望月拓郎さんへのインタビュー
朝日賞受賞を祝して

東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構
中島　啓

新春に望月拓郎さんが朝日賞を受賞されました．この数学通信では本来でしたら，受賞理由となった調和バンドル，ツイスター D 加群の理論の数学的な説明をするところですが，すでに第 16 巻 2 号（2011 年度）に学士院賞受賞の際の斎藤恭司さんによる紹介があります．重複を避けるために，中島が望月さんにインタビューするという形で，望月さんの数学の一端を読者の方に知っていただきたく思います．また，第二節では，攻守を交換して，私が望月さんの質問を受けます．

1　望月さんへの質問

中島：まずは，学生時代にどんなことを勉強しておられたかお聞きしたいと思います．望月さんの指導教員は河野明先生でしたが，望月さんの研究分野は代数トポロジーというわけではありませんよね．学生のときはどんな勉強をされていたのでしょうか？

望月：恥ずかしながら，大学院の頃は方針が定まらずにフラフラとしていました．代数幾何や微分幾何を中心に勉強していたように思うのですが，長い間，その当時のことは思い出さないようにしていたので，正直なところ，あまりよく覚えていません．主に赤堀喜信さんや川口周さんとの自主ゼミで勉強していて，代数幾何を多少なりとも勉強できたのは彼等のおかげだと思います．D 加群も彼等とのセミナーで勉強しました．どちらかというと，教養部・学部の頃の方がきちんと勉強していたような気がしていて，その頃に土基善文さんが指導してくださった自主ゼミで習得したことが，自分の数学的基盤になっていると思っています．

中島：朝日新聞のインタビューで，阪市大に赴任した頃まではいろいろなものに手を出して研究されていた，と言われていますが，どのような研究をされましたか？

望月：書いていて恥ずかしいのですが，結局のところ，「こういうことを研究していました」と今でも言えるようなものはほとんどありません．辛うじて挙げられるのは，切断やパラボリック構造などの付加構造をもつ場合も含めて，代数的ベクトル束のモジュライ空間から不変量を構成し，安定性条件の変動にともなっ

てモジュライが変わる時に，不変量がどう変わるかということについての研究ですが，それも後年に何回かやり直してようやく出版に至りました．

中島：いろいろな分野を勉強されていたとしても，そこから，それぞれの分野で論文を書く，というのは，また一段階上の難しさがあると思います．どんな感じで研究を進めておられたのでしょうか？ それぞれの分野の問題を同時に考えておられたのでしょうか？

望月：例えば，プレプリントをみていると「こういったことはできそう」と書かれていることがありましたので，それを実際に実行してみることを一応の目標に設定して，関連する事柄を勉強する，というようなことを試みていました．それで良い研究をできると思ったわけではないのですが，他にどうしたら良いのかわからず，また，そういったことでも続けていくうちにもっと深いところにたどり着けるかもしれないと思っていました．

何も考えずに大学院に進学したのが良くなかったのだと思いますが，具体的に研究したい数学的課題を持っていませんでしたし，本当に新しいアイディアを創出するような才能もありませんでした．自分は研究者には向いていないのでやめようと思いましたし，そうすべきだったのかもしれませんが，いろいろ考えているうちに，どうすれば自分に研究ができるのか？ という「課題」に興味を持って取り組むようになりました．そのような状態で，研究を続けることができたのは，河野先生の御助力があったことと，大阪市大に助手として採用して頂けたからで，とても感謝しています．

中島：いろいろなことを研究されていたことが，そのあとから今までの研究に役に立っていると思われますか？　同じようにすることを学生に勧めますか？

望月：過去の思考や行為が今の自分を形作っている，という意味では「役に立っている」のだとは思いますが，大学院生の頃の活動は不本意なものであり，なるべく思い出さないようにしています．また，その人が置かれた状況に応じてどうしていくかを考えていくことになると思いますので，学生さんに私と同じようにすることを勧めるつもりはありません．

