京大数学教室の貴重書

名誉教授 上野 健爾

はじめに

数学教室図書室には数学の歴史上重要な働きをした沢山の貴重書があるがそのほとんどが知られていない．本稿では貴重書コレクションの一部を紹介し大学での数学の教育に積極的な活用を訴えたい．

［編集室より］　貴重書は，図書室地下の湿度・温度管理がなされている貴重書保管室で 14 の保管庫に分けて収納され，各保管庫には特注の樟脳が置かれ防虫がなされている．

上の写真は第 13 保管庫を開けた様子である．本それぞれは，隣とくっ付くのを防ぐとともに，保護のためパラフィン紙でカバーされている．本の上部から出ている白い髯のようなものは，蔵書点検用の資料発行票である．点検の折，いちいち本を取り出して開けるのを避けるための紙の札である．

中段左から 9 番目の，サイズが小さめでかつ薄めの本が John Napier の “Mirifici logarithmorum Canonis descriptio” である．

目次

1　ギリシア数学　47
1.1　エウクレイデス『原論』 47
1.2　アポロニオス『円錐曲線論』 48
1.3　アルキメデス 48
1.4　ディオファントス『数論』 49

2　3 次方程式の解法　50
2.1　カルダノ『アルス・マグナ』 51

3　ガリレオ・ガリレイ『新科学対話』　52

4　ネピア『対数の驚くべき体系の叙述』　53

5　微積分学の建設　56
5.1　カヴァリエリの原理 56
5.2　ニュートンとライプニッツによる微積分の建設 56
5.3　ベルヌーイ兄弟 59
5.4　ヤコブ・ベルヌーイ著『推測術』と関孝和著『括要算法』 59
5.5　ラクロワの微積分の教科書 61

6　オイラー　62
6.1　オイラー『無限解析入門』 62
6.2　オイラーの変分法 64
6.3　ラグランジュ 66

7　コーシー『微積分学要論』　66

8　ヤコビ　67
8.1　ヤコビ『楕円函数原論』 67

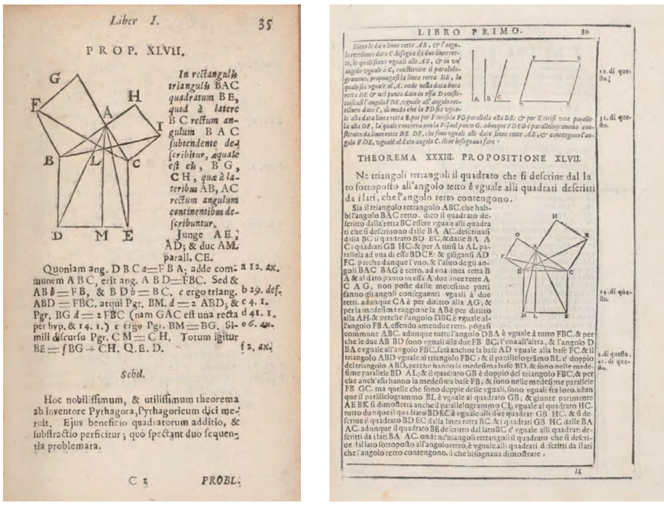
9　代数函数論の誕生　68
9.1　ヤコビの逆問題 68
9.2　ローゼンハインとゲーペル 69
9.3　リーマンのアーベル函数論 70

10　行列式と終結式　71
10.1　関孝和の終結式の理論 71
10.2　ベズーの終結式の理論 73

1　ギリシア数学

ギリシア数学といえばエウクレイデス (ユークリッド) の原論，アポロニオスの円錐曲線論，およびアルキメデスの優れた業績を挙げなければならない．そして，近世に大きな影響を与えた書としてディオファントスの『数論』をあげなければならない．これらについて貴重書コレクションとの関係で取り上げたい．

1.1　エウクレイデス『原論』


Liber I. 35

PROP. XLVII.

In rectangulis triangulis BAC quadratum BE, quod à latere BC rectum angulum BAC subtendente describitur, æquale est eis, BG, CH, quæ à lateribus AB, AC rectum angulum continentibus describuntur.

Junge AE, AD; & duc AM. parall. CE.

Quoniam ang. DBC a= FBA; adde communem ABC, erit ang. ABD=FBC. Sed & AB b= FB, & BD b= BC. c ergo triang. ABD = FBC. atqui Pgr. BM. d = 2 ABD; & Pgr. BG d = 2 FBC (nam GAC est una recta per hyp. & 14. 1.) e ergo Pgr. BM = BG. Simili discursu Pgr. CM = CH. Totum igitur BE = f BG + CH. Q.E.D.

a 12. ax.
b 29. def.
c 4. 1.
d 41. 1.
e 6. ax.
f 2. ax.

Schol.

Hoc nobilissimum, & utilissimum theorema ab inventore Pythagora, Pythagoricum dici meruit. Ejus beneficio quadratorum additio, & substractio perficitur; quò spectant duo sequentia problemata.

C 2　*PROBL.*

LIBRO PRIMO.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLVII.

Ne' triangoli rettangoli il quadrato che si descriue dal lato sottoposto all'angolo retto è vguale alli quadrati descritti da i lati, che l'angolo retto contengono.

図 1　左の Barrow によるラテン語訳では数学記号を使って証明を見やすくしている．右はイタリア語訳『原論』の該当箇所．

エウクレイデス (ユークリッド) の『原論』が数学に与えた影響については述べるまでもないであろう．貴重書コレクションには『原論』に関係して二書が収録されている．

一つは『原論』の Federico Commandino(1509-1575) によるイタリア語訳である．

Federico Commandino 訳: “De gli elementi d’Euclide libri quindici: con gli scholii antichi” [2nd ed.], 1619

最初のイタリア語訳は 3 次方程式の解法で有名なタルタリアによって行われた．本書は二番目のイタリア語訳の再版である．

今ひとつは Newton の先生であったとも言われている Issac Barrow(1630-1677) によるラテン語訳である．

Barrow, Isaac 編集: “Euclidis elementorum libri XV,” London, 1678.

Barrow は後に『原論』の英訳も行っている．Barrow の翻訳の特徴は，『原論』の字義通りの翻

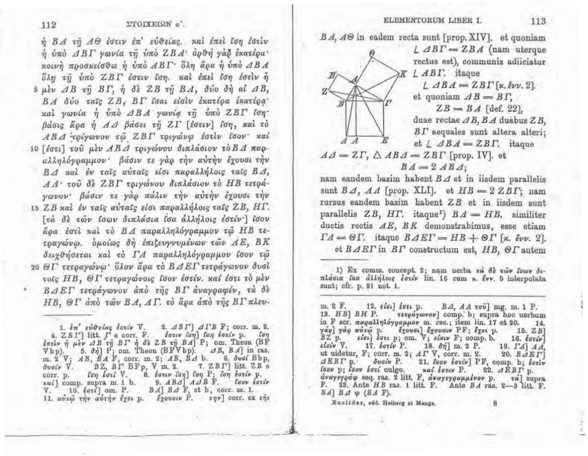


図 2　ハイベアによる『原論』巻 1 命題 47 のギリシア語原文とラテン語訳．ラテン語訳は Barrow 以降の近代的表記に書き換えられている．

訳ではなく，言葉による説明ではなく記号を使って証明している点であり，その後の幾何学の記述に大きな影響を与えた．

なお，ハイベア (Johan Ludvig Heiberg, 1854–1928) の校訂・編集によるユークリッド全集に収録された『原論』が長い間定本として使われてきた．このユークリッド全集は図書室に収蔵されている．

1.2　アポロニオス『円錐曲線論』

アポロニオスの『円錐曲線論』は数学だけでなく，近世の天文学，物理学の発展に大きな影響を与えたことでも知られている．貴重書コレクションではハレー彗星で有名な Edmond Halley(1656–1742) によってイギリスで出版されたギリシア語とラテン語対訳の『円錐曲線論』が収録されている．

Edmon Halley 編, Apollonius of Perga :“ Apollonii Pergæi conicorum libri octo, et Sereni Antissensis De sectione cylindri & coni libri duo,” Oxford, 1710.

アポロニオスの『円錐曲線論』だけでなく，セレニウスの『円柱切断』との合本になっている．

その他にアルキメデスの全集と合本になっている『円錐曲線』も収録されている．

1.3　アルキメデス

近世ヨーロッパの数学界では「神のようなアルキメデス」と讃えられたように，アルキメデスは時代を超えた数学を展開し，近世ヨーロッパの数学の進展に大きく寄与した．Issac Barrow 編纂のラテン語訳アルキメデス全集が貴重書コレクションに収録されている．この全集はアポロニ

図 3　Halley 編『円錐曲線論』の扉

オスの『円錐曲線論』, テオドシウスの『球面幾何学』との合本になっている．これらはすべて Barrow の編纂である．

Isaac Barrow 編　Archimedes, Apollonius, of Perga: “Archimedis opera ; Apollonii Pergaei Conicorum libri IIII ; Theodosii sphaerica : methodo nova illustrata, & succinct è demonstrata”, London , 1675.

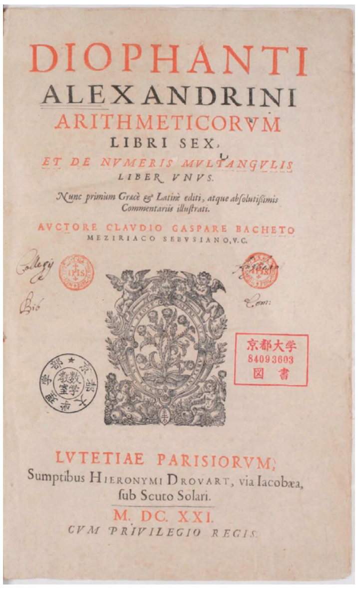
1.4　ディオファントス『数論』

紀元 3 世紀後半から 4 世紀前半にかけて活躍したと伝えられているディオファントスの『数論』は古代ギリシアの伝統からはずれた数学を展開していたが，後世に大きな影響を与えた．特にフェルマが読んで欄外に自分の発見を記し，さらにフェルマ予想を記したことで有名なギリシア語・ラテン語対訳の Claude-Gaspard Bachet(1581-1638) の編纂したバッシュ版『数論』は貴重書コレクションに含まれている．

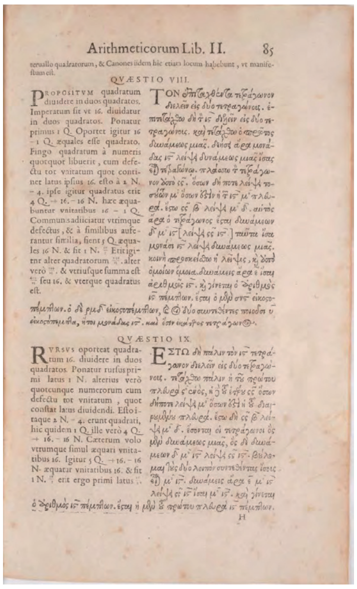
Claude-Gaspard Bachet 編, Diophantos, of Alexandria, : “Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et De numeris multangulis liber unus,” Lvtetiae Parisiorvm, 1621.

