後半の二つは，すべての面が合同な「等面四面体」で構成されていることから従います．この性質に注目することで，カライドサイクルの自然な一般化が得られます．他にも一般化の可能性はありえますが，実はこの等面性から従う性質こそが，カライドサイクルを離散曲線としてモデル化できることや，ベネット機構 (Bennett’s linkage) という関連する機構の本質に繋がっているということで，その重要性が後から次第に分かってきました．運の良い着眼点であったと思います．

以降では，N を自然数として，N 個の合同な等面四面体でできたカライドサイクルを N-**カライドサイクル**と呼ぶことにします．古典的な 6-カライドサイクルは，ヒンジの役割を持つ四面体の対辺が 90 度捩れているという特別な場合です．$N = 6$ の場

合はこの 90 度捻れのものしか存在しないですが，$N > 6$ の場合は，捩れる角度を変えることで，様々な N-カライドサイクルが構成できます．対辺の捩れる角度は四面体の形で決まりますが，この角度が動きに大きく影響を与えることを後で見ます．

今日ここで実際にカライドサイクルを作ってもらえるように，工作キットをお配りします．ミシン目と差し込みのみで組み立て可能な設計で，ハサミも糊も不要です．このキットは，九州大学 IMI のリエゾン戦略部門というところにご協力いただき制作されました．以前小学生や中高生向けの講座でカライドサイクルを扱った時には，前日に人数分の紙を切り抜いておいたり，糊を用意したりと準備が大変だったのですが，このキットを使えば子どもでも 30 分程度で作ることができます．講演がつまらなくても，工作ができると大抵満足してもらえるので，その意味でも重宝しています．

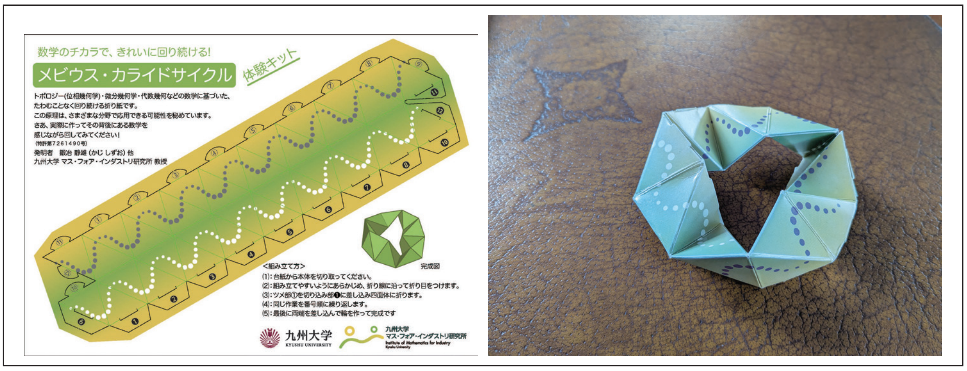

図 7　メビウス・カライドサイクル工作キット．左：ミシン目の入った厚紙製で，ハサミも糊も不要です．右：メビウスの帯になっていることがわかる模様が入っています．また後に §1.7 で触れるように，一自由度という特別な性質を持つように設計されています．

カライドサイクルの設計には，四面体の形と個数という 2 つのパラメータが関与します．ここでは，すべての四面体が等面であると仮定しているため，その形状は面となる三角形によって一意に決まります．注意点として，たとえば 6 個の正四面体ではカライドサイクルは構成できません．隣接するパーツが干渉してしまうためです．しかし，ヒンジに相当する辺を短くして「細長い」四面体とすることで，物理的な衝突を回避できます．このような修正を加えても，リンク機構としての運動構造自体には変化がなく，本質的には同じ動作が維持されるため，以下では衝突の問題は考慮しないことにします．さらによく考えてみると，カライドサイクルの構造はヒンジの相対的な配置，すなわち隣接ヒンジ間の距離と捩れ角度だけで決まることが分かります．ですから，四面体である必要はなく，隣り合うヒンジの位置関係を固定するものであれば，捩れた板やその他の形状で代用しても良いわけです．キャラクターが手を繋いで輪になっているデザインも楽しいかもしれません．

以上の注意から，カライドサイクルの状態は，ヒンジが定める直線の向きの情報で決まることが分かります．ヒンジ間を結ぶ最短線分は，隣り合うヒンジの方向の外積でかけるため，ヒンジの方向ベクトルさえ決まれば，(スケールと平行移動の不定性を除いて) ヒンジ辺の位置が定まります．つまり，2 次元球面 S^2 上の順序づいた点の配置 $b_0, b_1, \ldots, b_N \in S^2$ を用いて，