ただ，自分自身の経験から抜け出せずに，結果として同じようなことを若い方々に押し付けてきたかもしれないと思い返しています．

中島：これは私個人の興味ですが，先ほどのお答えでも紹介された代数曲面の層のモジュライの壁ごえの研究について質問させていただきたいと思います．

この研究は Donaldson 不変量と Seiberg–Witten 不変量が等価であることを

示した Göttsche，吉岡さんと私の共同研究や，最近の Vafa–Witten 不変量の研究でも使われていますが，どういう動機で研究したのでしょうか？

望月：正確にはよく覚えていないのですが，博士課程の頃，深谷賢治先生の影響でモジュライの仮想基本類に関心を持っていて，仮想基本類のアイディアを使って代数曲面の Donaldson 不変量を構成したとして，何かメリットはあるのだろうか，ということを意識していたのだと思います．そして，Donaldson 不変量と Seiberg–Witten 不変量の等価性の証明へのアプローチとして，モジュライ空間のコボルディズムを構成することで Donaldson 不変量や Seiberg–Witten 不変量を比較するアイディアが Garcia–Prada のサーベイに紹介されていて，そういう話をするには，“滑らかさ” が必要になりそうなので，仮想基本類を使えるのではないかと考えたのだろうと思います．

中島：なるほど確かに自然な問題のように思います．

望月さん自身は，この研究の続きはされていないように思いますが，理由はありますか？　最近の進展についてはどのように思われますか？

望月：続きを研究してみたいという気持ちはあったのですが，混合ツイスター D 加群の本を書いているうちに時間が過ぎてしまい，自分の中でその方面の研究を再起動するのが難しくなってしまいました．最近の進展についてですが，自分の良くないところだと思うのですが，他の人達が研究を進めてらっしゃることに関しては，その方々におまかせしておく方が良いとか，割り込むのは良くないと感じてしまい，むしろそこから遠ざかってしまう傾向にあり，書いていて恥ずかしいのですが，なにか言えるほどにはフォローしていないです．すみません．

中島：もともとは滑らかな実 4 次元多様体で考えられていた問題ですが，代数曲面に舞台を設定することで，必要な道具立てを準備されました．実 4 次元多様体で同じような道具立てを作ることは考えられていますか？

望月：どちらかというと，実 4 次元でやってみるよりは，代数的な場合に導来代数幾何学として整備された理論の観点からもう一度やりなおしてみたいように思います．（そのようなことは，もうどこかでなされているのかもしれませんが.）

中島：望月さんの研究の中で，たくさんの人に知られているものとして柏原予想の解決があると思います．

柏原予想は，どのような経緯で知ったのですか？ また，研究はどのような経緯で始められたのでしょうか？　この方向の最初のお仕事は，2002 年の Simpson たちの仕事を射影多様体から準射影的な場合に拡張する，という研究だったと

思いますが，柏原予想は引用されていないですよね．この時点では，柏原予想は視界に入っておられたのでしょうか？

望月：「柏原予想」の存在はプリンストン研究所に滞在中，2003 年 1 月に寺杣友秀さんに教えていただきました．

調和束の漸近挙動の研究は大阪市大に就職した頃（1999 年）に始めました．もともと，Simpson さんの “Mixed twistor structures” というプレプリントに，“穴あき円板上の調和束がある条件を満たす場合には極限混合ツイスター構造が得られるはずだ”，という予想があって，それを証明してみようと思ったのが研究を始めたきっかけでした．その時は柏原予想は視野に入っていませんでした．

