複素力学系入門

京都大学大学院理学研究科 数学教室

京都大学オープンキャンパス 2009年8月7日

はじめに: 漸化式

高校の数学で, 漸化式というものを習ったと思います.

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

のような形で数列を定義するものです. 例えば,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + c &\Rightarrow\quad x_n &= x_0 + nc, \\ x_{n+1} &= ax_n &\Rightarrow\quad x_n &= a^n x_0, \end{aligned}$$

のように, 簡単な場合は一般項を求めることができます.

ジュリア集合とマンデルブロート集合

それでは,

$$x_{n+1} = x_n^2 + c \tag{1}$$

の場合はどうでしょう？非常に特殊な場合 ($c = 0, -2$) を除いては, n についての簡単な式では表せないことが知られています. この漸化式 (1) が, 実は別のポスターにある美しい絵に繋がっているのです. 以下では, c のことをパラメータ, x_0 のことを初期値と呼びます. まずいくつか計算してみましょう.

(i) **$c = 1$, $x_0 = 0$ の場合:**
少し計算してみると,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 26, \dots$$

とどんどん増大していき, $n \to \infty$ で x_n は無限大に発散することがわかります.

(ii) **$c = 0$ の場合:**
この場合は x_n は x_0 のべき乗になるので, $|x_0|$ が 1 より大きければ x_n は無限大に発散, そうでなければ常に $|x_n| \leq 1$ となります.

(iii) **$c = -1$, $x_0 = 0$ の場合:**
この場合は $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ となるので,

$$x_n = \begin{cases} 0 & n \text{ が偶数のとき} \\ -1 & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

となります.

このように, c と x_0 を決めたときに, $|x_n|$ が 無限大に発散する場合とそうでない場合があります.
ここからは実数だけでなく, 複素数まで考えます.

(充填) ジュリア集合 複素数のパラメータ c を1つ固定して考えます. 複素平面上の各点 $x = x_0$ に対し, それを初期値とする数列について, $|x_n|$ が無限大に発散するかどうかを考えます. 発散しない点の集合が充填ジュリア集合 K_c です.

$$K_c = \{x;\ \lim_{n\to\infty} |x_n| \not\to \infty\}.$$

ジュリア集合はこの境界です.

マンデルブロート集合 今度は常に $x_0 = 0$ と固定して考えます. ジュリア集合と同じように, $|x_n|$ が無限大に発散しないパラメータ c の集合がマンデルブロート集合 M です.

$$M = \{c;\ x_0 = 0 \text{ とした時}, \lim_{n\to\infty} |x_n| \not\to \infty\}.$$

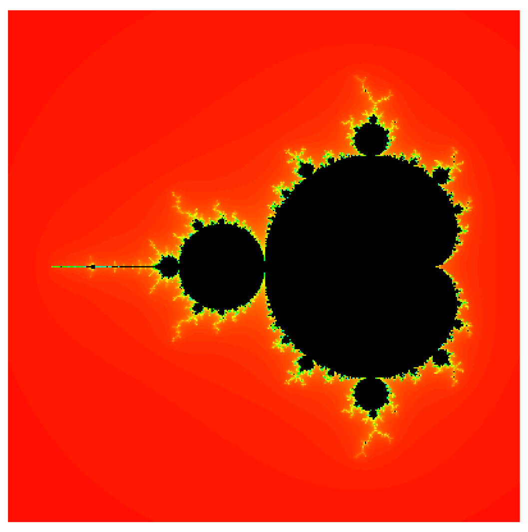

Figure 1: マンデルブロート集合 (図の黒い部分).

不思議なことに, ジュリア集合とマンデルブロート集合はフラクタル集合と呼ばれるものになっていまして, どんなに拡大しても簡単にならず, また全体と全く同じ複雑さを持っているものになっています. 実際マンデルブロート集合については, 境界の至るところにマンデルブロート集合自身のコピーが埋めこまれていることも知られています.
ぜひ別のポスターのいろいろな絵を見たり, コンピュータでいろいろ絵を描いて遊んでみてください.

以下ではもう少し詳しい説明をしますので, 興味のある方は読んでみてください.