巨大な本で，欄外の余白もたくさんあるので，フェルマが有していたフェルマ予想の証明は長かったと思われる．

ところで，今日ディオファントス方程式は不定方程式を意味し，事実『数論』に出てくる問題の多くは不定方程式の問題である．しかしながら，『数論』ではほとんどの場合一つの解しか求めていない．解法に記された方法から他の解を求めることが可能であるから，唯一つの解しか記



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus HIERONYMI DROVART, via Iacobæa, sub Scuto Solari.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.



Arithmeticorum Lib. II. 85

QVÆSTIO VIII.

QVÆSTIO IX.

図 4　バッシュ版ディオファントス『数論』の扉および p.85 第 2 巻命題 8．フェルマはこのページの余白に「これに反して立法数を二つの立法数に，4 乗数を二つの 4 乗数に分かつこと，一般に平方より大きい任意のべきを二つの同じ次数のべきに分かつことはできない．この驚くべき証明を見つけた，この余白をそれを記すには狭すぎる」と記した．

さなかったのかは文面から推測することはできない．フェルマは『数論』を読んで初等整数論を構築したことは有名である．また，『数論』では式記号が使われていることでも有名であるが，多くの場合式は言葉で書かれている．第 2 巻問題 8 のギリシア語本文も式の記号は使われていない．一方，ラテン語訳では式の記号が使われている．

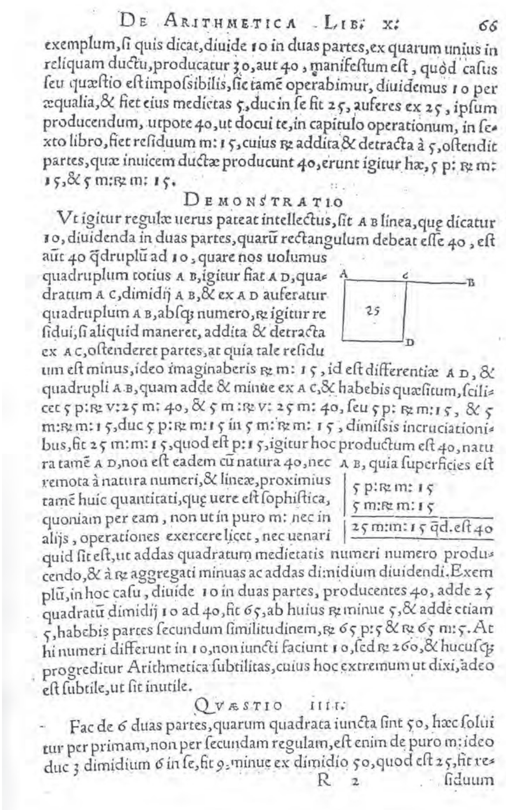
問題 8 を現代的な記号を使って訳すと次のようになる．

> 与えられた平方数を二つの平方数に分けること．
>
> 16 を二つの平方数に分けることが要請されたとしよう．そこで最初の平方数を x^2 とすると，もう一方は $16 - x^2$ である．したがって $16 - x^2$ が平方数となることが要請される．m を任意の整数とし $(mx - 4)$ の形の平方数をとると，16 は 4 の平方であることから，たとえば $(2x - 4)^2$ をとると，これが $16 - x^2$ と等しいとする．したがって，$4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$, 言い換えると $5x^2 = 16x$，よって $x = 16/5$ を得る．
>
> 求めるべき平方数は，したがって $\dfrac{256}{25}$, $\dfrac{144}{25}$ である．

2　3 次方程式の解法

方程式論はアラビアの円錐曲線を使う 3 次方程式の解法の後，15 世紀イタリアで 3 次方程式，4 次方程式の代数的解法が発見された．

2.1　カルダノ『アルス・マグナ』



DE ARITHMETICA LIB. X. 66

exemplum,ſi quis dicat,diuide 10 in duas partes,ex quarum unius in reliquam ductu,producatur 30,aut 40, manifeſtum eſt, quòd caſus ſeu quæſtio eſt impoſsibilis,ſic tamē operabimur, diuidemus 10 per æqualia,& fiet eius medietas 5,duc in ſe fit 25, auferes ex 25, ipſum producendum, utpote 40,ut docui te,in capitulo operationum, in ſexto libro,fiet reſiduum m: 15,cuius ℞ addita & detracta à 5,oſtendit partes,quæ inuicem ductæ producunt 40,erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15,& 5 m: ℞ m: 15.

DEMONSTRATIO

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus,ſit A B linea,quę dicatur 10, diuidenda in duas partes,quarū rectangulum debeat eſſe 40, eſt aūt 40 q̄druplū ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B,igitur fiat A D,quadratum A C,dimidij A B,& ex A D auferatur quadruplum A B,abſq; numero,℞ igitur reſidui,ſi aliquid maneret, addita & detracta ex A C,oſtenderet partes,at quia tale reſiduum eſt minus,ideo imaginaberis ℞ m: 15, id eſt differentiæ A D, & quadrupli A B,quam adde & minue ex A C,& habebis quæſitum,ſcilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, ſeu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15,duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimiſsis incruciationibus,fit 25 m: m: 15,quod eſt p: 15,igitur hoc productum eſt 40,natura tamē A D,non eſt eadem cū natura 40,nec A B, quia ſuperficies eſt remota à natura numeri,& lineæ,proximius tamē huic quantitati,quę uere eſt ſophiſtica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid ſit eſt,ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo,& à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplū,in hoc caſu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratū dimidij 10 ad 40,fit 65,ab huius ℞ minue 5,& adde etiam 5,habebis partes ſecundum ſimilitudinem,℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10,non iuncti faciunt 10,ſed ℞ 260,& hucuſq; progreditur Arithmetica ſubtilitas,cuius hoc extremum ut dixi,adeo eſt ſubtile,ut ſit inutile. 2

5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 q̄d. eſt 40

QVÆSTIO IIII.

Fac de 6 duas partes,quarum quadrata iuncta ſint 50, hæc ſoluitur per primam,non per ſecundam regulam,eſt enim de puro m: ideo duc 3 dimidium 6 in ſe,fit 9, minue ex dimidio 50,quod eſt 25,fit reſiduum

R 2

図 5　カルダノ『アルス・マグナ』のなかで複素数が初めて登場する部分.

3 次方程式の解法をめぐるタルタリア (Niccolò Taltaglia, 1499–1557) とカルダノ (Cardano, 1501–1576) をめぐるスキャンダルはよく知られている．カルダノは公開しないという約束でタルタリアから 3 次方程式の解法を教えてもらったが，タルタリア以前にボローニャ大学のデル・フェッロが 1514 年以前に 3 次方程式 $x^3 + ax = b$ の解法を得ていて，弟子のフィオーレのみに解法を教えていたことを知り，タルタリアとの約束を破って『アルス・マグナ』で 3 次方程式の解法を発表した．カルダノの弟子のフェラーリによる 4 次方程式の解法も『アルス・マグナ』で発表された．さらに『アルス・マグナ』では複素数が初めて登場した．『アルス・マグナ』の後半部で和が 10，積が 30 となる 2 数を求める問題が提出され，その解として $5 \pm \sqrt{-5}$ が得られることを記している．そして，この節の最後に「これは数論の巧妙な結果ではあり，すでに述べたように精緻な結果ではあるが有用ではない」と締めくくっている．

図書室には『アルス・マグナ』の原本は収蔵されておらず，コピーのみが存在する．しかし，カルダノ全集は収蔵されており，その中に『アルス・マグナ』も含まれている．

今日から見ると大変奇妙に感じられるが，3 次方程式の解法には立方根が出てくるので複素数

が必要であるにもかかわらず,『アルス・マグナ』には 3 次方程式の解法には複素数は登場しない．この難点を明確にし，3 次方程式の解法を確立したのはボンベリ (Rafael Bombelli, 1526–72) であった．彼の著作『代数学』で初めて複素数が体系的に定義され，3 次方程式の解法に活用された．かれは 3 次方程式 $x^3 = 15x + 4$ の解 4 は根の公式を適用すると

$$4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

と書けることを見出し，実根であっても根の公式を適用するには複素数が必要であることを初めて示した．ボンベリの『代数学』の重要性はライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leipniz, 1646–1716) をはじめとする多くの数学者に認識されていたが，複素数が数として認識されるまでに 200 年近く待つ必要があった．オイラーとガウスによって初めて複素数の有用性が認識されるようになった．しかし，代数学の基本定理をを証明した 1800 年のガウスの学位論文では,「実係数の 1 変数多項式は 1 次式と既約な二次式の積に因数分解される」として複素数への言及は巧妙に避けられている．ドイツ数学界で複素数が広く認められるようになるのはガウスの 4 次剰余に関する論文

Carl Friedrich Gauss: “Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. II”, Commentationes soc. reg. Gotting. recectiores, 7(1832)

によるところが大きく，この論文の中でガウスの整数と複素平面が導入されて以降である．

方程式の代数的解法の理論は 19 世紀のアーベルとガロアによって新たな進展が始まった．

3　ガリレオ・ガリレイ『新科学対話』

すでに述べたように，アポロニオスの円錐曲線論は近世物理学の進展に大きな影響を与えた．ケプラーが惑星の軌道が楕円になることを発見し，ガリレオ (Galileo Galilei, 1564-1642) は『新科学対話』の中で弾道が放物線を描くことを証明している．ガリレオの『新科学対話』の原著は貴重書コレクションに含まれている．

Galilei, Galileo : Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali, Leida : Appresso gli Elsevirii , 1638.

大砲をどの角度で撃てば一番遠くへ飛ばすことができるかは 16 世紀以来，ヨーロッパでは関心の的となり，3 次方程式の解法で有名なタルタリアは，大砲を使って 30 度と 45 度の角度で弾を発射して，45 度の角度で打つのが一番遠くまで飛ばすことができることを主張し，直線と円を使ってそのことを「証明」して,『新科学』として出版した (図 6)．ガリレオ・ガリレイの『新科学対話』はこのタルタリアの著作に対する反論の意味が題名に込められている．ガリレオは弾道が放物線になることを示し，さらに落体の運動の法則を見出した．ガリレオは座標を使うことができなかったので，弾道も落体の法則も表として記されている．この議論は『新科学対話』の最終章「第四日」に詳しく記されている (図 6).