プリンストン滞在の 1 年目から 2 年目（2001 年–2002 年）にかけて，tame という条件を課した上で，さらにパラボリック構造が自明で Higgs 場の residue が冪零という条件を課した特別な場合に，調和束の漸近挙動の研究が進みました．（これが調和束に関する最初の仕事になります．）より一般の場合を研究することが次の目標になりますが，さらにその先ではどのようなことが課題になり得るかを考えたように記憶しています．ヒッグス束や平坦束の小林–Hitchin 対応の拡張も自然な問題なのですが，それとは別に，Simpson さんの同じプレプリントに Meta Theorem として述べられている “ホッジ構造についての話はツイスター構造の場合に一般化されるはずだ” というアイディアに触発されて，ホッジ加群のツイスター版というものを考えると面白そうな気がしましたし，やればできるはずのことだと思いました．そして，その意義として何があり得るのかということを考えて，IAS で Mark de Cataldo さんが，ホッジ加群の分解定理について言及していたことを思い出し，「分解定理というものはそれなりに大事らしいので，より一般的な対象に拡張するのはそれなりに意味のある話になりそうだ」と考えたように記憶しています．（その時に，準射影多様体上の半単純局所系の多重調和計量についての Jost–Zuo の仕事を知っていたかは覚えていませんが，知っていたのではないかと思います．）

そのようなことを寺杣さんにお話ししたら，それは「柏原予想」と関係があるということを教えてくださったのでした．また寺杣さんは Sabbah さんがそのような方向の研究をされているということも教えてくださいました．ただ，Sabbah さんのプレプリントが彼のホームページに公開されているのを見つけたのは何ヶ月かたった後で，その時は Sabbah さんが実際に何をされているのかはわかりませんでした．（わかっていたら，自分ではそれ以上ツイスター D 加群について研究しなかったかもしれません．）

それより一年ぐらい前に Deligne に調和束の漸近挙動の研究について話す機会がありました．（歴史上の偉人には敬称をつけないのと同じように，Deligne にも敬称はつけないことにします．）恥ずかしいことに，その時にコメントとして述べてくださったことを私はほとんど理解できなかったのですが，Drinfeld の名前を挙げてらっしゃったことを覚えています．Drinfeld は正則ホロノミック D 加群についての「柏原予想」を数論幾何的な方法で解決するためのアイディアを説明した論文を書いていて，それは Gaitsgory や Boeckle–Khare によって実現されました．ですから，Deligne はおそらく「柏原予想」に言及してらっしゃったのであろうとずっと後になってから気付き，有益なアドバイスでも受け取る側に力がないと届かないのだなあと思ったのでした．（ただ，理解したら，逆に研究しなかったかもしれません．）

中島：この 2002 年の望月さんの仕事の以前の Biquard や Simpson の論文では，因子が滑らかなど強い仮定がおかれていて，使えるような状況にはなく，多くの人がこの困難を克服できていなかったと思います．望月さんは，克服できると思われていたのですか？（もしもあるとして）この研究で苦労されたのは，どのようなことですか？

望月：2003 年頃は正則な場合のことしか考えていなかったのですが，私の認識としては，やればできるはずのことだと思っていました．漸近挙動の研究ではホッジの時の話が単純に一般化されるわけではありませんでしたので，考えないといけないこともいろいろありましたが，苦労だとは思いませんでした．自分なりにきちんと整理して書く，という作業は大変でした．

中島：その後 Sabbah がツイスター加群の理論を作り，望月さんは 2003 年に arXiv に投稿された論文で，ツイスター加群を使って柏原予想の解決をされています．はたから見ると，あっという間に進んだように見えます．（笑），こういう時間経緯でいいのでしょうか？　苦労する暇さえなかったのではないですか？

望月：時間経緯についてですが，正則な場合に関していうと，2004 年に準射影多様体上の平坦束の半単純性が無限遠で “純虚” という条件をみたす多重調和計量の存在によって特徴づけられるというプレプリントを書きましたが，それで正則な場合の柏原予想が解決できたことになります．（2003 年のプレプリントとあわせて，2007 年に出版されました．）正則な場合は，D 加群や偏屈層の理論が使いやすく整備されていて，Simpson さんの Meta Theorem と齋藤盛彦先生のホッジ加群の理論が非常に強力で，調和束と平坦束の関係についての研究（Corlette, Jost–Zuo）の蓄積もあったので，調和束の漸近挙動の研究やツイスター D 加群の理論的整備が進めば，できるような状況にあったのだと思います．