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sum_{i=1}^{k} (b_{i-1} \times b_i) \\ x_{2k} &= \gamma_k + \epsilon b_k \\ x_{2k+1} &= \gamma_k - \epsilon b_k \end{aligned} \tag{1}$$

とカライドサイクルの $2N$ 個の頂点座標 x_k を書き下すことができます．ここで 2ϵ はヒンジ辺の長さですが，これはカライドサイクルの構造には影響しません．中心多角形の頂点が γ_k で，$\gamma_0 = 0$ とすることで平行移動による不定性を除いています．

S^2 上の点の配置がカライドサイクルの状態に対応するためには，次の条件 (☆)

1. 閉じる条件：$b_0 = \pm b_N$， $\sum_{i=1}^{N} (b_{i-1} \times b_i) = 0$
2. 一様捩れ角条件：定数 c が存在して，内積 $\langle b_i, b_{i+1} \rangle = c \quad (0 \le i < N)$

が成り立つことが必要十分です．条件 1 は，一箇所でヒンジ辺を切り，輪を開いた状態で考えておいて，一周回って 0 番目と N 番目のヒンジが重なって閉じる，ということを表しています．外積の総和が 0 になるという式は，中心の最短線分を繋いでできる曲線が閉じる，つまり中心多角形が取れることに対応します．ここで，ヒンジの向きが反転して $b_0 = -b_N$ として閉じる場合は，捩れた板で作るとメビウスの帯になります．条件 2 は，四面体が合同なので，隣り合うヒンジのなす角度（捩れ角）がどこでも一定であるということを表しています．定数 $c = \cos \mu$ は捩れ角 μ の余弦で，四面体の形状から決まる，カライドサイクルの設計パラメータです．

上述の 2 条件はいずれも 2 次式で表されるため，カライドサイクルを構成することは，連立 2 次方程式の実解を求めることに帰着されます．したがって，「どのような四面体の形（すなわち捩れ角）に対して，N-カライドサイクルが存在するか」という問いは， 捩れ角 μ を固定したときに，この方程式系が実解を持つかどうかという形に定式化されます．そして，実解の空間である配置空間上の連結成分一つ一つが，動かして互いに移り合えるカライドサイクルの状態の集合に対応します．

1.4 離散的な曲線

カライドサイクルに連立方程式の実解という代数的な実体が与えられましたが，次に空間閉曲線の離散化という幾何的な姿も見てみようと思います．

まず，空間曲線のことを思い出します．可微分な写像 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ であって，速度も加速度も 0 にならないようなものを考えます．各時刻 $t \in \mathbb{R}$ において，速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ と加速度ベクトル $\ddot{\gamma}(t)$ の両方に直交するベクトルを陪法線ベクトルというのでした．折れ線からなる空間多角形 $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$ に対して，微分を差分に置き換えて

$$\dot{\gamma}_i = \gamma_{i+1} - \gamma_i, \quad \ddot{\gamma}_i = \dot{\gamma}_i - \dot{\gamma}_{i-1}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

とします．式 (1) で表されるカライドサイクルの中心多角形 γ_i では，辺ベクトル $\dot{\gamma}_i$ と，そこに接続するヒンジは直交するのでしたから，

$$\dot{\gamma}_i \perp b_i, \quad \ddot{\gamma}_i \perp b_i$$

が成り立ちます．すなわち，b_i が陪法線ベクトルの離散的なアナロジーになっています．

多角形の頂点の角度 $\kappa_i = \angle \dot{\gamma}_{i-1}\dot{\gamma}_i$ は，曲線の曲率に対応し，ヒンジ間の捩れ角 $\mu = \angle b_{i-1} b_i$ は，曲線に沿った陪法線の回転，すわなち捩率に対応します．ここで，κ_i はヒンジの向き b_i に対して右ネジの向きを正として，符号付きで考えることにします．なお，四面体が全て合同であるため，捩れ角 μ は i に依らず一定です．

中心多角形の辺は全て同じ長さですから，空間曲線が曲率と捩率で (合同を除いて) 決まるという事実のアナロジーで，

カライドサイクルは各ヒンジにおける曲率と捩率でその状態が決まる

ことが分かります．このうち，捩率 μ は四面体の形から与えられる設計パラメータで固定されているため，カライドサイクルの運動は，曲率の時間変化で記述されることになります．これは，捩率一定曲線の，長さと捩率を保った変形ということができます．

カライドサイクル	離散閉曲線
全四面体が合同	辺長と捩率が一定
状態	曲率で指定される
配置空間	連立二次方程式の実解
運動	等長かつ捩率保存の変形
クルクル運動	半離散 mKdV 方程式

