微分積分学 B 補充問題

1　次の極限が存在すれば，その値を求めよ．

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x-4(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \qquad (2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{y}{x}$$

2　(1) $\mathbb{R}^2$ 内の次の集合はそれぞれ開集合か，閉集合か，あるいはそのどちらでもないか？また，その集合は連結か？理由をつけて答えよ．

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \mid x^2-y^2<1\}, \\ B &= \{(x,y) \mid x^2+y^2<1\} \cup \{(1,0)\}, \\ C &= \{(x,y) \mid -x^2<y<x^2 \text{ かつ } -1<x<1\} \cup \{(0,0)\}. \end{aligned}$$

(2) 次の関数 $f(x,y)$ は $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ の上で連続か，また一様連続か？

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$$

3　関数 $f(x,y)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

をみたすとき，$z=f(\cos\theta,\sin\theta)$ に対し $\frac{dz}{d\theta}$ を求めよ．

4　(1) 関数 $f(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$ に対し，偏導関数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を計算せよ．
(2) $u=e^x\cos y,\ v=e^x\sin y$ で与えられる (x,y) から (u,v) への変数変換のヤコビ行列を計算せよ．このことから，(x,y) を (u,v) の関数とみたときの $\frac{\partial x}{\partial v}$ を (u,v) を用いて表せ．
(3) 微分可能な写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ がすべての $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ に対し $-f(\mathbf{x})=f^{-1}(\mathbf{x})$ をみたし，また $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ であるとする．ただし f^{-1} は写像 f の逆写像を表す．$n=2$ のとき原点 $\mathbf{0}$ における f のヤコビアン（関数行列式）の値を求めよ．また，それを実現するような写像 f の例を挙げよ．

5（やや難）(1) 2つの C^∞ 級実数値関数 $f(x,y)$ と $\varphi(y)$ について，$f(\varphi(y),y)=0$ がすべての y について恒等的に成り立つならば，ある C^∞ 級関数 $g(x,y)$ が存在して，

$$f(x,y)=(x-\varphi(y))\cdot g(x,y)$$

と書き表されることを示せ.（ヒント：$f(x,y)-f(\varphi(y),y)$ を考え，微分積分学の基本定理を用いよ.）
(2) C^∞ 級関数 $f(x,y)$ が $f(0,0)=0,\ f_x(0,0)=-1$ をみたすならば，$y=0$ の近傍で定義された C^∞ 級関数 $\varphi(y)$ が存在して，

$$f(\varphi(y),y)=\varphi(y)$$

が成り立つことを示せ.
(3) (2) の条件に加えてさらに $f_{xx}(0,0)f_y(0,0)+2f_{xy}(0,0)\neq 0$ ならば，$x=0$ の近傍で定義された C^∞ 級関数 $\psi(x)$ が存在して，

$$f(f(x,\psi(x)),\psi(x))=x$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：(1) を用いよ.）

6　(1) 関数 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3$, $g(x,y)=x^3+y^3-x^2+xy-y^2$ の極値をそれぞれ求めよ.
(2) 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで，関数 $f(x,y)=4x^2-4xy-y^2$ の最大値，最小値を求めよ.
(3) 平面内の曲線 $y^2=x^3$ と点 $(1,0)$ との距離を求めよ.

7　$\ell_a(x,y)=(x-a)^2+y^2$ として $f(x,y)=\ell_1(x,y)\cdot\ell_{-1}(x,y)$ とおく.
(1)　関数 $f(x,y)$ の停留点とそこでの関数の値を求め，それが極値であるかどうかを判定せよ.
(2)　$f(x,y)=1$ によって定まる曲線の概形を調べよ.（ヒント：第1象限において $(x,y)\to(0,0)$ とするとき $-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ の極限を調べ，それが曲線の形状にどのように関係するかを考えてみるとよい.）
(3)　$z=f(x,y)$ の表す曲面の概形を描け.（3次元的に表示してもよいし，等高線図を描いてもよい.）
(4)　曲線 $f(x,y)=1$ が囲む図形の面積を求めよ.（ヒント：極座標を使え.）

8　与えられた領域 G 上での重積分を計算せよ.

