

代数学入門 期末試験（解答例（2014 年 1 月 28 日訂正））

問題 1 (1) 『任意の $\alpha, \beta \in G$ に対し, $\alpha\beta^{-1} \in G$ 』を示せばよい. $\alpha = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$

とおく. $\alpha\beta^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xs^{-1} & 0 \\ 0 & yt^{-1} \end{pmatrix} \in G$ だから, G は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群である.

(2) G が $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群であることと, 『(※) 任意の $\alpha \in GL_2(\mathbb{R})$, $\beta \in G$ に対し, $\alpha\beta\alpha^{-1} \in G$ 』は同値. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in G$ に対して計算する.

$\alpha\beta\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin G$ だから (※) は成り立たない. よって, G は $GL_2(\mathbb{R})$ の正規部分群ではない.

問題 2 $\sigma, \sigma' \in S_6$ が共役であることと, σ と σ' のサイクル型が等しいことは同値である. σ は $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ という置換を引き起こすから, σ のサイクル型は $(1, 2, 3)$ である. よって, サイクル型が $(1, 2, 3)$ の元の個数を求めればよい.

集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を, $\{a\} \cup \{b, c\} \cup \{d, e, f\}$ の形に分ける方法は, $6 \times {}_5C_2 = 6 \times 10 = 60$ 通り. $\{a\} \cup \{b, c\} \cup \{d, e, f\}$ に対して, 2 つの置換 $(b\ c)(d\ e\ f)$ と $(b\ c)(d\ f\ e)$ を対応させることで, サイクル型が $(1, 2, 3)$ の元を重複無くすべて作ることができる.

したがって, S_6 には σ と共役な元は $60 \times 2 = 120$ 個ある. (※ 試験終了後に配布した解答例は誤りでした.)

問題 3 (1) $143 = 11 \times 13$ なので, 中国剰余定理より環同型 $\mathbb{Z}/143\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ が存在する. よって, 群同型 $(\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times$ が存在する. 原始根の存在より, $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ なので, 群同型

$$(\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \quad (\text{この同型において, 左辺は乗法群, 右辺は加法群})$$

が存在する. よって, $(\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})^\times$ は位数 $10 \times 12 = 120$ の群である.

(2) 同型 $(\mathbb{Z}/143\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ において, 左辺における f は, 右辺における 2 倍写像に対応する. よって,

$$\text{Im } f \cong \{(2a, 2b) \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}\}$$

である. $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ において, 2 倍写像の像となる元はそれぞれ 5 個, 6 個あるから, $\text{Im } f$ は位数 $5 \times 6 = 30$ の群である.

問題 4 (1)

$$I = (3 + \sqrt{-2}) = \{(3 + \sqrt{-2})\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]\}$$

$$J = (11, 8 - \sqrt{-2}) = \{11\beta + (8 - \sqrt{-2})\gamma \mid \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]\}$$

とおく. $11 = (3 + \sqrt{-2})(3 - \sqrt{-2})$, $8 - \sqrt{-2} = (3 + \sqrt{-2})(2 - \sqrt{-2})$ はともに $3 + \sqrt{-2}$ で割り切れるから I の元である. よって, $J \subset I$ である. 逆に, $3 + \sqrt{-2} = 11 + (8 - \sqrt{-2}) \cdot (-1) \in J$ より, $I \subset J$ も分かる. よって, $I = J$.

(2) $\alpha = x + y\sqrt{-2}$, $\beta = u + v\sqrt{-2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $\alpha \neq 0$ とする.

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{u + v\sqrt{-2}}{x + y\sqrt{-2}} = \frac{(u + v\sqrt{-2})(x - y\sqrt{-2})}{(x + y\sqrt{-2})(x - y\sqrt{-2})} = \frac{ux + 2vy}{x^2 + 2y^2} + \frac{-uy + vx}{x^2 + 2y^2}\sqrt{-2} = s + t\sqrt{-2}$$

をみたすように有理数 s, t を定める. 整数 n, m を $|s - n| \leq \frac{1}{2}$, $|t - m| \leq \frac{1}{2}$ をみたすようにとる.

$\gamma = n + m\sqrt{-2}$, $\delta = \beta - \gamma\alpha$ とおく. このとき,

$$|\delta|^2 = |\alpha|^2 \cdot \left| \frac{\beta}{\alpha} - \gamma \right|^2 = |\alpha|^2 \cdot \left| (s - n) + (t - m)\sqrt{-2} \right|^2 = |\alpha|^2 \cdot \left\{ (s - n)^2 + 2(t - m)^2 \right\} \leq |\alpha|^2 \cdot \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right\} < |\alpha|^2$$

なので, $\beta = \gamma\alpha + \delta$, $N(\delta) = |\delta|^2 < N(\alpha) = |\alpha|^2$ が成り立つ. よって, 写像 N に関して $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ はユークリッド整域である.

問題5 M は $1, X, X^2, X^3$ を基底とする階数 4 の自由 $\mathbb{Z}$ 加群である. $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 1$, $\varphi(X^2) = 2 + 2X$, $\varphi(X^3) = 6X + 3X^2$ だから, 基底 $1, X, X^2, X^3$ に関する $\varphi: M \rightarrow M$ の行列表示は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. したがって, $\mathbb{Z}$ 加群の準同型 $\psi_A: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^4$ を $\psi_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ で定めたときの $\mathbb{Z}^4/\text{Im } \psi_A$ を求めればよい. 行列の基本変形を行うと,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから,

$$\begin{aligned} M/\text{Im } \varphi &\cong \mathbb{Z}^4/\text{Im } \psi_A \cong \mathbb{Z}^4/\text{Im } \psi_B \cong \mathbb{Z}/(1) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(0) \\ &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

が分かる.

ボーナス問題 $n = 1105$ は問題文の条件をみたす. 実際,

$$1105 = 4^2 + 33^2 = 9^2 + 32^2 = 12^2 + 31^2 = 23^2 + 24^2$$

が成り立つ.

($n = 1105$ の求め方 (例)) 整数 n を $n = x^2 + y^2$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) の形に書くことと, $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ において

$$n = (x + y\sqrt{-1})(x - y\sqrt{-1}) = \alpha\bar{\alpha}, \quad \alpha = x + y\sqrt{-1}$$

の形に分解することは同じこと. このような分解を 3 通り以上持つ n を求めればよい.

$\alpha = 1 + 2\sqrt{-1}$, $\beta = 2 + 3\sqrt{-1}$, $\gamma = 1 + 4\sqrt{-1}$ とおく. $5 = \alpha\bar{\alpha}$, $13 = \beta\bar{\beta}$, $17 = \gamma\bar{\gamma}$ だから,

$$1105 = 5 \times 13 \times 17 = (\alpha\beta\gamma)(\overline{\alpha\beta\gamma}) = (\bar{\alpha}\beta\gamma)(\overline{\bar{\alpha}\beta\gamma}) = (\alpha\bar{\beta}\gamma)(\overline{\alpha\bar{\beta}\gamma}) = (\alpha\beta\bar{\gamma})(\overline{\alpha\beta\bar{\gamma}})$$

と書ける. これを具体的に計算すると,

$$\alpha\beta\gamma = -32 - 9\sqrt{-1}, \quad \bar{\alpha}\beta\gamma = 12 + 31\sqrt{-1}, \quad \alpha\bar{\beta}\gamma = 4 + 33\sqrt{-1}, \quad \alpha\beta\bar{\gamma} = 24 + 23\sqrt{-1}$$

が得られる.