表 1　カライドサイクルと離散曲線の対応

1.5　カライドサイクルの存在

条件 (☆) が一次元以上の実解空間を持つことを示すことができれば，動くカライドサイクルの存在が言えたことになります．

ここでカライドサイクルの存在は後回しにして，仮に存在したとするならば，その動きはどのような性質を持つか，という問いから出発します．これには，実際に多数の模型を作って実験と観察を繰り返すという，アナログな手段で挑みました．特に注目したのは，カライドサイクルの中心多角形の動きです． 観察の結果，どうやら「全ての頂点が，ヒンジと直交する平面内を進む」という運動をすることを見つけました．逆にこの仮定のもとで，辺長と捩率を保つ多角形の変形を考えてみると，そこに mKdV 方程式というよく知られた可積分な偏微分方程式との関連が現れました ([5])．空間方向は多角形なので離散化され，時間方向は連続なままなので，半離散 mKdV 方程式という差分-微分混在の方程式になります．おもちゃの解析から由緒ある数理構造が浮かび上がるのは面白いところです．とはいえ，連続曲線の変形でも mKdV 方程式が現れるので，それほど不思議ではないとも言えます．

ただし，観察からこの特別な性質を持つ運動を見つけるのは簡単ではありませんでした．というのも，空間全体を回転・平行移動させる合同変換は無視して，本質的な「クルクル運動」のみを抽出する必要があるからです． しかし，空間に固定された座標系の取り方は一意ではなく，座標に依存しない方法（たとえば曲率の時間変化）に注目すると，「ヒンジと直交する平面」という空間的な情報を扱いづらくなります．

さらに，カライドサイクルは回転運動だけでなく，たわみやねじれなど多様な自由度を持つため，その運動全体を単純に記述することは困難です．この問題に対しては，後で述べる一自由度を持つ特別なカライドサイクルが先に発見された，という幸運がありました．一自由度ではクルクル運動だけをするので，その運動だけに注目できるわけです．

さて，攻略の糸口が見えてきました．曲線の変形と可積分系の関係については，たくさんの先行研究があります．特殊関数を用いて解を具体的に構成しようというのが一つの方針です．しかし，これは手こずりました．連続曲線についての似たような問題に対しては，楕円関数による明示解が知られているのですが，なかなかうまく離散化できません．そこで運良く強力な助けを得ることができました．共同研究者の九州大学の梶原健司さん，そして当時その学生で，現在は九州大学助教の重富尚太さんが，ヤコビのテータ関数を用いて解の構成に成功したのです [6]．重富さんはテータ関数の満たす恒等式を駆使して解を作り上げました．得られた式が正しい解であることは機械的に検証可能ですが，作り方は発見的で，何度か本人に秘訣を教えてもらおうとし

たのですが，私には分かりませんでした．

図 8 に示すのは，このテータ関数によって構成された明示解に対応するカライドサイクルの例です． 右図のように，中心多角形が結び目を形成するようなものも得られます．図中の構造はぶつかることなく回すことができますが，今回の定式化では自己交叉は考慮していないので，一般には結び目型が運動中に保存されるとは限りません．どのような結び目型がカライドサイクル・捩率一定の離散曲線で実現されうるかという問題も面白いと思います．カライドサイクルの配置空間の連結成分，つまり切り開かなければ互いに移り合えないカライドサイクルの種類を分類するという問題も考えられます．