漸化式と力学系

漸化式 (1) を実数の範囲のみで考えます. $c \leq \frac{1}{4}$ のときは, 適当な d, e をとって $y_n = dx_n + e$ とおくと,

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_n) \tag{2}$$

という形に変形することができます. これはロジスティック写像と呼ばれるもので, ある容器の中に飼っている虫の数の増減のモデルとして導入されたものです. n番目の世代での虫の数 (最大生息可能数に対する比率) を y_n として, 時間発展を記述しているわけです. このような時間発展を記述する数学的モデルを力学系と呼びます. ロジスティック写像のように時間が整数 (離散時間) の場合は, ある写像 (または関数) f によって,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) & &(n = 0, 1, 2, \ldots) \\ x_n &= f^n(x_0) & &\text{ただし, } f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n} \end{aligned}$$

のように記述されます. 各 x_n が時刻 n での状態を表す実数やベクトルなどです. また時間が実数 (連続時間) の場合は, $x = x(t)$ は時刻 t の関数として,

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

という微分方程式で表されます. 時刻 0 のときに点 x_0 から始めて時間を進めていった時に通る点, つまり, 離散時間の場合の $x_0, x_1, x_2, \ldots$ という点列や, 連続時間の場合の $x(t)$ という関数のことを, (初期値 x_0 の) 軌道 と呼びます. 時間を逆に戻せる (負の時間についても解ける) 場合は, それも含めて軌道と呼ぶこともあります.
こういったモデルにおいて, いろいろな点 x_0 から始めて, 時刻→ ∞ を考えた時に何が起きるか？また関数 $f(x)$ に含まれるパラメータを変化させた時に何が起きるか？ということを考えることが重要になります.

複素力学系

複素力学系とは, 漸化式で与えられるような離散時間の力学系を, 複素数の範囲で考えたものです.
ロジスティック写像のような非常に簡単な力学系においても, 初期値やパラメータの小さな違いが大きな影響を及ぼすことがあり, 実際の挙動は非常に複雑 (カオス的挙動) になります. このような複雑さが, 複素力学系の世界においては非常に美しいフラクタル集合として現れるわけです. ジュリア集合やマンデルブロート集合は,

$$p_c(z) = z^2 + c$$

を考え, 各複素数 z に対して, その軌道 $\{p_c^n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ のふるまいを調べたもの, と解釈できます.

実際に計算機で絵を書く時には, 各点 z に対して, 順番に $p_c^n(z)$ を計算していき, 絶対値がある決められた値 (例えば 10) より初めて大きくなった n の値に応じて点 z に色を塗ります. n が一定の値 ($n = 100$ など) になるまで調べても上の条件を満たさない場合は, 点 z は充填ジュリア集合の点である (だろう) と判断する, というのが一番簡単な方法です. マンデルブロート集合の場合も同様にできます.

ジュリア集合の例

ここで説明した方法で, いろいろな p_c に対応したジュリア集合を描いたものは, 別のポスターで見ることができます. ここでは最も簡単な場合のジュリア集合について説明したいと思います.

(i) $c = 0$, つまり $p_0(z) = z^2$ の場合. これは前に見たように, $p_0^n(z) = z^{2^n}$ となるので, 充填ジュリア集合は単位円板 $\{z; |z| \leq 1\}$ で, ジュリア集合は単位円 $\{z; |z| = 1\}$ です.

(ii) $c = -2$, $p_c(z) = z^2 - 2$ の場合. この場合, 区間 (線分) $[-2, 2] = \{z;\ z \text{ は実数で}, -2 \leq z \leq 2\}$ は充填ジュリア集合に含まれることがわかります. グラフを描いてもわかりますが, 少し違う方法で説明します. $z \in [-2, 2]$ は $z = 2\cos\theta$ と表わせます. すると三角関数の倍角の公式 $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ より,

$$p_{-2}(z) = (2\cos\theta)^2 - 2 = 2\cos(2\theta),$$

つまり p_{-2} は角度 θ を2倍するという作用に対応しています. 従って $p_{-2}^n(z) = 2\cos(2^n\theta)$ となり, このことから $p_{-2}^n(z) \in [-2, 2]$ がわかります. 実は, p_{-2} の (充填) ジュリア集合は $[-2, 2]$ に一致することが知られています.

ジュリア集合の連結性とマンデルブロート集合

いろいろなジュリア集合の絵を描いて見るとわかりますが, パラメータ c の値によって, ジュリア集合は連結な場合と連結でない場合があります. (「連結」という言葉の数学的に正確な定義は省きますが, おおざっぱに言えば1つにつながっている, ということです. ちなみにこの場合は, 連結でなければカントール集合と呼ばれる(非可算) 無限個ある全ての点がばらばらにわかれたような集合になることが知られています. 従って, 例えばちょうど2つにわかれるような場合などは存在しません.)
実はこれは, $z = 0$ の軌道だけで完全に決まります:

$$K_c \text{ が連結} \Leftrightarrow z = 0 \text{ の軌道が有界}.$$

(なぜ $z = 0$ が重要なのかについては詳しくは述べませんが, $p_c(z)$ の微分が 0 になる唯一の点である, ということが関連しています.) ですからマンデルブロート集合では, 初期値 $x_0 = 0$ の場合を考えたわけです. ちなみにマンデルブロート集合は連結であることが知られています.