以下、$a_{m,n}$ や b_n などは、m,n を添え字とする複素数値数列とし、「収束する」と言う場合は、特に断らない限り無限大への収束は含めないこととする。

1. 以下の (1)(2) それぞれについて、条件を満たす $a_{m,n}$ の例を挙げよ。

(1) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ は収束するが、$\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} a_{m,n}$ は収束しない。

(2) $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} a_{m,n}$ は収束するが、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$, $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ はどれも収束しない。

2. 全ての m,n で $a_{m,n} \geq 0$ のとき、次の不等式が成り立つ事を示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m\to\infty} a_{m,n} \leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$$

3. 全ての $n \in \mathbb{N}$ について $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ が収束し、さらに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} |a_{m,n}| < \infty$ のとき、次の極限が全て収束して等号が成立する事を示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$$

4. a_n, b_n が収束するとき、次の等式が成り立つ事を示せ。

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq jk\leq n} \frac{a_j b_k}{n\log n} = \lim_{n\to\infty} a_n b_n$$

5. a_n が収束し、かつ $0 < b_n \nearrow \infty$ のとき、次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j)\frac{b_j}{b_{n+1}} = 0$$

6. (Abel の定理) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとき、冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は、任意の $\lambda > 1$ に対し

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |1-z| \leq \lambda(1-|z|)\}$$

において一様収束することを示せ。

7. ($\star$) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するとき、$\displaystyle c_n = \sum_{j+k=n} a_j b_k$ とおく。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ も収束するなら次の等号が成り立つ事を示せ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

また、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ が収束しない例を挙げよ。

8. (Euler の積公式) $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > 1$ のとき次の等式が成り立つ事を示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

9. $(\star)$ 正値単調増加発散数列全体を D とおく。任意の非負数列 a_n について以下が成り立つことを示せ。

(1) $D \ni \forall b$ について $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n/b_n < \infty$ ならば $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ならば $D \ni \exists b$ について $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$.

10. $\mathbb{R}$ 内の開集合の境界は可算集合か？

11. 連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は、ある奇数 n について, n 回合成すると $\mathbb{R}$ 上の恒等写像になるとする（例えば $n = 3$ なら $f(f(f(x))) = x$）。このとき f 自身が恒等写像である事を示せ。

12. $(\star)$ 連続関数 $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ事を示せ。

$$\sup_{0<x<y<1} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \sup_{0<z<1} \limsup_{\varepsilon \to +0} \frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}.$$

13. $(\star)$ 連続関数列 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ は次を満たすとする

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx < \infty.$$

適当な部分列をとると全ての $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $\int_a^b f_n(x) dx$ が収束する事を示せ。

14. 以下を満たす連続関数列 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ は存在するか？

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx = 0 \quad \text{かつ} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \infty.$$

15. $(\star)$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists I_n$:区間列, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$ となるとき A は $\mathbb{R}$ 内の零集合であると言う。連続関数列 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\lim_{n\to\infty} 3^n \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx = 0$$

を満たすとき、ある零集合 $A \subset \mathbb{R}$ の外で $2^n |f_n(x)| \to 0$ となる事を示せ。

16. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は有界連続、$g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は連続で $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$ を満たすとき、次で定める関数列 f_n は f へ $\mathbb{R}$ 上で広義一様収束する事を示せ。

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) n g(ny) dy$$

17. $(\star)$ (Bernstein 展開) 連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して関数列

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

は f へ $[0,1]$ 上で一様収束する事を示せ。

18. $0 < a < b$ のとき、次の極限値を a, b で表せ。

$$\lim_{n\to\infty} \int_{na}^{nb} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

19. $(\star)$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が C^2 のとき $\forall x \in \mathbb{R}$ で次の不等式が成り立つ事を示せ。

$$|f'(x)|^2 \le 2 \sup_{y,z \le x} |(f(x) - f(y))f''(z)|.$$

20. (Hardy の不等式) $a > 0$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ が C^1 で x が大きいとき $f(x) = 0$ を満たすなら次の不等式が成り立つ事を示せ。

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^{a-1} dx \le \frac{4}{a^2} \int_0^\infty |f'(x)|^2 x^{a+1} dx$$

21. $(\star)$ $f_1(x) = \max(1 - |x|, 0)$ として関数列 $f_n(x)$ を帰納的に

$$f_{n+1}(x) = f_1(x) + \frac{1}{2}[f_n(2x-1) + f_n(2x+1)]$$

で定める。このとき f_n は $\mathbb{R}$ 上で一様収束して、極限関数は全ての $x \in [-1, 1]$ において微分不可能である事を示せ。

22. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p > 0$ に対して

$$s_p(x) = \sum_{k=1}^n |x_k|^p$$

とおく。$p, q > 0$ のとき $\sup\{s_q(x) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ s_p(x) = 1\}$ を n, p, q で表せ。