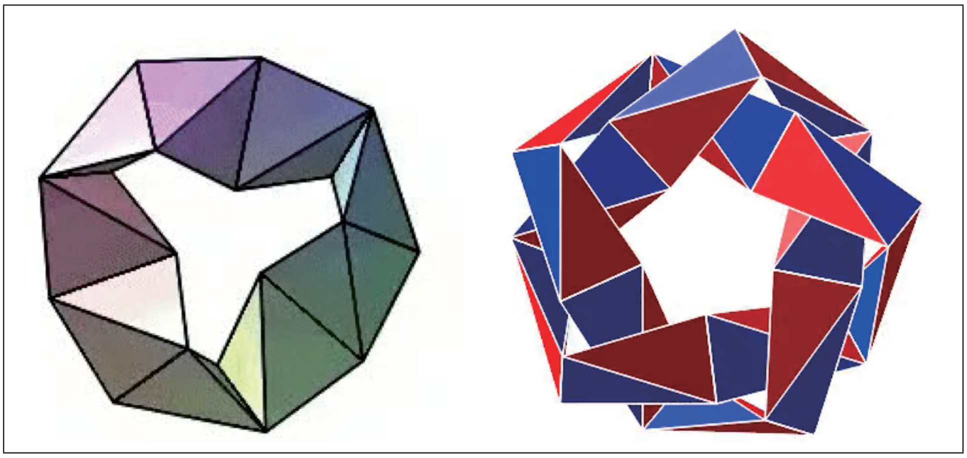

図 8　明示解で構成されるカライドサイクル．左：9-カライドサイクル．右：15-カライドサイクル．

1.6　保存量

カライドサイクルは存在するのか，動くのか，という問いにはめでたく答えることができたのですが，その過程で可積分系が出てきましたので，その観点からもう少しカライドサイクルの性質を調べてみましょう．可積分系には保存量が存在するので，何か物理的に意味のある保存量を探すのは面白そうです．

カライドサイクルの実現は中心多角形で決まり，捩率が一定なので，動きは時間を変数とする曲率の列 $(\kappa_1, \ldots, \kappa_N)$ で表されるのでした．曲率の関数といえば，まず弾性エネルギー $\sum_{i=1}^{N} \kappa_i^2$ が思い付きます．これは連続曲線に対して定義される曲率の自乗積分を，安直に和分にして離散化したものです．物理的には，フックの法則の成り立つ範囲で，各ヒンジに (洗濯バサミで使われているような) ねじりコイルばねを取り付けた際のポテンシャルエネルギーとみなすことができます．

たくさん数値実験をしてみると，この値が長時間にわたってほとんど一定に保たれ

ます．やった！と一旦は喜ぶのですが，よく見るとわずかに振動しているのです．とても惜しくて，計算誤差と信じたいのですが，精密にやればやるほど振動がはっきりとしました．実は，単純に積分をシグマに変えるという離散化がまずかったのでした．離散曲線の弾性エネルギーについては，先行研究でいくつかのバリエーションが知られているのですが，中でも Bobenko と Suris [2] による定義

$$\sum_{i=1}^{N} \log\left(1+\tan^2(\kappa_i/2)\right)$$

を採用すると，mKdV に従う運動によって厳密に保存されることが示せました．この手のものは，候補となる量が見つかってしまえば，それが保存量となることを証明するのは簡単です．

連続の場合に知られていることのアナロジーを離散で考えるとき，連続極限では一致するけれど，離散の段階では同値でない対応物が複数あるというのは良くあることで，状況に応じて適切なものを選ぶのは難しくも楽しいところです．

弾性エネルギーが保存量であるということは，運動中にポテンシャルが一定値を取ることを意味します．つまり，理想的に摩擦などの損失がなければ，カライドサイクルを軽く押すと永久に回転し続けるということになります．強力なバネを取り付ければ，局所的に見ると強く戻ろうとする大きな力が働きますが，全体としてはそれらの力が打ち消し合い，小さな力でまわるというのが不思議です．

もう一つの保存量として，「捻り数」があります．これは，四面体でなく図 9 に示すような捩れた板でカライドサイクルを構成すると直感的に理解しやすくなります． 捻り数は「半捻りを 1 と数えるとして，帯が何回捻られているか」を整数値で表す量であり，連続的な運動中に変化しない不変量です．捻り数は 2 つの要素に分解でき，1 つはヒンジの捩れ角度 μ の総和 $n\mu$，もう 1 つは曲線自体のうねりを表すライジングという量です．それぞれは実数値を取りますが，その和を π で割ったものは整数値になり (Călugăreanu-Fuller-White theorem)，この偶奇が条件 (☆) の最初の等式の符号に対応します．図 9 では捻り数 3 で，3 回捻りのメビウスの帯になっています．

捻り数はヒンジの捩れ角度だけで決まるようにも思えますが，曲線が 3 次元的にうねりをもつため，その形から決まるライジングにも依存するわけです．例えば，$N=6$ で $\mu=\pi/2$ の古典的なカライドサイクルでは，ヒンジの捩れ角度の総和は 3π，ライジングは 0 です．ライジングが 0 であることは，運動の途中で中心多角形が平面上に載る瞬間があること，平面曲線のライジングは 0 であることから分かります．一方，図 9 右の $N=9$，$\mu\approx 0.301\pi$ の例では，ライジングはおよそ 0.291π です．捩れ角の総和は $n\mu\approx 2.709\pi$ でこれだけでは捻り数 3 に満たないのですが，ライジングが足りない捻りを補っています．$N=9$ の場合は，例えば $\mu=\pi/2$ のカライドサイクルも存

在します．

カライドサイクルではヒンジの捩れ角は一定なので，捻り数が保存することからライジングも保存されることが分かります．捻り数が整数値となるのは，カライドサイクルが閉じていることが本質的ですから，ここでは位相的な制約が形状の性質を規定していると言えます．