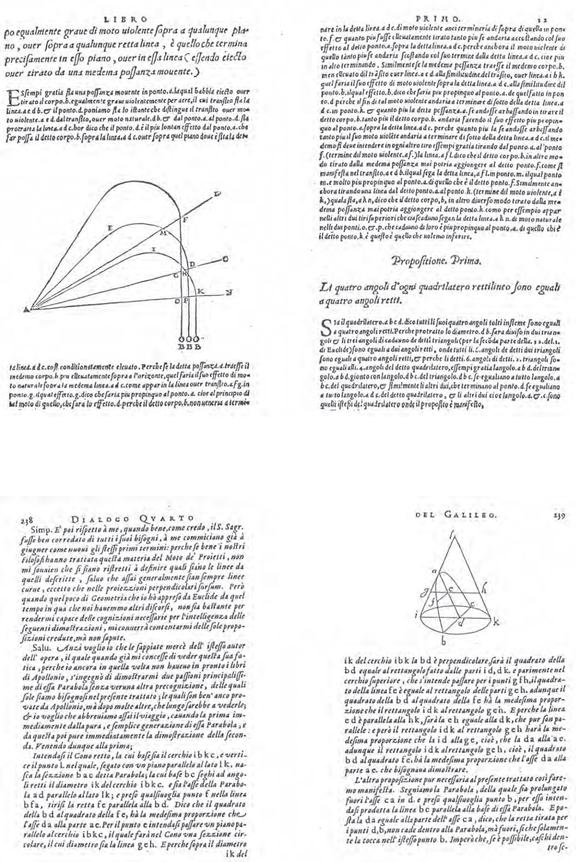


図 6　上はタルタリア著『新科学』．大砲の弾道を直線と円を使って説明し，45 度の角度が弾を一番遠くまで飛ばすことができると主張した．下はガリレオ著『新科学対話』ガリレオは弾道は放物線を描くことを証明し，45 度の角度で弾を撃つと一番遠くまで飛ぶことを証明した．

4　ネピア『対数の驚くべき体系の叙述』

ネピア (John Napier, 1550–1617) の対数の導入によって，西洋での計算の歴史が大きく変わった．貴重書コレクションにはネピアの対数に関する最初の著作が含まれている．

[Na1] John Napier: “Mirifici logarithmorum Canonis descriptio”(対数の驚くべき体系の叙述), Edinburgh, 1614.

ネピアの没後，本書の続編が遺著として出版された．この書は残念ながら貴重書コレクションには含まれていない．

[Na2] John Napier: “Mirifici logarithmorum Canonis Constructio”(対数の驚くべき体系の構成), 1619.


IN LOGARITHMOS.

Quæ tibi cunque sinus, tangentes atque secantes
Prolixo præstant, atque labore gravi:
Absque labore gravi, & subitò tibi, Candide Lector,
Hæc Logarithmorum parva tabella dabit.

MIRI-

1

MIRIFICI
Logarithmorum canonis descri-
ptio, eiusque usus in utrâque Trigonome-
tria, ut etiam in omni Logistica mathematica,
amplissimi, facillimi, & expe-
ditissimi explicatio.

LIBER I.

CAPUT. I.
De Definitionibus.

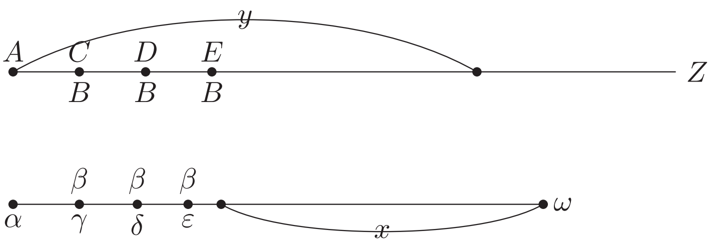
1.Def. Linea æqualiter crescere dicitur, quum punctus eam describens, æqualibus momentis per æqualia intervalla progreditur.

Sit punctus A, à quo ducenda sit linea fluxu alterius puncti, qui sit B. fluat ergo primo momento B ab A in C.

B Secun-

図 7　ネピア著『対数の驚くべき体系の叙述』の冒頭.

ネピアは半径 10,000,000 の円の正弦 ($10^7 \sin\theta$) と正接 ($10^7 \tan\theta$) の対数表を作った．ネピアの対数は次のようにして構成されている．



半直線 AZ と線分 $\alpha\omega$ を用意し，半直線 AZ 上では点 A から Z に向かって，B が 1 単位時間あたり 1 の速さの等速運動を行う．1 単位時間に A から C へ進んだとする．同時に線分 $\alpha\omega$ 上では α から ω に向かって β が 1 単位時間に $k\overline{\alpha\omega}$ だけ進み，点 γ に到達する．ここで，k はある比例定数であり，$0 < k < 1$ と仮定する．次の 1 単位時間に B は D まで進み，β は γ から $k\overline{\gamma\omega}$ だけ進み，点 δ に到達する．a を線分 $\alpha\omega$ の長さとすると $\overline{\gamma\omega} = a - ka = (1-k)a$, $\overline{\gamma\delta} = k(1-k)a$, $\overline{\delta\omega} = (1-k)a - k(1-k)a = (1-k)^2 a$ である．n 単位時間に α から進んで到達した点と ω との長さをを x_n とすると

$$x_n = a(1-k)^n$$

が成り立つ．このとき AZ 上では点は A から n の距離まで進む．一般に $\alpha\omega$ 上の点が ω から距

離 x の位置にあるとき，AZ 上で点が A から y の位置にあるとすると

$$x = a(1-k)^y$$

という関係が成り立つ．このとき y を x の対数と呼ぶ．ネピアは

$$a = 10^7, \quad k = \frac{1}{10^7}$$

として x に対して y を求めた．これを

$$y = NP\log x$$

と記そう．

$$x_1 = a(1-k)^{y_1}, \quad x_2 = a(1-k)^{y_2}$$

であれば

$$x_1x_2 = a^2(1-k)^{y_1+y_2}$$

が成り立つので

$$NP\log x_1 + NP\log x_2 = NP\log(x_1x_2/a)$$

が成り立つ．こうして積の計算が，対数の和の計算に変換された．

ネピアの対数は

$$NP\log(10^7) = 0$$

であり，ブリッグス (Henry Briggs, 1561–1631) は 10 を底とする対数，いわゆる常用対数をネピアに提案し，常用対数表の作成を試みた．そのことはネピアの遺著 “Constractio”([Na2]) の付録で初めて発表され，ブリッグス自身は 10 を底とする対数の原理と 1 から 20000 までと 90000 から 100000 までの 14 桁の対数表を 1624 年に発表したが，20001 から 89999 までの対数表を完成させることなく亡くなった．

[Br] Henry Briggs: “Arithmetica logarithmica”, London, 1624.

ネピアの対数導入の目的が天文計算を簡単にするためであったように，対数とりわけ常用対数は天文計算に大きな役割を果たした．実はネピアが対数を構想し対数表の計算を行っていたときに，スイスでブリュギ (Jost Bürgi, 1522–1632) も独立に対数を考案し，対数表を作成していた．ネピアの発表のあと，プラハで 1620 年に対数表『等差および等比数列の表』を発表したが，ほとんど注目されることはなかった．

ただ，ブリュギとケプラーは交流があり，膨大な計算を必要としたケプラーは対数の重要性を認識していた．自然数 N に対するブリュギの対数 $l(N)$ は

$$N = 10^8 \times \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^n$$

に対して

$$l(N) = 10n$$

と定義された．ケプラーが彼の名を冠した第三法則を発見することができたのも対数の威力のおかげであると言われている．常用対数はコンピュータが普及するまで計算手段として科学技術の世界で重要な働きをした．

5　微積分学の建設

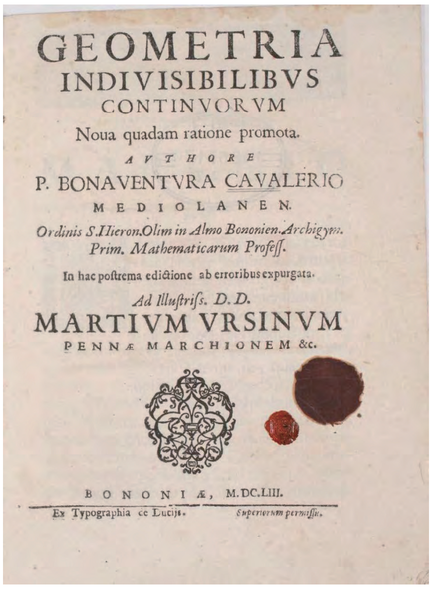
貴重書コレクションには微積分学の進展に寄与した重要な数学書が含まれている．それらのいくつかを紹介しよう．

5.1　カヴァリエリの原理

ガリレオの弟子であったカヴァリエリ (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647) によるカヴァリエリの原理は微積分の誕生に大きな役割を果たした．貴重書コレクションには

Bonaventura Cavalieri: “Geometria indiuisibilibus continuorum noua quadam ratione promota”, Bononiae, 1653

が収蔵されている．



GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
P. BONAVENTVRA CAVALERIO
MEDIOLANEN.
Ordinis S.Hieron.Olim in Almo Bononien.Archigym.
Prim. Mathematicarum Profess.
In hac postrema editione ab erroribus expurgata.
Ad Illustriss. D.D.
MARTIVM VRSINVM
PENNÆ MARCHIONEM &c.
BONONIÆ, M.DC.LIII.
Ex Typographia de Ducijs. Superiorum permissu.

LIBER VII. 493

tem rectæ, DF, vel nihil est saltem ad alteram partem, si enim aliqua illius portio esset ad alteram partem rectæ, DF, iam recta, DF, secaret figuram, BAC, quod est absurdum, ergo recta, DF, tangit curuam, BAC, igitur possibile est, &c.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est quomodo ducenda sit recta linea datam curuam totam in eodem plano cum ea existentem contingens, quæ quidem data recta linea sit æquidistans.

LEMMA IV.

SI proposita quæcumque figura plana vni regulæ parallelis quotcumque lineis ita secari possit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ semper existant: Ipsa ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, seu ex figuris in alteram partem deficientibus, regula eadem, componetur.