23. $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^2, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^1 で、$\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = F(t,x)$$

を満たすとする。u を f, g, F の積分で表せ。

24. $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が C^k のとき $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$v(x) = \int_{|y|<1} u(x+y) dx$$

で定めると v は C^{k+1} である事を示せ。

25. $(\star)$ $\mathbb{R}^2 \supset \Omega$ が開集合で $u : \Omega \to \mathbb{R}$ が C^2 のとき以下は同値である事を示せ。ただし $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $B(x,R) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| < R\}$ とおく。

(1) $\Omega \ni x \implies \Delta u(x) = 0$.
(2) $\Omega \supset B(x,R) \implies \int_{B(x,R)} (u(x) - u(y)) dy = 0$.

26. 以下の条件を満たす関数 $f : (0,1]^2 \to \mathbb{R}$ を作れ。

(1) $\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\{(x,y) \in (0,1]^2 \mid x + y \ge \varepsilon\}$ 上で有界連続。
(2) 広義積分 $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx dy$ と $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dy dx$ は異なる実数に収束。

27. $e^{-|x|^2}$ の積分を使って単位球 $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ の測度 $\int_B dx$ を求めよ。

28. $p > q > 0$ のとき次の広義積分の値を p, q で表せ。

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{x^p y^q + x^q y^p}^\infty e^{-z^2} dz dy dx$$

29. 距離空間の点列について、任意の部分列が固定された点への収束部分列を含むなら元の列もその点へ収束する事を示せ。

30. 距離空間は以下を満たす事を示せ。

(1) 一点は閉集合（第一分離公理）
(2) 異なる２点は交わらない二つの開集合に含まれる（第二分離公理）
(3) 閉集合とその外の一点は交わらない二つの開集合に含まれる（第三分離公理）
(4) 交わらない二つの閉集合は ··· 以下同文（第四分離公理）
(5) 全ての閉集合は可算個の開集合の共通部分

註：Hausdorff ⇔ 1〜2, 正則⇔ 1〜3, 正規⇔ 1〜4, 完全正規⇔ 1〜5。

31. 距離空間について以下は同値である事を示せ。

(1) 第二可算公理（可算な開基がある）
(2) 可分（稠密な可算集合を持つ）
(3) Lindelöf （任意の開被覆の内の可算個で覆える）

32. ($\star$) (Urysohn-Tikhonov の定理) 位相空間が正則で第二可算公理を満たすなら、同じ位相を定める距離が定義できる事を示せ。

33. 距離空間について、「全有界 $\iff$ 任意の点列が Cauchy 部分列を含む」を示せ。

34. 連続関数列 $f_n : [0,1] \to [0,1]$ で、いかなる部分列をとっても各点収束しないようなものを具体的に与えよ。

35. $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid C^\infty\}$ 上の距離 d を次が成り立つように定めよ。

$$X \ni f_n,\ d(f_n, f_0) \to 0 \iff \text{全ての導関数が広義一様収束}$$

また、その距離空間が完備である事を示せ。

36. 集合 X と距離空間 (Y, d) に対して次のように置く。

$$B(X,Y) = \{f : X \to Y \mid X \ni \exists x_0,\ \sup_{x\in X} d(f(x_0), f(x)) < \infty\},$$
$$d_{B(X,Y)}(f_1, f_2) = \sup_{x\in X} d(f_1(x), f_2(x)) \quad (f_1, f_2 \in B(X,Y))$$

$(B(X,Y), d_{B(X,Y)})$ は距離空間である事を示せ。また、Y が完備なら $B(X,Y)$ も完備である事を示せ。

37. ($\star$) (Ascoli-Arzelà の定理) X, Y：距離空間、X がコンパクトのとき、連続関数列 $f_n : X \to Y$ について、$\{f_n\}_n \subset B(X,Y)$ が相対コンパクトである必要十分条件は、$f : x \mapsto \{f_n(x)\}_n$ が $X \to B(\mathbb{N}, Y)$ の位相で連続かつ $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}, x \in X\} \subset Y$ が相対コンパクトである事を示せ。

38. ($\star$) 距離の公理の三角不等式を、定数 $C > 1$ について

$$X \ni \forall x, y, z \quad d(x,y) \le C[d(x,z) + d(y,z)]$$

と弱めた空間で縮小写像の原理を証明せよ。すなわち、X が完備で $f : X \to X$ が定数 $\lambda \in (0,1)$ について $d(f(x), f(y)) \le \lambda d(x,y)$ を満たすなら、$x = f(x)$ となる $x \in X$ が唯一つ存在する。

39. (Baire のカテゴリー定理) 完備距離空間 X 内の任意の稠密開集合の列 O_n について $\bigcap_{n=1}^\infty O_n$ も稠密である事を示せ。