それに関係して，不思議な未解決の予想があります．カライドサイクルは，一定の捩れ率を持つ帯の離散化とみなすことができます．連続の場合は，一定の捩れ率を持つ１回捻りのメビウスの帯が存在することが知られていますが，この離散化ではそのようなものは作れなさそうです．

予想：１回あるいは２回の捻り数を持つカライドサイクルは存在しない．

このことは証明はできていませんが，たくさんの数値実験から，少なくとも中心多角形が自明な結び目型を持つ場合には正しいであろうと信じています．離散と連続の違いが顕在化する興味深い現象と思います．

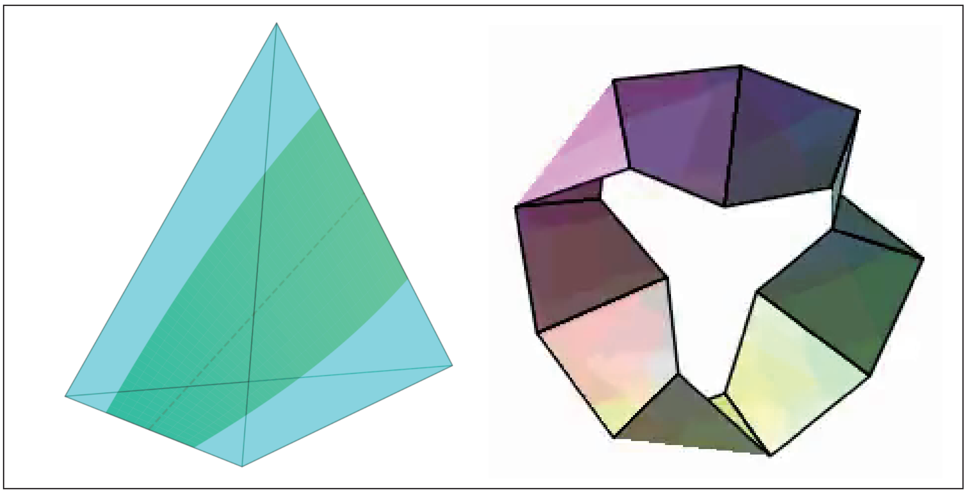

図９　四面体の代わりに，同等の捩れた帯状の板を用いてカライドサイクルを構成できる．左：四面体と対応する捩れた帯状の板．右：図８左を捩れた板に置き換えたもの．３回捻られたメビウスの帯をなしているのが見て取れる．

1.7　一自由度の発見と特許化

リンク機構の一種，あるいは折り紙のおもちゃであるカライドサイクルが，ひょんなことから研究の対象となったのですが，さらに思いがけないことに特許 [14] にもなりました．それは，設計パラメータである捩れ角をうまく選ぶことで，劣決定ながらも一自由度であるという特別な性質を備えたリンク機構として実現できる，という (証

明はできていない) 観察に基づいています．

リンク機構では，動きの自由度という基本概念があります．ロボットアームでは，各ジョイントに接続方向といったパラメータがあり，例えば回転軸を持つヒンジタイプのジョイントであれば，一つにつき一自由度を持ちます．複数のジョイントを組み合わせて高い自由度を持たせることで，さまざまな動作ができるようになります．

一方，地図で用いられるミウラ折りは，端点を引っ張れば一意的に動作が定まり，スムーズに広げたり畳んだりできるわけですが，これはミウラ折りが，一つ一つの折れ線がヒンジとして働くリンク機構として見れば，一自由度を持つという性質に由来します．狙った通りの動作をさせたければ，一自由度に設計すると良いわけです．

リンク機構においては，全てのジョイントのパラメータを決めることでその状態が規定されるので，単純な機構では，その自由度は全てのジョイントの自由度の総和になります．リンク機構にループが存在する場合には，各ジョイントが独立に動くことができずに自由度が下がります．つまり，全てのジョイントのパラメータの総数から，拘束条件としての方程式の数を引き，さらに全体の並進・回転自由度を除くことで自由度を見積もることができます．

N 個の四面体からなる N-カライドサイクルでは，ジョイント数は $2N$，リンク数は $5N$ です．各ジョイントは 3 次元空間上の点として 3 自由度を持つため，変数の総数は $3 \times 2N = 6N$ 個になります．一方，$5N$ 本のリンクはそれぞれ固定長を保つ拘束条件として $5N$ 本の方程式を定めます．したがって，残りの自由度は $6N - 5N = N$ となりますが，この中には剛体運動（平行移動 3，自由回転 3）の 6 自由度が含まれるため，実質的な自由度は $N - 6$ と見積もられます．これは，ヒンジ一つあたり一自由度で，$N - 1$ 個のヒンジの角度を決めたとき，最後の一つが最初のヒンジに重なるために，位置の 3 自由度と方向の 2 自由度の合わせて 5 自由度失うとしても理解できます．