Sit quæcumque figura plana, SPFR, talis tamen, vt secta quotcumq; vni regulæ, vt, FE, parallelis, conceptæ in ipsa rectæ lineæ integræ sint. Dico ipsam, vel ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, vel ex figuris in alteram partem deficientibus, reg. eadem, FE, componi. Sint enim ductæ, SA, FE, oppositæ tangentes figuræ, SPFR, regula eadem, FE, quibus incidat quomodocumq; recta linea, AE, moueatur autem, FE, versus, SA, semper æquidistanter eidem, SA, donec illi congruat, interim verò punctum, E, ita in ipsa feratur, vt describat lineam, ENA, cum, AE, figuram, ANE, comprehendentem, quæ eidem, SPFR, sit æqualiter analoga iuxta regulam, FE; in eadem integris existentibus parallelis ipsi, FE, ad ambitum, ANE, terminantibus: rursus feratur recta linea, AE, versus ambitum, ANE, semper ipsi, AE, æquidistanter donec totam pertransierit figuram, ANE, adnotentur autem contactus lineæ sic decurrentis

1. lib. 1

in

図 8　“Geometria”の扉とカヴァリエリの原理が記されたページ

5.2　ニュートンとライプニッツによる微積分の建設

ニュートン (Issac Newton, 1643–1727) とライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) は微分と積分が互いに逆の演算関係にあるという，微分積分学の基本定理を見出したこと

で微積分の建設者とされているが，実際には同時期にグレゴリー (James Gregory, 1638–1675) も微積分学の基本定理を見出し，テイラー展開やリーマン積分の概念も有していたことが知られている．グレゴリーは 36 歳で夭折したために，彼の業績はほとんど知られることが無かった．

ニュートンは 1665 年夏にペスト禍のためケンブリッジを離れる以前に微分積分学の基本定理の着想を得ていたと言われている．1666 年 10 月に無題の論文を記し，そこで微積分の基本的な理論が展開されている．この論文は筆写されてごく少数の人たちの間で読まれただけであった．その後，ニュートンは以下の論文を執筆しているが，印刷公表されたのは執筆されてからはるか後であり，ライプニッツとの先取権争いが引き起こされる原因ともなっている．

[Ne1] Isaac Newton: “De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas” (無限個の項をもつ方程式による解析について), 1669 年執筆，1711 年刊行.

[Ne2] Isaac Newton: “De Methodis serierum et fluxionum”(級数と流率の方法について), 1670–71 年執筆，1779 年刊行 (1736 年英語版刊行).

英語版

Isaac Newton: “The method of fluxions and infinite series : with its application to the geometry of curve-lines”, London, 1736.

が貴重書コレクションに含まれている．

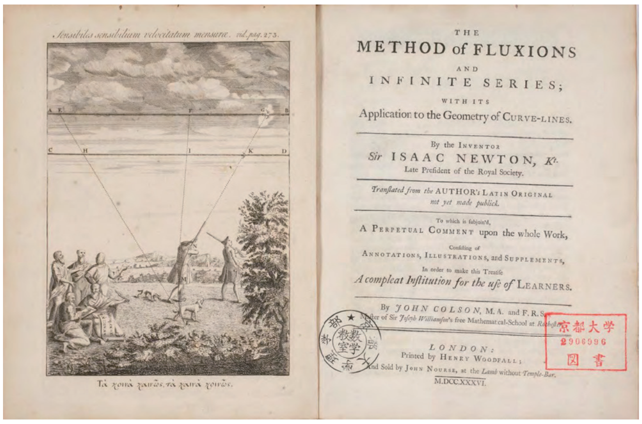


図 9　ニュートン『流率と無限級数の方法』

[Ne3] Isaac Newton: “De Quadratura curvarum”(曲線の求積について)，1691–93 年執筆，“Optics”(光学)1704 年の付録として公表.

ライプニッツはニュートンより遅れて，ニュートンとは独立に微積分学の基本定理に到達したが，印刷公表したのはニュートンより早かった．

[Lei1] Gottfried Wilhelm Leibniz: “Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singalare pro illis calculi

genus"(分数量も無理量をも妨げない，極大と極小，さらに接線に関する新方法，そしてそれらのための特別な計算法), Acta Eruditorum, 1684 , pp.467–473.

[Lei2] Gottfried Wilhelm Leibniz: "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitiorum"(深奥な幾何学ならびに不可分量と無限の解析について), Acta Eruditorum(June1686), pp.292-300.

ニュートンとライプニッツの以上の著作と論文は全集に収録されている．

今日使われている微積分の記号の多くはライプニッツに由来する．積分記号 $\int$ は [Lei2] に登場する．ニュートン，ライプニッツによる微積分の建設は始まりであって，微積分学が確固たる基礎の上に建設できるようになるには 19 世紀の後半までかかる大事業であった．微積分の建設とその発展に関しては多くの書物が出版されており，かつ簡単に論じることができないので，成書に任せることにする．ただ，強調すべきことは，微積分によって，変化するものを数学的に取り扱うことができるようになり，自然科学，工学の発展の基礎となったことである．西洋文明が世界を支配するようになったのは，極言すれば微積分のおかげである．江戸末期，軍事技術の導入のためには，当時日本で興隆を極めていた和算では不十分で，微積分の学習が必要となり，長崎海軍伝習所では微積分の授業が行われたことは，そのことの一証左である．

なお，ニュートンとライプニッツの数学に関しては，邦書では次の二書が詳しい．

[Ta] 高橋秀裕: 『ニュートン　流率法の変容』コレクション数学史 3，東京大学出版会, 2003 年.

[Ha]　林知宏『ライプニッツ　普遍数学の夢』コレクション数学史 2，東京大学出版会, 2003 年.

ニュートン物理学を記した

[Ne4] Isaac Newton: "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica", 1687.

は残念ながら貴重書コレクションには収蔵されていない．ニュートンは『プリンキピア』では微積分を表に出さずに記していて，私たちには大変読みにくい書物となっている．ギリシア数学のような厳密さを求めたニュートンは，微積分が論理的に十分には洗練されていないことが分かっており，敢えてギリシア的厳密性を求めてとも言われている．そうはいっても，微分概念を使わずに力学を展開することはできず，そのために「最後の比」という表現で微分をこっそり使っている．微積分に該当することは第 1 篇「物体の運動について」の補助定理 1 から 11 にまとめられている．また，第 1 篇の前に「定義」と「公理，または運動の法則」が記されており，ユークリッドの『原論』のスタイルを踏襲している．微積分を隠してしまったために，微分を使った運動方程式は『プリンキピア』のどこにも現れない．ニュートン力学を微分方程式を使って再構築したのはオイラーである．

5.3 ベルヌーイ兄弟

ライプニッツの微積分学を引き継いで発展させたのはベルヌーイ兄弟，Jakob Bernoulli(1654-1705) と Johann Bernoulli(1667-1748) である．貴重書コレクションに兄弟の著作が収録されている．

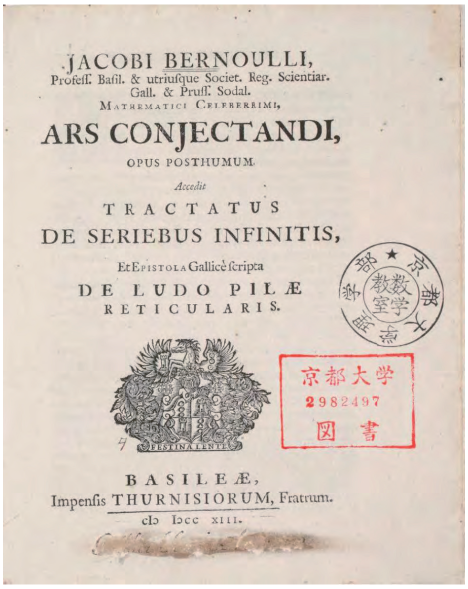
弟のヨハン・ベルヌーイに関しては 1742 年に出版された全集

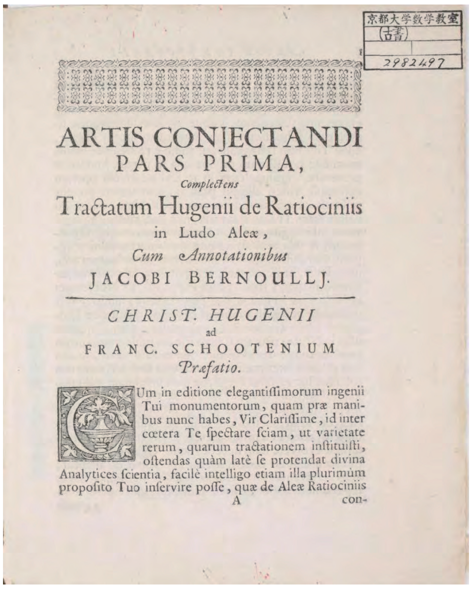
Johann Bernoulli: Johannis Bernoulli, opera omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita, Lausannæ ; Genevæ, 1742.

が貴重書コレクションに収録されていて，ヨハン・ベルヌーイの数学を年代をおって知ることができる．

5.4 ヤコブ・ベルヌーイ著『推測術』と関孝和著『括要算法』

ヤコブ・ベルヌーイは数学の種々の分野で活躍した．かれの著作として『推測術』は有名である．


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
FESTINA LENTE
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIɔ Iɔcc XIII.



ARTIS CONJECTANDI
PARS PRIMA,
Complectens
Tractatum Hugenii de Ratiociniis
in Ludo Aleæ,
Cum Annotationibus
JACOBI BERNOULLJ.

CHRIST. HUGENII
ad
FRANC. SCHOOTENIUM
Præfatio.

CUm in editione elegantissimorum ingenii Tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cœtera Te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quàm latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito Tuo inservire posse, quæ de Aleæ Ratiociniis
A con-

図 10　『推測術』の第 1 巻ではホイヘンスの論文に詳しい註釈がついている．

ヤコブ・ベルヌーイとヨハン・ベルヌーイは仲が悪く，出版社はヨハンにヤコブの遺稿を整理して出版することを依頼できず，ヤコブの甥 (ヨハンの息子) ニコラス・ベルヌーイ (1695–1726) が成人するのを待って遺稿の整理を頼み 1713 年に『推測術』

Jakob Bernoulli: “Ars conjectandi, opus posthumum : accedit tractatus de seriebus infinitis, et epistola Gallic è scripta de ludo pilae reticularis”, Basel, 1713.