40. 可分な完備距離空間の濃度は $\aleph$ 以下であること、孤立点を持たない（つまり一点が開集合にならない）完備距離空間の濃度は $\aleph$ 以上であることを示せ。

以下，空間 X 上の自己写像 $f : X \to X$ に対し，$f^{\circ n}$ を f の n 回の反復合成とする．帰納的に定義すると，$f^{\circ 0}(x) = x$ (恒等写像)，$f^{\circ n+1}(x) = f(f^{\circ n}(x))$ である．さらに逆写像 f^{-1} が存在する場合は $f^{\circ -n} = (f^{-1})^{\circ n}$ $(n > 0)$ とする．

41. $(\star)$ 単調増加関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $F(x+1) = F(x) + 1$ を満たすとする．この時

$$\rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^{\circ n}(x) - x}{n}$$

が収束し， 極限は x の値に依らず同じ値に収束することを示せ．

42. 連続単調増加関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $F(x+1) = F(x)+1$ を満たすとする．上で定義した $\rho(F)$ が有理数のとき，$F^{\circ q}(x) = x + p$ となる $x \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ．ここで $\rho(F) = p/q$ $(p \in \mathbb{Z}, ,q \in \mathbb{N})$ とする．

43. $F_t(x) = x + \frac{1}{4\pi}\sin^2(2\pi x) + t$ とする．

(1) ある $\epsilon > 0$ が存在して，$-\epsilon < t \leq 0$ ならば $\rho(F) = 0$ であることを示せ．
(2) $t > 0$ のとき，$\rho(F) > 0$ であることを示せ．

44. $I = [0, 1]$ とし，$f : I \to I$ を連続関数で，有限個の点 $0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_l = 1$ が存在して，区間 $[c_n, c_{n+1}]$ は f が単調となる区間で極大なものとなっているとする．このとき f の lap 数 $\ell(f)$ を， $\ell(f) = l$ で定義する．このような f に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\ell(f^{\circ n}))$$

が存在することを示せ．

45. $f(x) = 2x^2 - 1$ とする．任意の f の p-周期点, つまり $f^{\circ k}(x_0) \neq x_0$ $(0 < \forall k < p)$ かつ $f^{\circ p}(x_0) = x_0$ となる点 x_0 に対し，$x_0 \neq 1$ なら

$$|(f^{\circ p})'(x_0)| = 2^p$$

となることを示せ．

46. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^1 級で， $f(0) = 0$ をみたし，$\lambda = f'(0)$ とする．

(1) $|\lambda| < 1$ なら，ある 0 の近傍 U が存在して，任意の $x \in U$ に対して $f^{\circ n}(x) \to 0$ であり，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|f^{\circ n}(x)| = \log|\lambda|$$

であることを示せ．

(2) $\lambda = 1$ で，さらに f は C^2 級で $f''(0) > 0$ とする．この時ある $\varepsilon > 0$ が存在して， 任意の $-\varepsilon < x < 0$ に対し，$f^{\circ n}(x) = O(\frac{1}{n})$ であることを示せ．

47. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の回転 (平行移動) $T(x) = x + \alpha$ を考える．α が無理数の時，T は位相推移的，つまり $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ で，$O(x) = \{T^{\circ k}(x);\ k = 0, 1, \dots\}$ が稠密になるものが存在することを示せ．

48. $(\star)$ $d \in \mathbb{Z}$, $|d| \geq 2$ とする．$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $f(x) = dx$ は位相推移的であることを示せ．また f の周期点は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の中で稠密に存在することを示せ．

49. $(\star)$ (Sharkovskii の定理) 連続写像 $f : [0, 1] \to [0, 1]$ が 3 周期点を持てば，f は任意の周期の周期点を持つことを示せ．

50. C^3 級関数 $f(x)$ に対し，その Schwarz 微分 $S(f)$ を

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

で定義する．$S(f)$ が常に負の時，$S(f^{\circ n})$ も常に負であることを示せ．

51. $f(x)$ を 2 次以上の多項式とする．$f'(x)$ の全ての根が実数であるとき，$S(f)$ は常に負であることを示せ．

52. $\Sigma = \{(\varepsilon_n)_{n\geq 0};\ \varepsilon_n \in \{0,1\}\}$ とし，$(\varepsilon_n), (\varepsilon'_n) \in \Sigma$ に対し，k を $\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k$ となる最小のものとした時

$$d((\varepsilon_n), (\varepsilon'_n)) = \frac{1}{2^k}$$

と定める．(このような k が存在しない時は $d = 0$ とする．) この時 (Σ, d) は距離空間であり，コンパクト，完全不連結であることを示せ．

さらに，シフト写像 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ を $\sigma((\varepsilon_n)_n) = (\varepsilon_{n+1})_n$ と定める．σ は連続であることを示せ．