非正則な場合（不確定特異点を持つ場合）まで含めると，もっと時間がかかっていて，最終的には 2011 年に出版された本で解決されました．

非正則な場合の問題としては，高次元では不確定特異点の構造がよくわからなかったことが挙げられます．代数多様体の特異点解消のように，適当な双有理変換をすることで簡単な構造になるということが予想されていたのですが，その証明には苦労しました．（代数的な場合は私の仕事で，Kedlaya さんが異なる方法でより一般的な場合を証明しました．）

それから，正則な場合には，Jost–Zuo の仕事を精密化することで半単純性との関連が得られたのですが，その方法は非正則な場合には拡張できないものだったので，かわりに小林–Hitchin 対応の方法を用いました．この方向では，Simpson さんが 1 次元の場合に研究し，因子が滑らかという仮定のもとで Biquard が高次元の場合を研究していましたが，因子が正規交叉の場合に拡張するのは，非自明な問題だったと思います．

また，非正則な場合には，平坦束の有理型平坦束への拡張が一意的ではないので，どのように特徴づけるのか，という問題もありました．

非正則な場合への拡張にはそれなりに「苦労」もあったのですが，今から思うと楽しい研究でした．

中島：最近は，調和バンドルのお仕事の他に，モノポールの研究をされています．この研究は，どういう動機から始められたのですか？

望月：調和束の研究で得られた知見を，関連する対象の研究で活用したい，というのが動機の一つです．関連する対象の中でもモノポールやインスタントンに関心を持ったきっかけはいくつかありました．

一つは，塚本真輝さんに二重周期性を持つインスタントンの漸近挙動についてご質問いただいたことでした．調和束は底空間の計量に依存せず，部分多様体に制限しても調和束という性質が保たれる，ということが，調和束の漸近挙動の研究ではよく使われます．ですから，底空間の計量に依存するインスタントンの場合には自分の研究は無力なのだろうと思っていました．いろいろ調べていくうちに，少くともこの場合は，調和束の漸近挙動に比較的近いものであることがわかりました．周期性を持つモノポールの漸近挙動も調和束の漸近挙動に比較的近いことも意味しますので，この方面で調和束の研究を活かせそうに思いました．

それから，中島先生の Nahm 変換についての講義を聴く機会があり，$\mathbf{C}^*$ や楕円曲線上の調和束の Nahm 変換について関心を持ちました．もちろん，これらの場合は先行研究があったのですが，より精密なものにしていく余地がかなり残されているように見えました．（そういった精密化にどのぐらい意義があるかは別の話ですし，興味を持つ人はあまりいないだろうとも思っています．）

あと，コンパクトリーマン面と円周の直積上のモノポールの小林–Hitchin 対応に関する Hurtubise さんの講演を聴いて，周期性を持つモノポールの小林–Hitchin 対応に関心を持ちました．$\mathbf{C}^*$ 上の調和束の Nahm 変換も考慮すると，差分加群や q 差分加群といった代数的な対象とモノポールとの対応が見えてきて，数学的には面白いのではないかと思いました．（実際には，私以外に興味を持つ人はほとんどいませんが．）

中島：私の Nahm 変換についての講義というのは，2012 年に日露交流の集中講義でしたものでしょうか？ 興味を持っていただいて幸いです．クーロン枝の研究の中で，特異点付きのモノポールのモジュライ空間が自然に現われました．通常のクーロン枝の場合は $\mathbf{R}^3$ 上のモノポールですが，K 理論版や楕円コホモロジー版を考えると，$\mathbf{R}^2 \times S^1$ や $\mathbf{R}\times$ 楕円曲線上の特異点付きモノポールが対応すると考えられています．