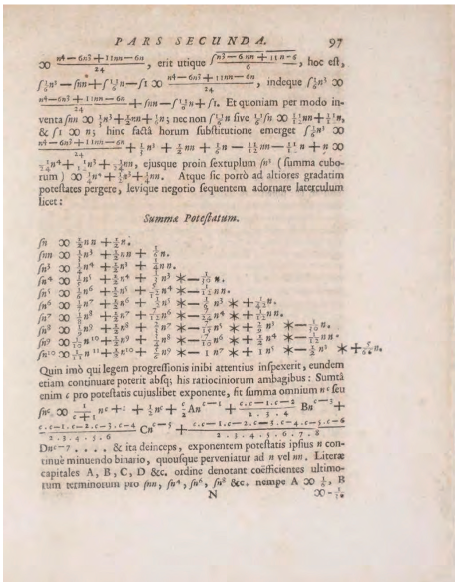
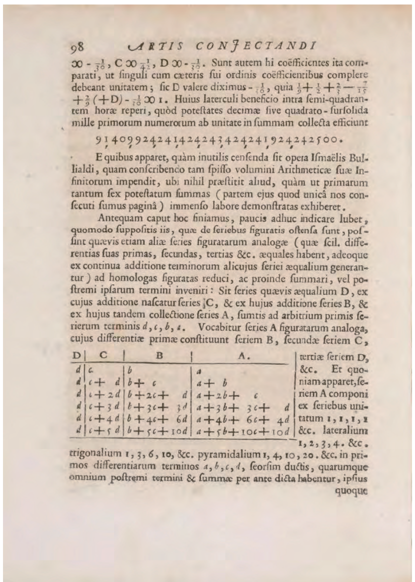
 

図 11　『推測術』p.97 では $S_p(n)$, $1 \leqq p \leqq 10$ までの公式と最後の行に $A = \dfrac{1}{6}$, p.98 の 1 行目に $B = -\dfrac{1}{30}$, $C = \dfrac{1}{42}$, $D = \dfrac{1}{30}$ と関・ベルヌーイ数が記されている．

は出版された．『推測術』の第 1 巻ではホイヘンスの確率の論文「サイコロ遊びにおける計算において」の詳しい註釈をつけて再刊したので，その後のヨーロッパでの確率論の発展に大きな役割を果たした．また，大数の法則を初めて定式化したことでも『推測術』は有名であるが，それ以外にも関・ベルヌーイ数を導入して冪和

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p$$

の公式を与えていることでも有名である．関孝和とベルヌーイは独立に関・ベルヌーイ数 B_n を

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B_j = n+1$$

によって n に関して帰納的に定義した．ただし $B_0 = 1$ と約束する．関・ベルヌーイ数 B_n を使うと

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left\{ \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k} \right\}$$

と書くことができる．

一方，関孝和は『括要算法』巻元で補間法の一般論を構築し，その応用として冪和の公式を最初求めたようである．その過程で，冪和の公式が二項係数と関係することに気づき，関・ベルヌーイ数を発見し，一般の冪和の公式を見出したようである．ただ，理論の詳細が記されていないために，関孝和がどのように考えたかに関しては推測の域を出ない．なお，『括要算法』は関

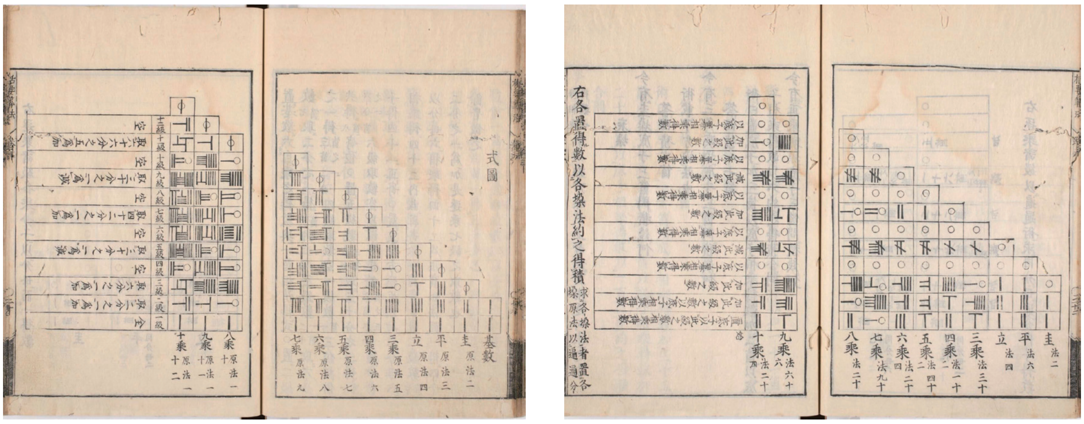


図 12　左は『括要算法』巻元の「式図」二項係数が算木形式で記されている．関・ベルヌーイ数は各級の下に表示されている．たとえば二級では「取二分之一為加」とは二級に現れる二項係数を 1/2 倍して加えることを意味し，五級で「取三十分之一為減」は五級に現れる二項係数を 1/30 倍して引くことを意味する．右は冪和の公式．たとえば三乗は $S_4(n) = \dfrac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$ を表している．江戸時代の k 乗は今日の $(k+1)$ 乗を表す．自分自身に同じものを k 回掛けるので k 乗と表現した．

孝和の遺著として 1712 年に荒木村英のグループによって出版された．数学教室の和算書コレクションには二本の『括要算法』を収めるが，そのうちの一本 (請求番号 和/か/032) は初版本であり，現在の所三本の存在が知られているのみの貴重書である．『括要算法』は重要な書であったので，幕末まで再版が続けられた．

『括要算法』をはじめとする関孝和の数学上の業績については

上野・小川・小林・佐藤編『関孝和全集』全 3 巻，岩波書店，2023

の第 1 巻を参照していただきたい．

5.5　ラクロワの微積分の教科書

微積分はニュートンとライプニッツの先取権争いもあって，英国とヨーロッパ大陸の数学者が対立したが，理論の進展は主として大陸の数学者によってなされた．教科書も多数出版されたが，なかでもラクロア (François Silvestre Lacroix, 1765-1843) による教科書

François Silvestre Lacroix : “Traité du calcul différentiel et du calcul intégral”, 2 volumes, Paris, 1797-1798

François Silvestre Lacroix : “Traité des différences et des séries : faisant suite au traité du calcul différentiel et du calcul intégral”, Paris, 1800.

は有名である．これらは貴重書コレクションに含まれている．こうしたヨーロッパ大陸での微積分の進展に対して自国の伝統に固執することに疑問を持つ英国の数学者も現れ，Analytic

Society を作って大陸の微積分を取り入れ発展させる運動が起こった．その中心の一人が計算機 analytic engine の考案者である Charles Babbage(1791-1871) である．かれが中心となってラクロワの教科書が英訳されている．

Charles Babbage, Herschel G. Peacock, & John Frederick William 訳　Lacroix, S. F : “An elementary treatise on the differential and integral calculus”, Cambridge, 1816.

この本も貴重書コレクションに含まれている．さらに，貴重書コレクションには Analytic Society の機関誌

Memoirs of the Analytical Society, 1813

も含まれている．

6　オイラー

オイラー（Leonhard Euler, 1707-1783) によって解析学は新たな進展を始めた．かれは解析学に複素数を積極的に取り入れ，解析学の進展に本質的な寄与をした．貴重書コレクションにはオイラーの代表作である『無限解析入門』と『変分法』が含まれている．

6.1　オイラー『無限解析入門』

オイラーは微積分の教科書も出版しているが，『無限解析入門』は冪級数を積極的に取り扱い，かつその変数を複素数まで拡張して考察したことで重要である．貴重書コレクションには

[Eu1] Leonhard Euler: “Introductio in analysin infinitorum”, Lausanne, 1748.

の他に 1797 年に出版された新版の 1837 年のフランスでの再版，さらにはドイツ語訳

Leonhard Euler: “Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen”, Berlin, 1788, 1791.

が収録されている．オイラーは『無限解析入門』で無限小，無限大をあたかも数であるかのように取り扱っている．たとえば指数関数の冪級数展開を次のような議論で導いている．$a^0 = 1$ であることから ω を無限小とすると

$$a^\omega = 1 + \psi$$

が成り立つ．ここで ψ は無限小である．ω も無限小であるので ψ は ω の定数倍と考えることができ

$$a^\omega = 1 + k\omega$$

と書くことができるとオイラーは主張する．そこで正数 i に対して二項展開を適用すると

$$(a^\omega)^i = (1 + k\omega)^i = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots$$

図 13　上は『無限解析入門』の扉のページ．下は指数函数を議論している箇所．

となる．有限の z に対して $i = z/\omega$ をおくと，$\omega = z/i$ かつ i は無限大になるので，上の和は

$$a^z = 1 + \frac{i}{i}kz + \frac{i(i-1)}{i \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{i \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \cdots$$

と書き換えることができる．i は無限大であったので，任意の正整数 n に対して $(i-n)/i = 1$ が成り立つ．従って上の無限和は

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

となる．特に $k = 1$ の時は $a = e$ である．

こうした議論が『無限解析入門』では続出する．このような無限小，無限大を使うオイラーの議論をイプシロン・デルタ法を使って書き直すことはよい演習となる．なお，オイラーの時代は冪級数の収束半径は知られていなかったが，オイラーは直観によって冪級数の収束域をはみ出した議論を回避することに成功している．

『無限解析入門』は邦訳がある．

L. オイラー著　高瀬正仁訳『オイラーの無限解析入門』海鳴社，2001 年．

6.2　オイラーの変分法

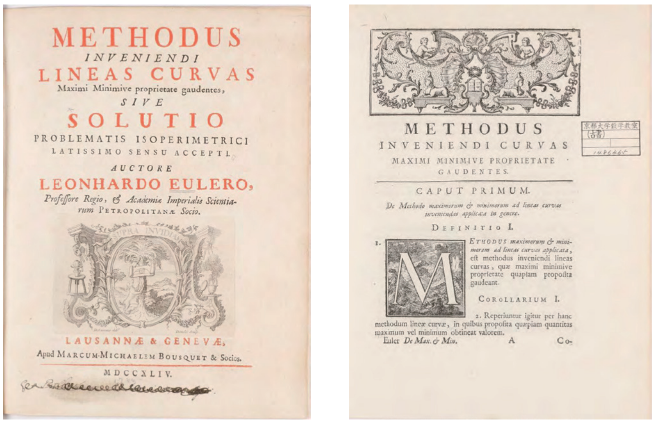


図 14　オイラー『極大もしくは極小の性質を持つ曲線を見出すための方法』

フェルマは光線が異なる媒質を通るときに屈折することを，光が 2 点間を最短時間で進む性質を持つことから説明した．19 世紀になると力学の発展から，最小作用の原理が注目を浴びるようになった．最小作用の原理は 1747 年にモーペルテュイ (P.-L. Moreau de Maupertui , 1698–1759) によって提唱されたとされているが，1746 年にオイラーによっても提唱されていたことは余り知られていない．オイラー自身はそれ以前に一般的な変分原理に到達しており，既に 1744 年に成書を出版している．

[Eu2] Leonhard Euler : “Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive solutio Problematis Isoperimetrici Latssimo sensu Accepti”(極大もしくは極小の性質を持つ曲線を見出すための方法，あるいは広い意味に捉えた等周問題の解)．Lausanne & Genève, 1744.