53. $(\star)$ $a > 2 + \sqrt{5}$，$f(x) = ax(1-x)$ として，$K = \{x \in \mathbb{R};\ |f^{\circ n}(x)| \not\to \infty\}$ を考える．このとき $f : K \to K$ と問題 52 の $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ は位相共役，つまりある同相写像 $h : K \to \Sigma$ が存在して，$h \circ f = \sigma \circ h$ を満たすことを示せ．(注：実はこの主張は $a > 4$ で正しい．)

54. 以下の積分を計算せよ．ただし，Γ は単位円周を反時計回りにまわる経路とする．

$$(1) \oint_\Gamma \frac{dz}{\sin z}, \qquad (2) \oint_\Gamma \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \qquad (3) \oint_\Gamma \frac{dz}{\sin(1/z)}.$$

55. e^{iz^3} を領域 $D_R = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < R,\ 0 < \arg z < \pi/6\}$ の境界に沿って積分することで，広義 Riemann 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos(x^3)dx$, $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^3)dx$ を求めよ．

56. 恒等写像でない正則関数 $f(z)$ の不動点 z_0 に対し，その正則指数 $\iota(f, z_0)$ を，$\frac{1}{z-f(z)}$ の z_0 における留数，つまり十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\iota(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{dz}{z - f(z)}$$

で定める．$f'(z_0) = \lambda \neq 1$ のとき，$\iota(f, z_0) = \frac{1}{1-\lambda}$ であることを示せ．さらに，無限遠を固定しない有理関数 $f(z)$ に対して，

$$\sum_{f(z)=z} \iota(f, z) = 1$$

を示せ．(注：無限遠が不動点の場合も適切に座標変換して定義すれば成立する．)

57. $(\star)$ $f(z) = z + az^2 + O(z^3)$ $(a \neq 0)$ を 0 の近傍 U で定義された正則関数とする．$\mathrm{Re}\,\iota(f, 0) > 1$ なら，U 上で f に十分近い任意の正則関数 $g(z)$ は，U 内の不動点 z_g で $|f'(z_g)| < 1$ または $f'(z_g) = 1$ となるものを持つことを示せ．

58. $R>0,\quad n\geq 0$ とし, 正則関数 $f:\{|z|>R\}\to\mathbb{C}$ が $\displaystyle\sup_{|z|>R}(1+|z|)^{-n}|f(z)|<\infty$ を満たすとする．このとき以下を示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} f^{(n+1)}(z)=0$,

(2) f が整関数 (即ち，$\mathbb{C}$ 全体で定義された正則関数) なら，f は高々 n 次の多項式である．

以下，$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$ を単位円板とする．

59. (Schwarz-Pick の補題) $\mathbb{D}$ 上の距離 (双曲距離) を $ds=\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ で定める．正則写像 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ は，この距離を伸ばさないことを示せ．

60. ($\star$) (Denjoy-Wolff の定理) $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ を正則写像とする．以下のいずれかが成立することを示せ．

(1) $f^{\circ n}$ の適当な部分列をとると，恒等写像に収束する．

(2) ある $c_0\in\overline{\mathbb{D}}$ が存在して，$f^{\circ n}$ は定数関数 $z\mapsto c_0$ に局所一様収束する．

(ヒント：f が不動点を持たない場合は，$f_\varepsilon(z)=(1-\varepsilon)f(z)$ の不動点を中心とし，原点を境界に持つ双曲円板を考えると，これは f_ε-不変．この極限を考える．$\mathbb{D}$ 内の双曲円板は (別の点を中心とする) ユークリッド円板であることに注意．)

61. (面積定理) $\displaystyle f(z)=z+b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}$ を $\{|z|>1\}$ で定義された単葉関数 (即ち，単射な正則関数) とする．

(1) $r>1$ に対し，C_r を $\{|z|=r\}$ の f による像とし，A_r を C_r によって囲まれた領域の面積とする．

$$A_r=\pi\left(r^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}\right)$$

を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2\leq 1$ を示せ．

62. $\displaystyle f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ が $\mathbb{D}$ 上単葉であるとする．このとき，$|a_2|\leq 2,\ |a_3-a_2^2|\leq 1$ を示せ．

距離空間 X,Y に対し，$C(X,Y)$ を X から Y への連続関数全体とする．関数族 $\mathcal{F}\subset C(X,Y)$ が**正規族**であるとは，$\mathcal{F}$ は局所一様収束位相に関して $C(X,Y)$ で相対コンパクトであることである．

点 $x\in X$ において $\mathcal{F}$ が正規族であるとは，x のある近傍に制限すると $\mathcal{F}$ が正規族になることである．

以下，正則関数の族に対しては，Y は複素平面 $\mathbb{C}$，有理型関数の族に対しては，Y は Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ として考えることとする．