(1)

$$\int_G y^3 e^{xy} dxdy, \quad G = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x^2,\ 0 \le x \le 1\}$$

(2)

$$\int_G (x^2+y^2)e^{-x-y} dxdy, \quad G = \{(x,y) \mid |x+y| \le 1,\ |x-y| \le 1\}$$

(3)

$$\int_G (px^2+qy^2) dxdy, \quad G = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\ (a>0)\}$$

(4)

$$\int_G (x^2+y^2) dxdydz, \quad G = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le a^2\ (a>0),\ 0 \le z \le h\}$$

9　次の広義積分は収束するか？収束するならばその値を求めよ.

$$\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+x^2+y^2)^2}}, \quad G = \{(x,y) \mid x>0,\ y>0\}.$$

10　xyz-空間において，y 軸を軸とする半径 a の無限に長い直円柱と z 軸を軸とする半径 a の無限に長い直円柱が交わってできる領域の体積と表面積を積分を用いて求めよ.

略解

あくまで略解なので，細部の議論や計算は自分できちんと確かめること．

1 (1) 極限は存在しない．具体的に2とおりの近づき方で極限が異なることを示せばよい．

(2) $|(x+y)\sin(y/x)| \leq |x+y|$ なので極限は存在して 0.

2 (1) A は開集合，B と C は開集合でも閉集合でもない．また，A, B, C すべて連結．連結であることを確かめるには，任意の2点が（例えば原点などを経由する）折れ線で結べることを示せばよい．

(2) 原点以外での連続性は明らか．原点での連続性は容易に示せる（確認せよ）．よって連続．さらに有界閉集合上で連続なので一様連続.

3 合成関数の微分から $\frac{\partial z}{\partial \theta} = f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0.$

（質問がありましたので，別解を付けておきます.）

仮定より

$$f(x,y) - f(0,y) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt = \log(1+x^2+y^2) - \log(1+y^2)$$

だから，適当な y のみの関数 $g(y)$ を用いて $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) + g(y)$ と書ける．同様にして y に関する積分を考えると，適当な x のみの関数 $h(x)$ を用いて $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) + h(x)$ とも書けることになり，両者を比較すると $g(y) = h(x) = C$ なる定数でなければならない．ゆえに $z = f(\cos\theta, \sin\theta) = \log(1+1) + C = \log 2 + C$ となり，これは定数なので $\frac{dz}{d\theta} = 0$ である．

4 (1) $\tan f(x,y) = y/x$ として両辺 x や y で微分するとよい．答えは（たぶん）$f_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$，$f_y = \frac{x}{x^2+y^2}$．さらにこれらを微分して $f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$f_{xy} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$f_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

(2) ヤコビ行列は $\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$. この行列式が $e^{2x} = u^2 + v^2$ となることに注意して逆行列を求めると，$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{v}{u^2+v^2}$.

(3) 問題の条件より $f(-f(x)) = x$ なので，合成関数の微分を用いて両辺を微分すると

$$Df(-f(x)) \cdot (-Df(x)) = I \quad (I \text{ は単位行列})$$

従って $f(0) = 0$ より $A = Df(0)$ は $-A^2 = I$ をみたすので，$n = 2$ のとき簡単な計算から $\det A = 1$，例えば $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ととれることがわかる．

5 (1) $f(\varphi(y),y)=0$ を用いると

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,y)-f(\varphi(y),y)=[f(tx+(1-t)\varphi(y),y)]_{t=0}^{t=1} \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(sx+(1-s)\varphi(y),y)\cdot(x-\varphi(y))ds \\ &= g(x,y)\cdot(x-\varphi(y)) \end{aligned}$$

ここで $g(x,y)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(sx+(1-s)\varphi(y),y)ds$ とおいた．

(2) $F(x,y)=x-f(x,y)$ とおくと $F(0,0)=0,\ F_x(0,0)=1-f_x(0,0)=1+1\neq 0$ だから，陰関数定理より，ある関数 $x=\varphi(y)$ が存在して $F(\varphi(y),y)=0$ すなわち $f(\varphi(y),y)=\varphi(y)$ となる．

(3) $G(x,y)=f(f(x,y),y)-x$ とおくと，(2) の $\varphi(y)$ に対して $G(\varphi(y),y)=0$ がすべての y について成り立つので，(1) よりある関数 $H(x,y)$ が存在して

$$G(x,y)=(x-\varphi(y))\cdot H(x,y)$$

がなりたつ．これを x,y について微分することにより，$H(0,0)=0,\ H_y(0,0)\neq 0$ がわかるので，陰関数定理を用いると，ある関数 $y=\psi(x)$ が存在して $H(x,\psi(x))=0$ となることが示せるが，これはすなわち求める結論である．