本書も貴重書コレクションに収録されている．ガリレオ以来，地上に垂直な平面上の 2 点 A, B を物体が高い方の点 A から低い方の点 B に，初速度 0 で，摩擦がない状態で重力のみによって移動するときに最も早く移動することができる曲線 (最速降下曲線) の形状が問題とされた．この問題を解決したヨハン・ベルヌーイは 1696 年に雑誌 “Acta Eruditorum” でこの問題を改めて提出し，ニュートン，ヤコプ・ベルヌーイ，ライプニッツたちが解答を寄せた．その後，ヤコプ・ベルヌーイは等周問題も考察して新しい手法を開拓してオイラーへの道を作った．オイラーは [Eu2] では変分原理を説き，それが適用できる問題を 100 問も記している．オイラーが取り扱った最も簡単な場合は，$[0, a]$ で定義された曲線 $y = y(x)$ に対して，x, y, $p = dy/dx$ の函数 $Z(x, y, p)$ を考え，積分

$$\int_0^a Z(x, y, p, q, r)\, dx$$

が極値をとる条件で函数 $y = y(x)$ を求める問題である．オイラーは函数 Z の積分を，区分求積法で近似して

$$N = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial Z}{\partial p}$$

とおくと，積分が極値をとる必要条件として

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

を見出した．[Eu2] では Z がさらに複雑な場合が考察されている．

1755 年オイラーはトリノ在住の若者から一通の手紙を受け取った．それは [Eu2] の区分求積法を使った面倒な幾何学的な議論を使わずに変分方程式を見出す方法であった．手紙の差出人は当時 19 歳であったラグランジュ (Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813) であった．その後，二人の間で文通が続けられ変分法はラグランジュによって，今日使われる形に完成された．オイラーは初めて真に数学を議論することのできる数学者を見出したとも言われるラグランジュとの劇的な出会いでもあった．この手紙の中ではさらに複雑な場合を考察しているが，ここでは上に述べたオイラーの場合にラグランジュの議論を適用してみよう．ただし，記号は少し現代風に書き換える．ラグランジュは曲線を $y = y(x, \alpha)$ とパラメータ α 付きで考え，α に関する変分を δ という記号を使って表現した．ここで，曲線は同じ始点と終点を持つと考えるので $y(0, \alpha) = y(0)$, $y(a, \alpha) = y(a)$ を満たしていることに注意する．

$$\begin{aligned}
\delta \int_0^a Z(x, y, p)\, dx &= \int_0^a \delta(Z(x, y, p))\, dx \\
&= \int_0^a \left\{ \frac{\partial Z(x, y, p)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial Z(x, y, p)}{\partial p} \delta p \right\} dx \\
&= \int_0^a \left\{ \frac{\partial Z(x, y, p)}{\partial y} \delta y + \left[\frac{\partial Z(x, y, p)}{\partial p} \delta y \right]_0^a - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial Z(x, y, p)}{\partial p} \right) \delta y \right\} dx \\
&= \int_0^a \left\{ N - \frac{dP}{dx} \right\} \delta y\, dx
\end{aligned}$$

これがあらゆる変分 δy に対して極値をとるためには $\delta \int_0^a Z\, dx = 0$ が成り立たなければならず，従ってオイラーが導いた

$$N - \frac{dP}{dx} = 0$$

が成り立たなければならない．ラグランジュは 1755 年のオイラーの手紙を出した後も議論の改良を続け，最初の変分法の論文を出版したのは 1760 年であった．

[La1] Lagrange : Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrles indéfinies, Miscellanea Taurinensia 2(1760/61), pp.173–195, Oeuvre I, pp. 355–362.

ラグランジュの方法を力学に適用したものがラグランジュの運動方程式であり，ラグランジュ函数 $T - U$, T は運動エネルギー，U はポテンシャルの積分に関する変分問題の解である．

オイラー・ラグランジュが得た変分方程式は積分が極値をとるために必要条件であった．十分条件を議論するためには変分 δ に関する 2 次の項，いわゆる第 2 変分を考える必要がある．第 2 変分はヤコビによって導入された．

[Ja1] Jacobi : Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen, J. reine angew. Math. 17(1837), pp.68–82, Werke IV, pp.39–55.

このヤコビの論文はハミルトンによって始められたハミルトンの正準方程式に基づいて議論が展開され，ハミルトン・ヤコビ方程式が得られている．ニュートンやラグランジュの運動方程式は 2 階の微分方程式であるのに対して，ハミルトンの正準方程式は 1 階の偏微分方程式になっている．

[Ha1] W.R. Hamilton: On a general method in dynamics by which the study of the Motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central relation, or characteristic function, Phil. Trans. Roy. soc. 124(1834), pp.247–308, Math. Papers vol. II, pp.1103–167.

[Ha2] W.R. Hamilton: second essay on a general method in dynamics, Phil. Trans. Roy. soc. 125(1835), pp.95–144, Math. Papers vol.II pp.162–216.

6.3　ラグランジュ

ところで，ラグランジュも解析学の教科書を出版している．

Joseph Louis Lagrange : “Théorie des fonctions analytiques”, Paris, 1797

ラグランジュはさらにこの本の補遺も出版している．

“Leçons sur le calcul des fonctions, servant de commentaire et de supplément à la théorie des fonctions analytiques, supplément aux Leçons sur le calcul des fonctions”, Paris, 1808.

両本とも貴重書コレクションに含まれている．これらの教科書は，今日では微積分と複素函数論への過渡的なものと見なされている．

7　コーシー『微積分学要論』

微積分の厳密化はコーシー (Augustin Louis Cauchy,1789-1857) に始まる．いわゆるイプシロン・デルタ法はコーシーに始まると言われるが，そのように読むこともできると言う意味で，その評価は微妙である．しかし，微積分を厳密な基礎の上に構築するという試みにコーシーが寄与したことは間違いない．コーシーの『微積分学要論』

Augustin Louis Cauchy : “Résumé des leçons données à l’École royale Polytechnique, sur le calcul infinitésimal”, Paris, 1823.

は貴重書コレクションに収蔵されている．この貴重書コレクション収蔵の本書に基づく邦訳が

小堀憲訳・解説：『コーシー 微積分学要論』　現代数学の系譜 1，共立出版, 1969

として出版されている．

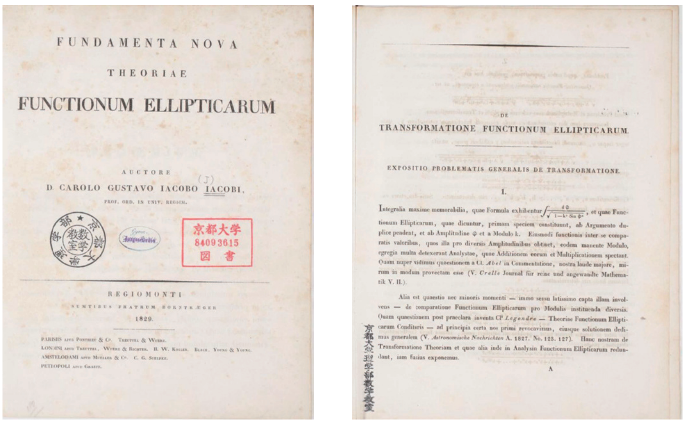
8　ヤコビ

8.1　ヤコビ『楕円函数原論』

$P(x)$ を重根を持たない 3 次または 4 次の多項式とし

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

は楕円積分と呼ばれ，18 世紀にオイラーやルジャンドルによって研究された．特に，オイラーは楕円積分の加法公式を証明し，後の理論の発展に大きな影響を与えた．しかし，彼らは積分を考えただけで，x を u の函数と見る観点には到達しなかった．この観点は最初ガウスが気づき，


FUNDAMENTA NOVA
THEORIAE
FUNCTIONUM ELLIPTICARUM
AUCTORE
D. CAROLO GUSTAVO IACOBO IACOBI,
PROF. ORD. IN UNIV. REGIOM.
REGIOMONTI
SUMTIBUS FRATRUM BORNTRÆGER
1829.

DE
TRANSFORMATIONE FUNCTIONUM ELLIPTICARUM.
EXPOSITIO PROBLEMATIS GENERALIS DE TRANSFORMATIONE.
1.
Integralia maxime memorabilia, quae Formula exhibentur $\int \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin \phi^2}}$, et quae Functionum Ellipticarum, quae dicuntur, primam speciem constituunt, ab Argumento duplice pendent, et ab Amplitudine ϕ et a Modulo k. Eiusmodi functionis inter se comparatis valoribus, quos illa pro diversis Amplitudinibus obtinet, eodem manente Modulo, egregia multa detexerant Analystae, quae Additionem eorum et Multiplicationem spectant. Quam nuper vidimus quaestionem a Cl. *Abel* in Commentatione, nostra laude majore, mirum in modum provectam esse (V. *Crelle* Journal für reine und angewandte Mathematik V. II.).

Alia est quaestio nec minoris momenti — immo sensu latissimo capta illam involvens — de comparatione Functionum Ellipticarum pro Modulis instituenda diversis. Quam quaestionem post praeclara inventa Cl. *Legendre* — Theoriae Functionum Ellipticarum Conditoris — ad principia certa nos primi revocavimus, eiusque solutionem dedimus generalem (V. *Astronomische Nachrichten* A. 1827. No. 123. 127). Hanc nostram de Transformatione Theoriam et quae alia inde in Analysin Functionum Ellipticarum redundant, iam fusius exponemus.
A

図 15　ヤコビ『楕円函数原論』

積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

から定まる逆函数に対して円分方程式と類似の理論ができることを，『数論研究』の最後の章の序文でさりげなく触れていた．この序文に刺激を受けて，アーベルとヤコビは楕円積分の逆函数の研究を行った．アーベルは夭折したために理論を十分に発展させることはできなかった．ヤコビは変換論に基づいて楕円函数の研究を進め

[Ja2] C. G. J. Jacobi: “Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum”, Regiomonti, 1829,

を著した．邦訳

高瀬正仁訳『ヤコビの楕円函数論』，講談社，2012 年

この著作には楕円函数に関する主要な公式が収められ，テータ函数の原型も導入されている．楕円函数に関するその後の研究はこの著作によると言っても過言ではなく，特に数論への応用でも重要である．もちろん，実用数学の分野でもこの著作が与えた寄与の大きさは計り知れない．現在では楕円函数は二重周期函数として定義されるが，公式のほとんどすべてはヤコビのこの著作に含まれていると言っても過言ではない．

なお貴重書コレクションにはポワソン (Siméon-Denis Poisson, 1781-1840) によるヤコビの [Ja2] の紹介論文も含まれている．

Siméon-Denis Poisson : "Rapport sur l'ouvrage de M. Jacobi, intitulé : fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum", Paris, 1830.

上述したように，楕円函数論はヤコビの研究以前にアーベル

[A1] N. H. Abel : Recherches sur les fonctions elliptiques (& Addition sur mémoire précédent), J. reine angew. Math. 2(1827), 101–181, 3(1828), pp.160 – 190.

によって始められた．アーベルとヤコビは互いの研究に刺激を受けながら研究を進めた．アーベルはアーベルの定理

[A2] N. H. Abel : Mémoire sur une propriété général d'une class très étendue de fonctions transcendantes. 1826 年 10 月 30 日パリ学士院提出, Mémoires divers savants VII. (1841).