63. (Montel の定理) $\mathbb{C}$ 内の領域 Ω 上で定義された正則関数の族 $\mathcal{F}$ を考える．$\mathcal{F}$ が局所一様有界，つまり任意のコンパクト集合 $K\subset\Omega$ に対し，

$$\sup\{|f(z)|;\ f\in\mathcal{F},z\in K\}<\infty$$

を満たすとき，$\mathcal{F}$ は正規族であることを示せ．

64. ($\star$) $f(z)$ を 2 次以上の多項式とし，

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C};\ \{f^{\circ n}(z)\}_{n \geq 0} \text{ は有界 }\}, \quad J(f) = \partial K(f)$$

とおく． $K(f)$ の内部において，$\mathcal{F} = \{f^{\circ n}\}_{n \geq 0}$ は正規族であること，また $J(f)$ の任意の点で $\mathcal{F}$ は正規族でないことを示せ．

65. (Vitali の定理) $\mathbb{C}$ 内の領域 Ω 上で定義された正則関数の列 $\{f_n\}$ が以下の 2 つを満たすとする：

(1) $\{f_n\}$ は正規族である．
(2) 集合 $L = \{z \in \Omega;\ \lim_{n \to \infty} f_n(z) \text{ が存在 }\}$ は Ω 内に集積点を持つ．

このとき f_n は $n \to \infty$ である正則関数 f に Ω 上局所一様収束することを示せ．

66. (Marty の定理) $\mathbb{C}$ 内の領域 Ω 上で定義された有理型関数の族 $\mathcal{F}$ が正規族であることと，球面微分

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$$

が局所一様有界であることは同値であることを示せ．(ヒント：$f^{\#}$ はユークリッド空間から，リーマン球面に球面距離を入れたものへの写像と考えた時の微分．)

67. ($\star$) (Zalcman の補題) $\mathbb{D}$ 上定義された有理型関数族 $\mathcal{F}$ が正規族で**ない**とする．このときある部分列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ と $z_n \in \mathbb{D}$, $\rho_n > 0$ と $\mathbb{C}$ 上定義された定数でない有理型関数 f が存在して以下を満たすことを示せ：(i) z_n は $\mathbb{D}$ 内のある点に収束する．(ii)$\rho_n \to 0$. (iii) $f_n(z_n + \rho_n z)$ は $\mathbb{C}$ 上 $f(z)$ に局所一様収束する．(ヒント：$0 < r < 1$ をとり，各 $f \in \mathcal{F}$ に対し， $\max_{|z| \leq r}(1 - \frac{|z|}{r}) f^{\#}(z)$ を考えよ．)

68. ($\star$) (Riemann の写像定理) $\Omega \subset \mathbb{C}$ を単連結領域で，$\Omega \neq \mathbb{C}$ とし，$z_0 \in \Omega$ とする．$\mathcal{F} = \{f : \Omega \to \mathbb{D};\ \text{単葉}\}$ としたとき，以下を示せ．

(1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
(2) $f \in \mathcal{F}$ が任意の $g \in \mathcal{F}$ に対し，$|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$ を満たすならば，f は全射.
(3) (2) の仮定を満たす f が存在する．従って，Ω と $\mathbb{D}$ は双正則同値.

69. $\mathbb{D}$ から次の各領域への双正則写像を具体的に求めよ．ただし $0 < \alpha < 2\pi$ とする．

(1) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C};\ z \neq 0,\ 0 < \arg z < \alpha\}$.
(2) $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$.
(3) $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$.

70. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ を考える．

(1) $\alpha \in \mathbb{Q}$ に対し，$\lim_{r \nearrow 1} |f(re^{i\alpha\pi})| = \infty$ を示せ．
(2) $S^1 = \{|z| = 1\}$ は f の自然境界である，つまり，任意の $z \in S^1$ に対し，どんな近傍 U を取っても，f は U 上に正則に拡張できないことを示せ．

71. ($\star$) 原点の近傍で定義された正則関数 $f(z)$ が,$f(0) = 0$ を満たし，さらに $\lambda = f'(0)$ が $0 < |\lambda| < 1$ を満たすとする．このとき原点の近くで定義された正則関数 $\varphi(z)$ で, (i) $\varphi(0) = 0$, (ii) $\varphi'(0) = 1$, (iii) Schröder 方程式 $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$ を満たすものが一意的に存在することを示せ．(ヒント：$\varphi_n(z) = f^{\circ n}(z)/\lambda^n$ を考えよ．)

以下は実数 t を従属変数とする微分方程式に関する問題である。$f(t,x)$ が連続で、局所一様に x について Lipschitz 連続のとき $x'(t)=f(t,x(t))$ の初期値問題が一意局所解を持つ事 (Cauchy-Lipschitz の定理）は既知とする。

72. $f:[0,1]\to[0,\infty)$ は連続狭義単調増加で $f(0)=0$ とするとき、以下の２条件は同値である事を示せ。

(1) $\lim_{a\to+0}\int_a^1 \frac{dx}{f(x)}<\infty$.
(2) $\exists\delta>0,\ \exists x:[0,\delta]\to[0,1]$ 連続, $x(0)=0,\ 0<\forall t<\delta,\ x'(t)=f(x(t))>0$.