6 (1) 停留点（臨界点）は $(X,Y)=(0,0),(2/3,2/3)$ で，Hessian $H(x,y)$ は $(0,0)$ では $H(0,0)=-4$ なので不定値，従って極値をとらない．$(2/3,2/3)$ では $H(2/3,2/3)=4$ かつ $f_{xx}(2/3,2/3)>0$ なので正定値，従って極小値 $f(2/3,2/3)=-4/27$ をとる．

(2) Lagrange の未定乗数を λ とすると，条件から $\lambda^2+3\lambda-8=0, 2x=(\lambda-1)y, 2y=(\lambda+4)x$ を得る．これから停留点（の候補）において $f(x,y)$ を求めると，$f(x,y)=(\lambda^2-4\lambda+2)y^2$ かつ拘束条件 $x^2+y^2=1$ より $(\lambda^2-2\lambda+5)y^2=4$ なので y^2 を消去すると

$$f(x,y)=\frac{4(\lambda^2-4\lambda+2)}{\lambda^2-2\lambda+5}=\frac{5\lambda^2-13\lambda}{13-5\lambda}=-\lambda,$$

よって，極大値は $(3+\sqrt{41})/2$，極小値は $(3-\sqrt{41})/2$.

(3) $g(x,y)=x^3-y^2=0$ の条件下で $f(x,y)=(x-1)^2+y^2$ の最小値を求める条件付き極値問題として Langrange の未定乗数法を使う．最小値，すなわち求める距離は（たぶん）$\sqrt{\frac{47-14\sqrt{7}}{27}}$.

7 (1) ２階までの偏微分を計算して，Hessian を計算すればよい．停留点は $(0,0)$ または $(\pm 1,0)$．$(0,0)$ は鞍点であり極値をとらないが，$(\pm 1,0)$ は極小点となる．

(2) と (3) の図は省略.（8 の字を横にしたような曲線が等高線の一つに現れる.）

(4) 曲線の方程式 $\ell_1(x,y)\cdot\ell_{-1}(x,y)=1$ を極座標 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いて書き直すと，曲線の極座標で表した方程式 $r^2=4\cos^2\theta-2$ が得られる．これによって囲まれる図形のうちで第 1 象限にある部分 G の面積は, θ の動く範囲が $0\le\theta\le\pi/4$ であることに注意すると,

$$\int_G dxdy = 4\int_{0\le r\le r(\theta),0\le\theta\le\pi/4} rdrd\theta = 4\int_0^{\pi/4}\frac{r(\theta)^2}{2}d\theta = 4\int_0^{\pi/4}(2\cos^2\theta-1)d\theta = 2$$

8 (1) まず x で積分してから y で積分する．答えはたぶん $e-\dfrac{8}{3}$.

(2) $u=x+y, v=x-y$ によって変数変換する．答えはたぶん $-\dfrac{4}{3e}+\dfrac{7}{12}$.

(3) 極座標に変換する．答えはたぶん $\left(\dfrac{p+q}{4}\right)\pi a^4$.

(4) 円柱座標に変換する．答えはたぶん $\dfrac{1}{2}\pi a^4 h$.

9 領域 G の増加近似列として $G_n=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le n^2\}$ とおき，極座標に直して計算すると,

$$\int_{G_n}\frac{dxdy}{\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+x^2+y^2)^2}} = \int_0^n\frac{1}{\sqrt{r^2(r^2+a^2)^2}}rdr\int_0^{\pi/2}d\theta = \int_0^n\frac{dr}{r^2+a^2}\times\frac{\pi}{2}$$

となり，これは $n\to\infty$ で収束する.（なぜか？）よってこの広義積分は収束する.

10 考える領域は $G=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le a^2, x^2+z^2\le a^2\}$ であり，その体積は，第 1 象限の部分を考えて

$$V=8\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dz = 8\int_0^2(a^2-x^2)dx=\frac{16}{3}a^3.$$

また，表面積は $z=f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2}$ と曲面の対称性を考慮して

$$S=16\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dxdy=16a^2$$

となる（と思う）.