をもとに楕円函数論を書き換えることに着手していたが，アーベルの夭折によってアーベルの研究は中断し，論文

[A3] N. H. Abel : Precis d'une théorie des fonctions elliptiques, J. reine und angew. Math. 4(1829), pp.236–277, pp.309–348.

が発表されただけであった．

9　代数函数論の誕生

9.1　ヤコビの逆問題

アーベル・ヤコビの楕円函数論は重根を持たない 3 次もしくは 4 次多項式 $P(x)$ から定まる積分

$$u = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

の逆函数 $y=\psi(u)$ として定義されていた．ヤコビは，楕円関数の理論を一般化することに着手し，重根を持たない 5 次又は 6 次の多項式 $f(x)$ に対して積分

$$u=\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

の逆関数 $y=\varphi(u)$ を考えた．ヤコビは $\varphi(u)$ は一次独立な 4 個の周期を持つことを示した．一方，複素平面 $\mathbb{C}$ 上一価有理型函数が 3 重以上の周期を持つとすると，それは定数函数でなければならないことを，ヤコビは発見した．従って，$y=\varphi(u)$ はヤコビにとって absurd なものとして，捨て去らねばならなかった．当時，複素函数論は，建設途上でありまだ不整備であって，一価函数と多価函数の違いも，それ程明確には意識されていなかった．上の $y=\varphi(u)$ は，実は無限多価函数であるから，4 重周期を持ってもヤコビが示したこととは矛盾はしない．ヤコビは，この困難と取組み，アーベルの定理がこの困難を解く鍵を有していることを見出した．

ヤコビは

$$\left\{\begin{array}{lllll}\Phi(x) & + & \Phi(y) & = & u\\ \Phi_1(x) & + & \Phi_1(y) & = & v\end{array}\right. \tag{1}$$

とおくと，x と y の対称式 (それは，$x+y,\, xy$ の 多項式であるが) を u と v の函数とみると，4 重周期函数になること，従って 2 変数函数として 4 重周期をもつことは，なんの矛盾をも含まないことを見出した．この考えは論文

[Ja3] Jacobi : Considerationes generales de transcendantibus Abelianis. J. reine angew. Math. **9**, pp. 394-403(1832), 全集 [Ja] II, pp7-16.

に発表され (これは一般の超楕円積分 (上の積分で $f(x)$ が重根を持たない 5 次以上の多項式の場合) も考察している．) その後,

[Ja4] Jacobi ; De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodics, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. J. reine angew. Math **13**, pp55-78. (1834), 全集 [Ja] II, pp. 25-50.

に詳述された．しかしながら，$x+y,\, xy$ が $u,\, v$ の有理型函数となることを彼は証明したわけではなかった．この論文に述べられていることは，$x+y,\, xy$ を $u,\, v$ に関する 2 変数函数と見れば，矛盾が起きないことを示すにとどまり，$x+y,\, xy$ を具体的に $u,\, v$ の函数として表示すること，楕円函数の場合のヤコビによるテータ函数による表示をこの場合に拡張することを問題として提起した.

今日では $x+y,\, xy$ が $u,\, v$ の一価有理型函数となることとそれらをテータ函数で表すことも含めてヤコビの逆問題と呼ぶ.

9.2 ローゼンハインとゲーペル

ヤコビによって提出された逆問題は，その後十年近く進展がなかった．ヤコビの逆問題によって，アーベルの定理の重要性が認識され，またアーベルのパリ論文 [A2] は，1841 年になっ

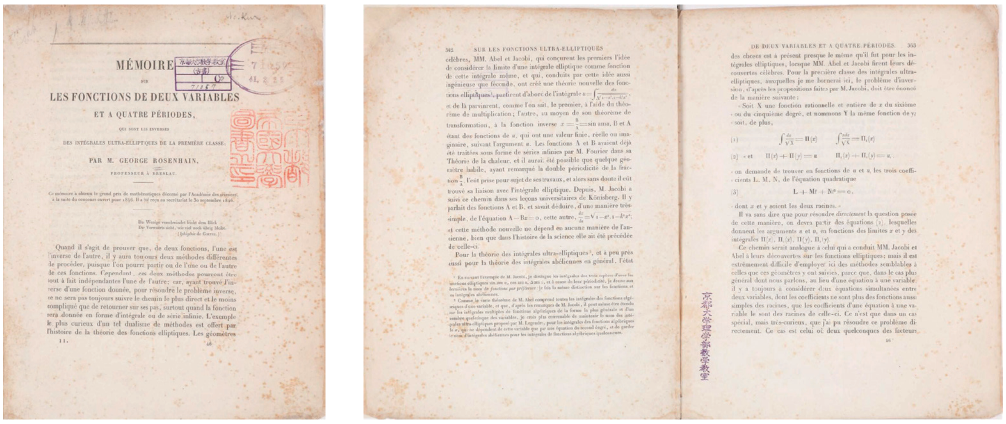


図 16　ローゼンハイン「第一種超楕円積分の逆函数である二変数かつ四重周期函数についての研究報告」

てやっと印刷されたことにより，この間，数人の数学者によって，アーベルの方向に沿って，更に研究が進められた．$f(x)$ の次数が 5 または 6 の場合のヤコビの逆問題はローゼンハインとゲーペルによって独立に解決された．

ヤコビの逆問題はパリ学士院が懸賞問題として提出し，ヤコビの学生であったローゼンハインは 1846 年にそれに応募し翌年数学大賞を獲得した．その論文

[Ro] Georg Rosenhain : Mémoire sur les fonctions de deux variables et a quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe, Mém. savant étrang. 11, (1851), (独訳 Ostwald Klassekern . 65 (1895)).

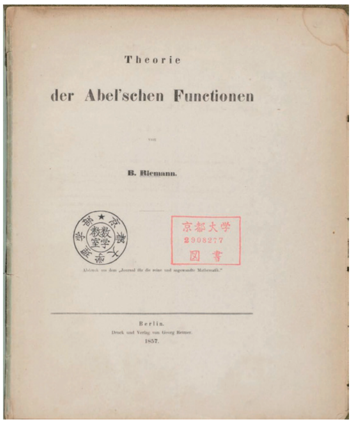
の抜き刷りが貴重書コレクションに収蔵されている．一方，当時ベルリンの図書館司書であったゲーペルは，1847 年クレレ (Crelle) のもとに，逆問題の解答を記した論文を印刷するように持ち込んだが，論文の印刷を待たずして急逝した．(この間の事情は，クレレ自らが，J. rein angew. Math 35(1847) に述べている．)

[Go] A. Göpel : Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. J. reine angew. Math. 35, pp277-312 (1847), (独訳 Ostwald Klassikern. 67(1895)).

9.3　リーマンのアーベル函数論

ヤコビの逆問題はその後ワイエルシュトラス (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815–1897) が超楕円積分の場合に解決したが，論文の執筆中にリーマン (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866) が一般の場合に問題を完全に解決して発表した．

[Ri] G. Riemann : Theorie der abel'schen functionen, J. für reine angew. Math.54(1857), 101–155.



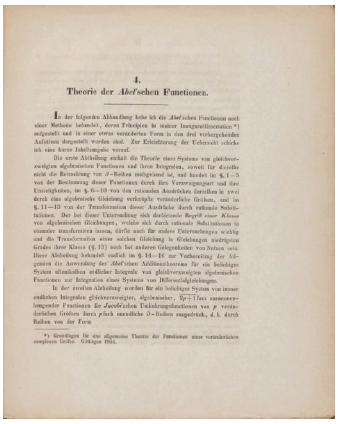


図 17　リーマン「アーベル函数論」

この論文でリーマンは 2 変数既約多項式 $f(x, y) = 0$ から定まる閉リーマン面を定義し，その上の第一種微分の積分を使ってヤコビの逆問題を定式化し，テータ函数を導入して閉リーマン面の幾何学を使ってヤコビの逆問題を解決した．このリーマンの論文から代数函数論と代数幾何学の本格的な進展が始まった．このリーマンの論文 [Ri] の抜き刷りも貴重書コレクションに含まれている．

10　行列式と終結式

行列式と終結式の歴史は興味深いので節を新たに立てて記したい．

10.1　関孝和の終結式の理論

今日の線型代数の講義では行列は行列式の前に学ぶことが多く，行列と行列式は密接な関係をもっていることは当然のことと思いたくなる．しかし，歴史的には行列と行列式は全く別の形で数学に登場した．行列の原型は紀元前後に記された中国の数学書『九章算術』に登場する．当時の中国は計算は算籌（さんちゅう）(日本では算木と呼ばれた) と呼ばれる金属や竹や象牙でできた棒を使って行っていた．『九章算術』の第八章は「方程」と題され，問題を解くために連立 1 次方程式を使っている．方程式という術語はこの章の題名に由来する．「方程」では算籌を並べて行列の形を作って，今日のガウスの消去法に当たる手法を使って連立 1 次方程式を解いていた．12 世紀頃に北部中国では算籌の記号を紙上に記して，紙上で方程式を立てる手法が発展したが，連立 1 次方程式も図 18 のように記して，方程式を解いていた．算籌の記号を算用数字に変えれば行列そのものの形をしているが，中国数学では行列の理論は誕生しなかった．

行列式は連立 1 次方程式の解法だけではなく，連立高次方程式の変数の消去の理論から誕生した．消去法の理論を創り上げたのは関孝和が数学史上最初である．1683 年に記された『解伏題

図 18　『新編算学啓蒙』巻下「方程正負門」左のページの 2 行目から 4 行目に算木記号を使って連立方程式が記されている．

之法』の中で，関孝和は y に関して同じ n 次の 2 個の 2 変数連立高次方程式

$$f(x,y)=a_0(x)+a_1(x)y+a_2(x)y^2+\cdots a_n(x)y^n=0$$
$$g(x,y)=b_0(x)+b_1(x)y+b_2(x)y^2+\cdots b_n(x)y^n=0$$

を考え，これより n 個の独立な y に関して $n-1$ 次の方程式系

$$\begin{cases} F_1(x,y)=a_{11}(x)+a_{12}(x)y+a_{13}y^2+\cdots+a_{1n}y^{n-1} & =0 \\ F_2(x,y)=a_{21}(x)+a_{22}(x)y+a_{23}y^2+\cdots+a_{2n}y^{n-1} & =0 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ F_n(x,y)=a_{n1}(x)+a_{n2}(x)y+a_{n3}y^2+\cdots+a_{nn}y^{n-1} & =0 \end{cases} \tag{2}$$