73. $d\in\mathbb{N},\ s\in\mathbb{R}^d,\ \delta>0$ は任意とし、$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ は次を満たすとする

$$\forall x,\forall y\in\mathbb{R}^d,\quad (f(x)-f(y))\cdot(x-y)\le 0.$$

このとき次を満たす $x:[0,\delta]\to\mathbb{R}^d$ が２つ以上無い事を示せ。

$$\lim_{t\to+0}x(t)=x(0)=s,\quad 0<\forall t<\delta,\ x'(t)=f(x(t)).$$

ヒント：解が２つあるとしてその距離を調べる

74. $d\in\mathbb{N},\ f:\mathbb{R}^{1+d}\to\mathbb{R}^d$ は C^1, $p:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ と $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ は連続で、

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\},\ |f(t,x)|\le p(t)g(|x|),\quad \int_1^\infty\frac{dr}{g(r)}=\infty.$$

とするとき、$\forall s\in\mathbb{R}^d$ に対し次の初期値問題は $\mathbb{R}$ 上で定義された解を持つ事を示せ。

$$x'(t)=f(t,x(t)),\quad x(0)=s$$

ヒント：$g(x)=x$ の場合は Gronwall の不等式から従う

75. $d\in\mathbb{N},\ A$ は d 次正方実行列として、$x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ に対する微分方程式

$$x'(t)=Ax(t)$$

について以下を示せ。

(1) d が奇数のとき、全ての解が $\mathbb{R}$ 上で有界なら、0 以外の定常解が有る。
(2) $\lim_{t\to\infty}t^{2-d}x(t)$ が 0 以外へ収束する解が有るなら、$\mathbb{R}$ 上で有界な解は定常解。

76. ($\star$) $u,V:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ は C^2 で球対称、つまり $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のみに依存する関数で、次の偏微分方程式を満たすとする。

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=Vu.$$

もし $r\to\infty$ で $u\to 0$ かつ $\lim_{r\to\infty}\mathrm{Re}\,V>\delta>0$ なら、$ue^{\sqrt{\delta}r}$ も 0 へ収束する事を示せ。ヒント：方程式に $r^2\bar{u}$ をかける

77. ($\star$) $V:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続で $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)$ が収束するとする。$\forall\lambda\in\mathbb{R}$ に対し

$$u''(t)+V(t)u(t)=\lambda u(t),\quad u(0)=0,\ u'(0)=1$$

の解 $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $u(t;\lambda)$ とおき、その $t>0$ での零点の個数を $Z(\lambda)$ とおく。

$$\lim_{\mu\to\lambda+0}Z(\mu)<\lim_{\mu\to\lambda-0}Z(\mu)<\infty$$

のとき $\lim_{t\to\infty}u(t;\lambda)=0$ である事を示せ。
ヒント：まず $\not\to 0$ なら発散する事を示す

78. 正定数 a と $x:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ に対して次の微分方程式を考える

$$t^2x''(t)+tx'(t)=(t^2+a^2)x(t).$$

(1) $\lim_{t\to+0}t^{-a}x(t)=1$ を満たす解を $t^a\times$ 冪級数の形で求めよ。
(2) $0<t<\infty$ で定義された 0 以外の解は 2 個以上零点を持たない事を示せ。

79. $(\star)$ $u(t,x):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に関する偏微分方程式

$$u_{tt}-u_{xx}+u-u^3=0$$

に対して、以下を満たす解 $u(t,x)$ を全て求めよ：$\exists\varphi\in C^2(\mathbb{R})$ は $x\to\pm\infty$ でそれぞれ収束し、$\exists c\in\mathbb{R},\ u(t,x)=\varphi(x-ct)$.
ヒント：φ の方程式に φ' をかける

80. $a>0,\ x(t)\in\mathbb{R}$ に対する初期値問題

$$x''(t)=x(t)-x(t)^3,\quad x(0)=a,\quad x'(0)=0$$

が正値の周期解（定常解除く）を持つ a の範囲と、その周期の範囲を求めよ。

81. $\forall a,\forall m\in\mathbb{R}$ に対して次の初期値問題の解 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が唯一つ有る事を示せ。

$$u''(t)+\frac{2}{t}u'(t)=mu(t)-u(t)^3,\quad u(0)=a,\ u'(0)=0.$$

ヒント：大域存在は $E=(u')^2+u^2-u^4/2$ とおくと $E'\le 0$

82. 上の問で $a=1,\ m=0$ のときの解を $u(t)$ として、$v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $T>0$ を $v(t)=tu(t),\ T=\inf\{t>0\mid v'(t)\le 0\}$ $(\inf\emptyset=\infty)$ で定める。