中島：最後に，少し曖昧になりますが，今後，どのように研究を進められようと考えておられるますか？

望月：あまり面白いことではないかもしれませんが，ツイスター D 加群の理論をもっと使えるものにするのが一つの課題だと思っています．ツイスター D 加群の話は「柏原予想」の解決と Simpson さんの Meta Theorem だけに動機付けられていたともいえて，それ以外の応用を私自身はあまり考えていませんでした．短期的には，例えば，Sabbah さんや Yu さんが導入した不確定ホッジ加群というものの基礎付けや，それに関連してツイスター D 加群の理論の精密化をしてみたいと思っています．

モノポールや差分加群関連では，例えば，曲線上の調和束，ヒッグス束，平坦束についての研究に類似したことを調べてみるのが当面の課題で，高次元の場合への拡張も考えてみたいと思っています．

他にも，その時その時に興味を持ったことについて研究していくのではないかと思います．自分のやっていることにはあまり意義がないという思いに苛まれるのでしょうが，細々とでも続けていきたいと思っています．

2　望月さんからの質問

望月：研究課題をどうやって見つけてらっしゃるのでしょうか？（研究において，適切な課題を見つけるのが一番難しいことのように思っています．）

中島：研究者に成りたての頃は論文が書ける課題を探してばかりで，結局は誰でも気が付けばすぐにできてしまうような浅い研究しかできていなかったように思います．あるいは共同研究者の方の知識や能力に頼った研究でした．望月さんの先の答えを聞かせていただいて，改めて当時のことを思いだし，はじめの頃に苦労されたことをお聞きして，共感させていただきました．私は，論文は継続して書けてはいたものの，もう少し他の人は思いつかないことができないか，と考えていました．そのとき，ICM90 で Lusztig の講演を聞いて，その 1 年前の夏に Kronheimer との共同研究で得たゲージ理論の結果と結び付けたいと思いました．それができるまでに二年弱かかり，できてみれば Lusztig の研究の大きな枠組みの中の一つの成果と言えなくもないですが，ゲージ理論とそういうところが結びつく，というところが新しい視点でした．そのあとは，この視点から見ることで，いろいろと見通しがよくなったように思います．また，Vafa–Witten の論文が出てきて，理論物理とつながりができたのも大きく，そちらの方にも興味が持てたのがよかったように思います．

　そのあと自分でうまく見つけられたと思う研究課題は，数年前に始めたクーロン枝です．これは 20 年以上前に Cambridge で聞いた Witten の連続講演が頭に残っていたのと，Hanany が私が理解できるまで何度か同じ内容の講演をしてくれたことで，うまく行きました．Hanany の最初の講演を聞いたときはたぶん他の問題を考えていたので，彼のやっていることの数学的な理解がすぐ近くにあることに気が付きませんでした．でもその問題が解決して，頭の中に余裕があるときに Hanany の講演を再度ちょうどよいタイミングで聞くことができ，そのあと一ヶ月ほど考えて，おおまかな枠組みを理解できました．そのときは環構造の構成はもう少し難しいやり方を考えていて，すぐにはできないのではないかと思っていたのですが，Braverman に話をしたら，ある知られている結果が構成の例になっていることを指摘してくれて，それで進みました．いろいろが，たまたまうまく合いましたが，タイミングが合わなかったら今でも見つけられていなかったように思います．

