随想

空間に関する直観はどこまで正しいか

上 正明

幾何学で扱う図形や空間には，目に見えるものからそれが困難な高次元のものまで多種多様なものがある．それらを判別したり分類する際，最終的に厳密な証明が必要であっても，空間に関する何らかの直観的イメージなしに議論をすることは多くの場合あり得ない．しかしその直観が正しいのかどうかは，目に見える対象に対しても時に問題になる．視覚化しやすい対象として，結び目（3 次元空間内の閉曲線）の例を考える．結び目は平面への射影図に上下の立体交差のデータを加えて表されるが，自分自身と交わらないように空間内で連続変形して移り合うものは同じとみなすため，同じ結び目の射影図は無限個存在する．異なる射影図が同じ結び目を表すことと射影図にある基本的な変形を有限回施して移り合うことが同値であることは知られているが，これだけで実際の判別を行うのは容易ではない．変形自体は目に見えるが，その自由度がありすぎてこどの箇所に何回の変形をすれば見極められるのかは，図が複雑化すれば容易にはわからない．実際に長年異なる結び目の射影図と思われていたが同じ結び目だったという例がある．

一方トポロジーで扱う空間（具体的には多様体のこと）の場合，次元が高いと直接図示できないが，空間どうしが同じかどうか（ここで同じというのは「微分同相」を意味する）を判定する原理はある．しかし次元が低い（3，4 次元の場合）とその原理が通用しない．その代わりにそれらのケースでは 3 次元空間内のリンク（閉曲線の集まり，結び目同様射影図で表せる）で間接的に表示ができ，2 つの表示が同じ空間を表すことと，リンクどうしが有限回のある種の基本的な変形で移り合うことが同値であることもわかってはいる．しかし結び目の場合と同様，これだけで実際の判別を行うことは容易にできない．そもそも同じでない場合は変形によっては永久に移り合わないので，それを判定するには，基本的な変形で値の変わらない何らかの数学的量（不変量と呼ばれる）を見い出し，その値が異なることを示さなければならない．私は 4 次元の場合に特に興味があるのでその場合について述べると，長年同じがどうか不明だった例は多数存在する．そのうちのあるものは複雑な変形操作により同じであることが判明し，あるものは（十数年に一度あるかないかの新たな理論の出現により登場した）不変量によって異なることが証明された．しかし今でもどちらか不明な例は無数に存在する．もし同じであったとしてもそれを判定する簡単なアルゴリズムなどがあるわけではなく，AI のような手段で確実な判定をするのは不可能だろう．一方で「完全な不変量」（その値が等しければ空間が同じであることがわかるような）がもし見つかったとしても（本当にあるかどうかはわか

らない）それは計算が極めて困難なものになるに違いない．いずれにしても判定の最初のきっかけには何らかの幾何学的直観が働かなければならないだろう（同じかもしれないと思わないとそもそも証明してみる気にならない）．しかし直観はしばしば誤るので（ペレルマンが証明する以前に 3 次元ポアンカレ予想を証明したという主張がいろいろあったがすべて間違っていたか少なくとも証明しきれていなかったように），それが正しいかどうかは別問題である．

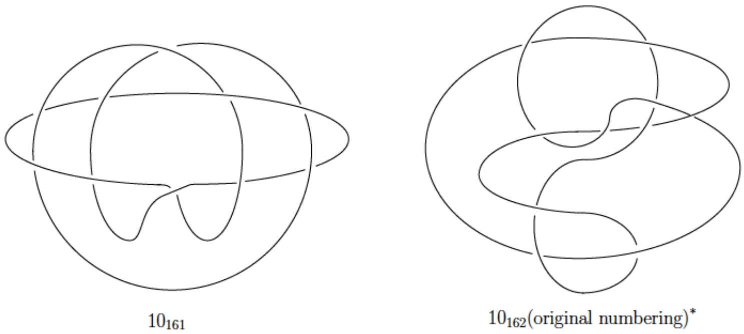

FIGURE 1. 同じ結び目であると指摘される (Perko, 1974) まで別ものと思われていた結び目の射影図 (Rolfsen: Knots and Links, Publish or Perish, 1976 の表に基づく図）．番号をずらした表も流布しているが，文献によっては元の表との混同があるらしい．