(1) $0\le t\le T$ において $tv'-v$ と $(tv')^2-v^2+v^4/2$ は単調減少である事を示せ。
(2) $u(t)$ は $t>0$ に零点を持つ事を示せ。

83. $(\star)$ 問 81 で $m=1,\ a>0$ のときの解を $u(t;a)$ とおき、これが $t\in\mathbb{R}$ 上で正になる $a>0$ 全体を A とおく。

(1) $(0,\sqrt{2})\subset A$ を示せ。
(2) A は有界である事を示せ。
(3) $u(t;\sup A)$ は $t\to\infty$ で 0 へ単調減少する事を示せ。

ヒント：(2) $tu(t)=v(at)$ とおいて上の問へ帰着 (3) $a\notin A$ なら最小零点まで単調減少。$u\searrow 1$ を排除するには $t(u-1)$ を調べる

84. f と g は $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の関数で

$$\forall u,\forall v\in\mathbb{R}^2,\quad |f(u)-f(v)|+|g(u)-g(v)|\le|u-v|/2$$

を満たすとする。次の連立微分方程式について以下の (1)(2) を示せ。

$$x'(t)=x(t)+f(x(t),y(t)),\quad y'(t)=-y(t)+g(x(t),y(t))$$

(1) $0\le t<\infty$ 上の解 $(x(t),y(t))$ が有界なら

$$x(0)=-\int_0^\infty e^{-t}f(x(t),y(t))dt.$$

(2) $\forall y(0)\in\mathbb{R}$ に対し、$0\le t<\infty$ で有界な解 $(x(t),y(t))$ が一意に存在する。

85. ($\star$)　$a > 0$, $b > 1$, $c > 0$ は定数として $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対する次の連立微分方程式を考える

$$x'(t) = a(y(t) - x(t)), \quad y'(t) = x(t)(b - z(t)) - y(t), \quad z'(t) = x(t)y(t) - cz(t).$$

(1) $(a - c - 1)b > (a + c + 3)a$ なら安定な定常解は存在しない事を示せ。
(2) 任意の $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^3$ に対して $0 \le t < \infty$ で定義された有界な解が存在する事を示せ。

ヒント：(2) は $bx^2/a + y^2 + (z - 2b)^2$ を調べる
なお、定常解 $x(t) = c$ が安定とは、任意の c 近傍 U に対し、ある c 近傍から出発した解は全ての正の時刻で U に含まれるということである。

以下は測度と積分についての問題である。集合 X の部分集合全体を 2^X で表す。

86. １０進小数で９を無限個含まない表示を持つ実数全体を A とおくと、A は $\mathbb{R}$ 内の稠密な Borel 可測集合で、Lebesgue 測度 0, 濃度 $\aleph$ である事を示せ。

87. $m, n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が連続単射のとき、任意の Borel 可測集合 $A \subset \mathbb{R}^m$ の像 $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ は Borel 可測である事を示せ。

88. $\forall a \le \forall b \in \mathbb{R}$ に対して $\mu((a, b]) = b - a$ とし、これから生成される $\mathbb{R}$ 上の外測度を $\bar{\mu}$ とおく。$\forall A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\rho(A) = \sup\Big\{ \frac{\bar{\mu}(A \cap (a, b])}{\bar{\mu}((a, b])} \;\Big|\; a < b \Big\}$$

で定めると 0 か 1 で、$\rho(A) = 0$ は A が Lebesgue 測度 0 と同値である事を示せ。
ただし $2^X \supset \mathcal{A}$, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ の生成する外測度 $\bar{\mu} : 2^X \to [0, \infty]$ とは

$$\bar{\mu}(A) = \inf\Big\{ \sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \;\Big|\; A \subset \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} A_n,\ A_n \in \mathcal{A} \Big\}.$$

89. $\mathbb{R}^d$ 内の半径 r の任意の開球 A に対して $\mu_\alpha(A) = r^\alpha$ とおく。半径 t 以下の開球全体を $\mathcal{B}_t$ として、$\mu_\alpha : \mathcal{B}_t \to [0, \infty)$ の生成する $\mathbb{R}^d$ 上の外測度を $\bar{\mu}_\alpha$ とおき、$\mathbb{R}^d \supset \forall A$ に対し $\mathcal{H}^\alpha(A) = \sup_{t>0} \bar{\mu}_\alpha(A)$ とおく。以下を示せ。

(1) $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ に対して $I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を $I(x) = (x, 0, \ldots, 0)$ で定めると $\mathbb{R}^m \supset \forall A$, $0 \le \forall \alpha \le m$, $\mathcal{H}^\alpha(A) = \mathcal{H}^\alpha(I(A))$.
(2) $\mathbb{R}^d \supset \forall A$, $\exists m \in [0, d]$, $0 \le \forall a < m < \forall b \le d$, $\mathcal{H}^a(A) = \infty$, $\mathcal{H}^b(A) = 0$.