このような見積もりは，Chebyshev–Grüebler–Kutzbach 公式[*3]と知られ，方程式系が冗長でないといった仮定においてのみ成り立ちます．成り立たない場合も多く，たとえば捩れ角 $\mu = 0$ のカライドサイクルは平面多角形と同値ですが，その場合の自由度は $N - 3$ になります．また，古典的な捩れ角 90 度で $N = 6$ のカライドサイクルでは，対称性に由来する冗長性のため，見積もりより多い自由度 1 を持ちます [4]．この 6-カライドサイクルのように，見積もりよりも大きな自由度を持つ機構は「過剰決定」と呼ばれますが，冗長な辺を加えることでも作ることができるので珍しくありません．一方で，見積もりより小さな自由度を持つ「劣決定」と呼ばれる機構はあまり知られていません．配置空間を定める方程式系で，複素数解の次元よりも実解の次元が下がる場合に対応します．

[*3] この Chebyshev はチェビシェフの不等式のパフヌティ・チェビシェフ

平面４節リンク機構では，辺の長さというパラメータを変えることで，配置空間のトポロジーが変化しました．カライドサイクルにおいても，設計パラメータであるヒンジ数 (四面体の数)N と捩れ角 (四面体の形)μ を変化させることで，配置空間のトポロジーが変化することが期待されます．

条件 (☆) において，一定捩れ角を表す内積の値 c を定数ではなく変数とした系を考えます．この上の $(b_0, \ldots, b_N) \mapsto \langle b_0, b_1 \rangle$ という写像に対して，その特定の値 c に対する逆像が，捩れ角 c を持つカライドサイクルの配置空間に対応します．何か面白いことが起きるとすれば，この写像の特異点に対する逆像においてであろうと想像するのは自然です．そこで，できる限り小さい捩れ角でカライドサイクルを作ることを考えます．もちろん，捩れ角 0 とすると平面機構と同値になって面白くないので，メビウスの帯 $b_0 = -b_N$ となる中で，できるだけ小さな捩れ角を持つカライドサイクルを作ることを考えます．全体としてメビウスの帯として捻れるためには，各ヒンジにおいて少しずつ捻れている必要があるわけですが，その捩れをなるべく小さく設計して，「最小捩率のメビウスの帯」を考えるわけです．

この値を正確に求めるためには，条件 (☆)(かつ $b_0 = -b_N$) が実解を持つ「判別式が正」に対応する条件を導ければ良いのですが，これは原理的には Tarski–Seidenberg の定理により可能である一方で，現実的に求めるのは困難です．そこで，N を固定して，条件 (☆) のもとで c を最大化するという制約付き最適化問題として数値解を求めました．こうして配置空間を数値的に追跡したところ，もくろみ通りに，それが１次元となることが観察できました．つまり，どんな $N \geq 6$ に対しても，一自由度を持つカライドサイクルがこうして構成できると予想されます．（$N < 6$ の場合は制約を満たす解が存在しません．）ちなみに，こうして得られた最小捩率のメビウスの帯は捻り数３となるようで，先に §1.6 で述べた予想とも整合します．

工作キット（図７）では，まず一列に連なった四面体を作って，それを最後に輪っかになるように繋げます．もし四面体の捩れが小さすぎると，メビウスの帯状に閉じることはできません．そのように閉じることができるようなギリギリの捩れ角で設計された四面体を用いると，完成したカライドサイクルは一次元自由度をもち，クルクル運動のみをするというわけです．一自由度なので，たわむことなく滑らかに動き，気持ちよく回るので，操作がしやすく効率もよいという利点があります．実際，工作キットは一自由度を持つように設計されています．

機構学的には，劣決定ながらも一自由度を持つというリンク機構を ($N > 7$ の任意のヒンジ数で) 見つけることができたことになりますが，私の知る限り，他にこのような例は存在しません．この珍しい機構には，メビウス・カライドサイクルという名前をつけました．