を導いた．この方程式系を関孝和は換式と呼んでいる．関は換式の構成のアルゴリズムを記しているが，今日の記号を使えば

$$\begin{aligned} F_k(x,y)=&(a_{n-k+1}(x)+a_{n-k+2}(x)y+\cdots+a_n(x)y^{n-k+1})g(x,y) \\ &-(b_{n-k+1}(x)+b_{n-k+2}(x)y+\cdots+b_n(x)y^{n-k+1})f(x,y) \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる．関孝和は (2) から行列式の概念に到達した．彼は (2) の各式 F_k に x の多項式 A_k を掛けて得られる式

$$M=A_1(x)F_1(x,y)+A_2(x)F_2(x,y)+\cdots+A_n(x)F_n(x,y)$$

に関して，$y^k,\ k\geqq 1$ の項がすべて 0 になるような $A_k(x)$ を見出し，$M(x)=0$ を終結式と定義した．今日の用語を使えば関孝和は行列 (a_{ij}) の a_{1k} に対する余行列式 Δ_{1k} を A_k としてとり，第 1 列に関する展開式を使って行列式を定義した．

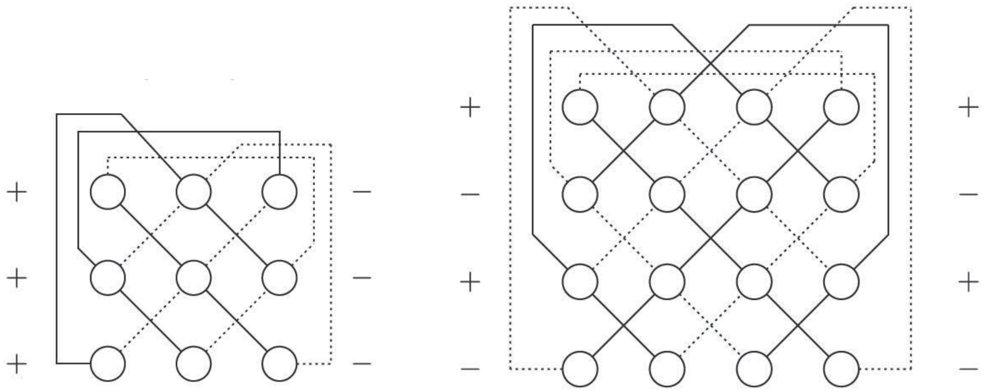


図 19　関孝和の交式・斜乗．左の 3 次の行列式の場合は実線方向に行列の成分を掛けたものは正，破線方向に掛けたものを負として足したものが斜乗である．今日サラスの方法と呼ばれる行列式の計算法であるが，関孝和の方がはるかに早くこの計算法を見出していた．右の 4 次の行列式の場合も実線方向の行列成分の積は正，破線を負として足し合わせたものが 4 次の斜乗．これだけでは 4 次の行列式は計算できないので，元の行列の行を (1,3,4,2) 及び (1,4,2,3) と入れ替えてできる行列 (これを交式という) の斜乗を取って足し合わせると 4 次の行列式が定義できる．

関はこの方法を面倒と思ったようで，2 次の行列式や 3 次の行列式が行列要素を斜めに掛けて (斜乗と関は呼んだ）和差を取ることによって得られることに気づき，それを拡張しようとしたが，5 次以上の行列式で間違えた．この間違いは後の和算家によって訂正された．

なお，関の「解伏題之法」の後で大坂の数学者であった井関知辰(ともとき)は元禄 3 年 (1690) に『算法発揮』を出版し，そこで行列式を第 1 行に関する展開式として定義した．『算法発揮』は行列式に関する世界初の出版物である．和算書コレクションには『算法発揮』も含まれている．

10.2　ベズーの終結式の理論

一方関孝和より 81 年遅れて西洋数学ではベズー (Étienne Bézout, 1730-1783) が初めて終結式の理論を完成させた．

Étienne Bézout: Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations, Hist. de Acad. Roy. des Sciences, Ann. 1764, pp. 288-338.

大変興味深いことは，終結式を定義するのにベズーも関孝和と全く同じ方程式系 (2) を使っていることである．ベズーの場合は関孝和と違って，先ず行列式を定義し，その定義を使って方程式系 (2) の係数の作る行列からできる行列式を終結式と定義した．

関孝和もベズーも終結式は余分の因子を含んでいることに気づいており，そうした因子を除去することに多大の関心を有していた．ベズーはこの問題を徹底的に追求し，著書

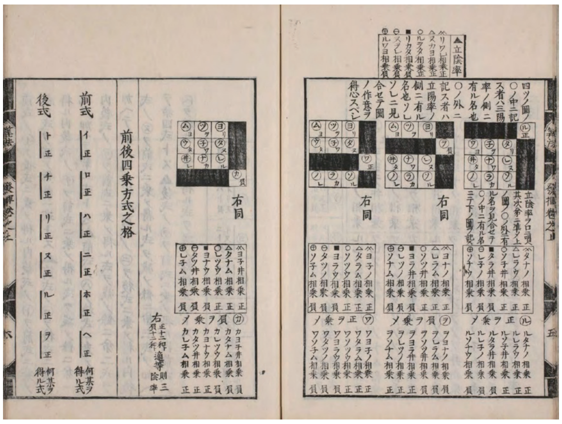


図 20　井関知辰『算法発揮』巻之上での 4 次の行列式の定義．和算では式は上から下へ記したので，『算法発揮』の行列では今日の行列で列に当たるものが行，行に当たるものが列であり，さらに右から左に文章を記したので，一番右が第 1 行になっている．今日の行列と対応させるには，図を 90° 反時計回りに回転させる必要がある．

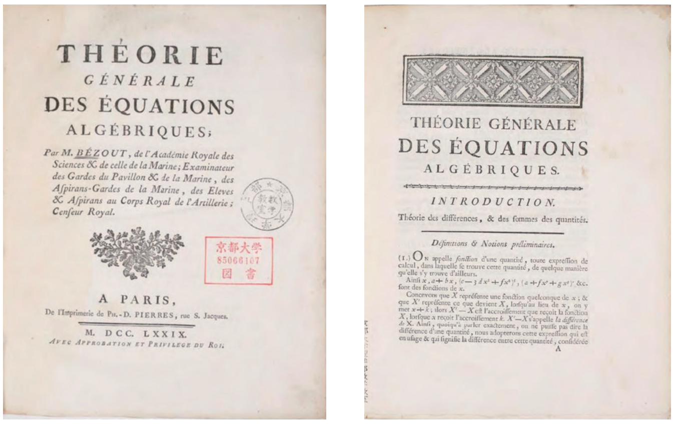


図 21　ベズー『代数方程式論』

Étienne Bézout : “Théorie générale des équations algébriques”, Paris, 1799

を発表している．これは数学教室の貴重書ライブラリーに収められている．

行列式と終結式については西洋数学ではライプニッツ・ニュートン以来考察が重ねられてきた．

ニュートンは『普遍数学』

Isaac Newton : “Arithmetica universalis : sive de compositione et resolutione arithmetica liber : cui accessit Halleiana aequationum radices arithmetice inveniendi methodus”, Cambridge, 1707,

の中で次数が 2 や 3 の場合に終結式を計算している．『普遍数学』も貴重書コレクションに含まれている．この『普遍数学』はニュートンのケンブリッジ大学での講義をもとにしているが，

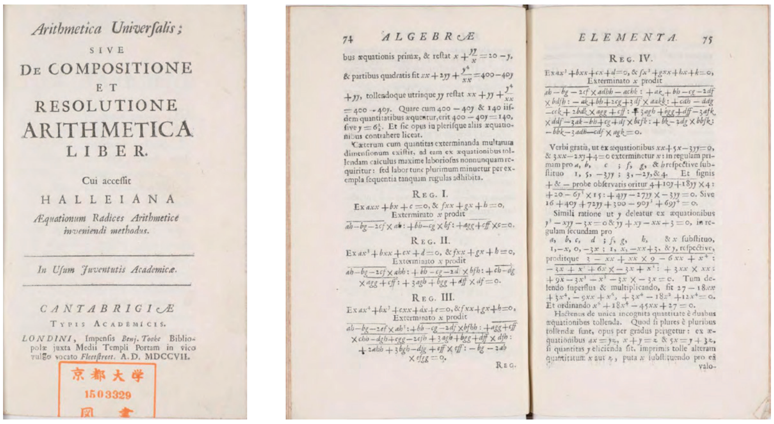


図 22　ニュートン『普遍代数』左の扉には著者名が記されていない．右は 3 次式までの終結式が記されている．

ニュートンに無断で出版された．後に英訳が出版されている．

　マクローリン (Colin MacLaurin, 1698-1746) も『代数学』を出版している．

Colin MacLaurin: “A treatise of algebra, in three parts”, London, 1748

本書も貴重書コレクションに含まれている．本書では 2 元および 3 元連立 1 次方程式のいわゆるクラメールの公式が記されている．また，本書のフランス語訳も出版されており，それも貴重書コレクションに含まれている．

Colin MacLaurin : “Traité d’algèbre, et de la manière de l’appliquer”, Paris, 1753

　クラメールの公式を記したクラメール (Gabriel Cramer, 1704-1752) の著作は

Gabriel Cramer : “Introduction à l’analyse des lignes courbes algébriques”, Genève, 1750.

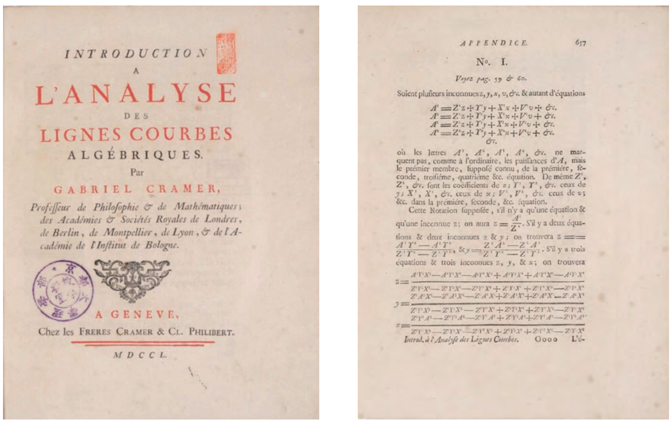


図 23　クラメール『代数曲線の解析序説』

であり，これも貴重書コレクションに含まれている．ベズーはクラメールの公式から一般の行列式の定義のヒントを得ている．

さらに，ベズーは行列の最後の列に関する展開式を行列式の定義として採用している．関孝和は (3) を y に関する昇冪の順に記して，係数の行列式をとって終結式と定義したが，ベズーは (3) に当たるものを降冪の順に記しており，ベズーの行列の最後の列に関する展開式は関の最初の列に関する展開式に符号を除いて一致している点も興味深い．

終結式は後に Sylvester によって今日使われる形に定義されたが，それは関やベズーの定義と符号を除いて一致する．