望月：研究が順調には進まない時，例えば証明したい主張をなかなか証明できない場合が，中島先生にはないかもしれませんが，仮にあったとして，どうされるの

でしょうか？（私はこの質問をいろいろな方々にしていた時期があるので，以前にも伺ったことがあるかもしれませんが，その場合はご容赦ください.）

中島：たぶん望月さんの研究の進め方と，私のやり方ではだいぶ違うのではないかと思っています．私から見ると望月さんの研究はどれも難しく，私だったら初めから諦めてしまいそうなテーマにチャレンジされているように見えます．私の場合は，証明したいことがなかなか証明できないことよりも，目標の主張を設定するまでが分からないケースが多く，そうすると，どう手を付けたらいいのかも分からないので，その時点で中断し，他のことを考え出すことが多いように思います．例えば，Nekrasov のインスタントンの数え上げを吉岡さんと研究する前に，ブローアップの上のインスタントンのモジュライ空間をいろいろと調べましたが，Donaldson 不変量のブローアップ公式をその研究の中でどう理解したらいいのか分からなかったので，数年間放置してありました．今から見直すと，発散する積分をどういう風に処理するのかが見えていなかったのです．物理学者の Nekrasov の論文が出たときに，その放置された研究を思い出して，Nekrasov のやり方をまねて積分を考えてみるとうまく行くことが分かりました．彼の予想が解決できることまでは最初は想定してはいなかったように記憶していますが，吉岡さんと積分を計算したりしているうちに，Seiberg–Witten 曲線から出発して書かれている物理の論文がゲージ理論の枠組みで理解できるようになりましたので，その中のある論文をまねて予想が解決できました．

望月：中島先生はとてもお忙しいと思うのですが，どうやって研究時間を捻出されているのでしょうか？
　例えば，忙しい時でも，短い空き時間というのはないわけではないように思うのですが，そういった時間も研究にあてることができるのでしょうか？

中島：理学部の数学教室の専攻長（教室主任）をしたときは，教授になってから 3 年めで，教室の運営の何も知らなかったのでそのときはかなり大変でした．その一年は研究はほとんどしていなかったように記憶しています．ただ，そのときに教室の運営をして，研究には直接つながらないもろもろのことを知ったことは，そのあとでいろいろな仕事を務めるときにも役に立ったような気がします．また，専攻長の任期が終わったあとには，大変な仕事は回ってこないように配慮していただき，当時は今よりも頭の回転がまだ早かったこともあって，比較的すぐに研究のペースに戻れました．そのあと二回異動しましたが，教育義務が軽減されている研究所にいますので，忙しいというと他の人に怒られます．最近は，国際数学連合の関係の仕事をいくつか務めています．これは世界中の数

学者たちと協力しないといけない仕事で，日本を含むアジアの数学者を代表する側面もあります．今のところは，忙しい時期が短期に集中しているので特に研究に影響は感じていません．ICM のプログラムの section panel から始まって，program committee，ICM structure committee とだんだんと難しい委員に上がってきて，それにつれて ICM や IMU のことを知るようになったことがよかったように思います．一度に新しいことをたくさん理解する必要がなく，時間をかけて理解する余裕があった，ということでしょうか．

望月：共同研究はどうやって始められたのでしょうか？ Okounkov さんへのインタビューで，共同研究を実際に始める前に「それぞれの研究について相互に理解するため，数年が必要でした」とおっしゃっていますが，その期間は共同研究を目指して相手の研究について勉強されたのでしょうか？

中島：このインタビューでは，吉岡さん，Göttsche，Braverman，Finkelberg のことを念頭において話していました．どなたも私の研究と関連が深いことをされていたので，議論をしたり，また関係し合う論文をお互いに執筆することは出会ってからすぐに起こりました．ただ，そういうレベルで研究交流を行うのと，共同研究を行って共著論文を書くのでは，ステップがもう一つ必要で，数年間かかりました．まずは，共同で考えることで解決できると期待できる問題が見つかること．これは，お互いができること，得意なことを知り合う必要があるように思います．それから，双方がその問題を共同で研究しよう，と能動的に思えることも必要なように思います．これは，お互いの信頼関係ができるかどうか，にもよるように思います．人付き合いが上手い下手でも事情は違うと思います．私の場合は，そんなに上手な方ではないので時間がかかったかもしれません．

それでは，本日はどうもありがとうございました．

望月：こちらこそ，どうもありがとうございました．大変に畏れ多い経験でした．