このメビウスカライドサイクルはまた，§1.5 で触れた明示解，§1.6 で扱った弾性エ

ネルギーを最小化するものとしても特徴づけられそうだということが，数値実験から期待されていて，面白い性質が交差する対象になっていそうです．

さて，一自由度であることは証明はできておらず数学の論文にはならないのですが，応用的価値があるので特許にはなりえます．特許も明細書という文章で発見を説明をするのですが，権利を主張するという点で目的が異なり，論文を書くのとは違った難しさがあります．特許は出願した後，審査があり，大抵一旦は拒絶され，修正して最終的に認められると，晴れて登録されます．出願や登録には数十万円単位でお金がかかり，登録後も維持費がかかります．こうして手間暇とお金をかけて手に入れた特許，使用料収入があるかというと，今のところゼロです．いくつかの企業に営業をしたのですが，ライセンス契約に至るには高いハードルがありそうです．

特許取得により大学からプレスリリースが発行され，それを見た新聞社からの取材や，オンラインテレビ番組にも取り上げられるなど，これまで経験のなかったことが立て続けに起こりました．一方で，この研究では色々とトラブルにも見舞われることもありました．その際には國府寛司さんをはじめ，多くの方に助けていただいて，科学コミュニティーの温かさを感じました．この場をお借りしてお礼申し上げます．

1.8 終わりに

カライドサイクルの研究は，リンク機構，空間曲線，可積分系といった様々な分野と繋がり，予想外の展開を見せました．最初は遊びのつもりで研究になるとは思っていませんでしたが，4 年生の卒業研究のテーマとして取り組んだことがきっかけとなって，様々な発見がありました．一自由度の証明を含めて，まだまだ解決すべき問題が山積みで，当分は楽しめそうです．もし興味を持ってくださった方がいらしたら，少し古いですが解説記事 [13, 12] や講演の録画*4もご覧いただければ幸いです．

ここまで，運良くという言葉が何度か出てきましたけれど，改めて研究とは幸運と時々不運の連続と感じました．私はもともと数学の応用に興味があり，10 年ちょっと前にコンピューター・グラフィックス (CG) の研究に誘っていただいたのがきっかけで，応用分野に足を踏み入れました．数学と CG には似たところがあると感じています．自然科学は現象を正確に記述することが目標ですが，数学は面白ければ何でもありです．人をびっくりさせることも目的の一つですが，これは CG も同じで，価値観において数学と CG の感覚はかなり近いように感じます．CG を含めて応用研究の良いところは，研究成果が直接的に目に見える形で表れることです．数学の研究では，自分の研究内容を他人に伝えるのが難しいことが多いですが，折り紙や映像という形で，子どもにもその面白さを伝えられるのは嬉しいです．これからも，驚きや楽しさ

*4 https://www.youtube.com/watch?v=N8z3nhPQKYo

に満ちた研究を続けていければと思います．

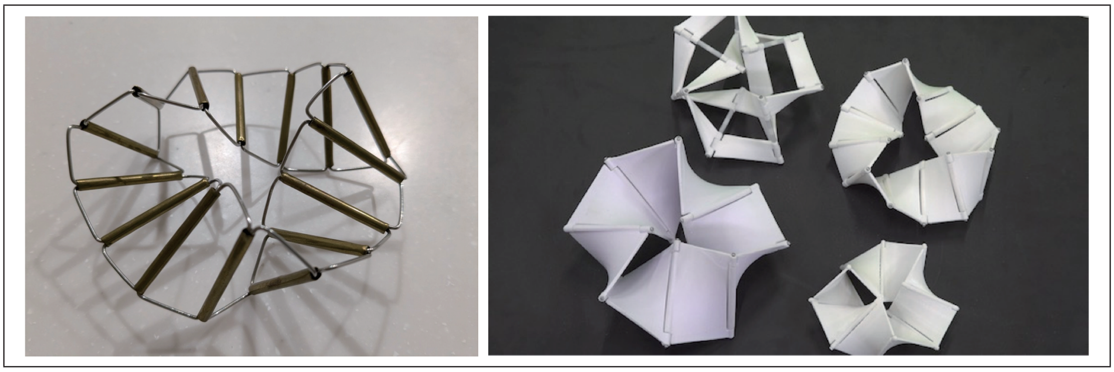

図 10　一次元自由度を持つ，メビウス・カライドサイクル．左：幾何学おもちゃ作家・西原明さんに制作いただいた針金製．右：3D プリンタによる模型．データファイルは `https://github.com/shizuo-kaji/Kaleidocycle/` で入手可能．

2　質疑応答

- 質問：特許を取得されたとのことですが，明細書を書く際に苦労された点はありましたか？
- 回答：はい，特許では「一自由度」というような一般的な性質を述べるだけでは不十分で，それに基づく実用的な価値を主張する必要がありますが，これがなかなか難しく，最終的には「新しいおもちゃ」という扱いにしました．おもちゃというカテゴリであれば，何 % の効率改善といった数値的な裏付けがなくとも通りやすいからです．おもちゃ以外の応用の可能性としては，スムーズに連続的に回転できることを活かしたスクリュー構造や，「falling cat」として知られる，角運動量を保存したまま自らの姿勢を変える運動（落下中の猫が足から着地できる現象）を活かした宇宙アンテナなどがあると思います．しかし，それらを特許のクレームに含めるには，実現可能性を具体的に示す必要があるため，今回は断念しました．
- 質問：弾性エネルギーの離散版について，連続の場合はピアノ線を曲げた時のようなエネルギーが表現されているのでしょうか？
- 回答：はい，関連があります． ピアノ線のような細い弾性体では，曲率によるエネルギーだけでなく，中心線の (捩率とは別の概念である) 断面の捩れからくるエネルギーも重要になります． これは「キルヒホッフ棒」と呼ばれるモデルで表され，その離散化が研究されており，カライドサイクルとも関連が見出されつつあります．

- 質問：応用を探す時には，現実的な狙いが先にあり，それを実現する構成を与えるという流れになるのでしょうか．
- 回答：カライドサイクルの場合は，むしろ逆でした． 特定の応用を狙って設計したのではなく，数値実験や模型制作を通して思いがけない性質を発見したという流れです． 「狙って作ったもの」ではなく「たまたま作ってみたら面白かったもの」が出発点で，この性質を活かせる応用を今も模索しています．

3　ご挨拶

この原稿を書いている時点ではまだ福岡にいるのですが，2025 年 4 月より京都大学理学研究科に着任することになりました．附属サイエンス連携探索センター (Center for Science Adventure and Collaborative Research Advancement, 略称 SACRA) というところの所属になります．山口大学創成科学研究科，九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (IMI)，そして SACRA と，これまで不思議な響きの職場に縁があるようです．新しい環境で，これからも楽しく研究や教育を続けて行きたいと思います．どうぞよろしくお願いします．

参考文献

[1] W. W. Rouse Ball **and** H. S. M. Coxeter. *Mathematical Recreations & Essays*. 12th. University of Toronto Press, 1974. ISBN: 9781442656529. DOI: 10.3138/9781442656529.

[2] A. I. Bobenko **and** Yu. B. Suris. “Discrete Time Lagrangian Mechanics on Lie Groups, with an Application to the Lagrange Top”. *Communications in Mathematical Physics* 204-1 (1999), **pages** 147–188.

[3] Erik D. Demaine **and** Joseph O’Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.

[4] P. W. Fowler **and** S. D. Guest. “A symmetry analysis of mechanisms in rotating rings of tetrahedra”. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 461-2058 (2005), **pages** 1829–1846. DOI: 10.1098/rspa.2004.1439.

[5] Shizuo Kaji, Kenji Kajiwara **and** Hyeongki Park. “Linkage Mechanisms Governed by Integrable Deformations of Discrete Space Curves”. **in**: *Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures*. **volume** 2. CRC Press, 2019, **pages** 356–381. DOI: 10.1201/9780429263743.

[6] Shizuo Kaji, Kenji Kajiwara **and** Shota Shigetomi. *An explicit construction of Kaleidocycles by elliptic theta functions*. 2023. arXiv: `2308.04977`.

[7] Michael Kapovich **and** John J. Millson. "Universality theorems for configuration spaces of planar linkages". *Topology* 41-6 (2002), **pages** 1051–1107.

[8] Aaron M. Olsen. "A mobility-based classification of closed kinematic chains in biomechanics and implications for motor control". *Journal of Experimental Biology* 222-21 (2019).

[9] Anupam Saxena. "Kempe's linkages and the Universality Theorem". *Resonance* 16-3 (2011), **pages** 220–237. ISSN: 0973-712X. DOI: `10.1007/s12045-011-0028-x`.

[10] D. Schattschneider **and** W. Walker. *M. C. Escher Kaleidocycles*. Tarquin Publications, 1982. ISBN: 9780906212288.

[11] Lloyd N. Trefethen. "Numerical Computation of the Schwarz–Christoffel Transformation". *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 1-1 (1980), **pages** 82–102. DOI: `10.1137/0901004`.

[12] 鍛冶静雄. "かたちを算する - おもちゃのかたち". **数学セミナー** *2021* **年** *1* **月号** (2021).

[13] 鍛冶静雄. "数理のクロスロード 第 18 回，かたちと動きの数理基盤 (1) リンク万華鏡". **数学セミナー** *2019* **年** *6* **月号** (2019).

[14] 鍛冶静雄, J. Schönke, E. Fried **and** M. Grunwald. "メビウスのカライドサイクル". 特許 7261490. (特願 2018-33395, 2018 年 2 月 27 日出願). 2023.