註：$\mathcal{H}^\alpha$ を Hausdorff 外測度、m を Hausdorff 次元と呼ぶ。

90. $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ の Lebesgue 測度空間 を $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{M}, \mu)$ とおく。$\mathfrak{M} \ni A, B$ が $\mu(A \setminus B) = 0 = \mu(B \setminus A)$ のとき $A \sim B$ と定めると、$\mathfrak{M}$ における同値関係になり、その商集合の濃度は $\aleph$ である事を示せ。

91. $2^X \supset \mathcal{F}$ が以下の３条件を満たすとき X 上のフィルターと呼ぶ

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(2) $\mathcal{F} \ni \forall A \subset \forall B$, $B \in \mathcal{F}$.
(3) $\mathcal{F} \ni \forall A$, $\mathcal{F} \ni \forall B$, $A \cap B \in \mathcal{F}$.

また、それより大きなフィルターが存在しないとき極大フィルターと呼ぶ。X 上の極大フィルター $\mathcal{F}$ と $X \supset \forall A$ に対し, $A \in \mathcal{F}$ なら $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 1$, $A \notin \mathcal{F}$ なら $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 0$ とおくと、$\mu_{\mathcal{F}} : 2^X \to \{0, 1\}$ は有限加法的である事を示せ。また、X の濃度が $\aleph$ 以下で $\mu_{\mathcal{F}}$ が可算加法的なら $\exists x \in X$, $\mathcal{F} = \{A \in X \mid x \in A\}$ となる事を示せ。

92. $(\star)$ $\Omega = \bigcup_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^d$ とおく。$2^X \supset \mathcal{E}, \forall f : \Omega \to \mathcal{E}$ に対して

$$f_A = \bigcup_{a:\mathbb{N}\to\mathbb{N}} \bigcap_{d\in\mathbb{N}} f((a_1, \dots, a_d)),$$
$$\mathcal{E}_A = \{f_A \mid f : \Omega \to \mathcal{E}\}, \quad \mathcal{E}_{AC} = \{X \setminus f_A \mid f : \Omega \to \mathcal{E}\}$$

とおくとき、以下が成立つ事を示せ。

(1) $(\mathcal{E}_A)_A = \mathcal{E}_A$.
(2) $\emptyset, X \in \mathcal{E}_A$ なら $\mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_{AC}$ は X 上の σ-加法族。

93. $\mathcal{I} = \{[p,q] \subset \mathbb{R} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}, \mathcal{I}^d = \{\prod_{j=1}^d I_j \mid I_j \in \mathcal{I}\} \subset \mathbb{R}^d$ とおき、さらに上の定義で $\mathcal{A}^d = (\mathcal{I}^d)_A$ とおくと、以下が成立つ事を示せ。

(1) $\mathcal{A}^d$ は $\mathbb{R}^d$ の Borel 可測集合を全て含み、濃度は $\aleph$.
(2) $\forall m, \forall n \in \mathbb{N}, \forall f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 連続について、$\mathcal{A}^m \ni \forall B,\ f(B) \in \mathcal{A}^n$.

註：$\mathcal{A}^d$ の元を解析集合と呼ぶ。

94. $(\star)$ $\forall n \geq \forall k, \forall a \in \mathbb{N}^n$ に対し $\widetilde{a}_k = \sum_{j=1}^k a_j$ とおき、上の $\mathcal{I}$ と Ω に対して全単射 $M : \mathcal{I} \to \mathbb{N}, N : \Omega \to \mathbb{N}$ を固定し、$D_n^m, D^\omega \subset [0,1]$ と $U \subset \mathbb{R}^3$ を次で定める

$$\forall n, \forall m \in \mathbb{N},\ D_n^m = \left\{3^{-\widetilde{a}_n}\lambda + \sum_{j=1}^{n-1} 3^{-\widetilde{a}_j} \,\middle|\, a \in \mathbb{N}^n,\ a_n = m,\ \lambda \in [1,2)\right\},$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \omega \in \mathbb{N}^n,\ D^\omega = \bigcap_{k=1}^n D_k^{\omega_k}, \quad U = \bigcap_{d\in\mathbb{N}} \bigcup_{\omega\in\mathbb{N}^d} \bigcup_{A\in\mathcal{I}} D^\omega \times D_{N(\omega)}^{M(A)} \times A$$

(1) $\forall f : \Omega \to \mathcal{I}, \exists \underline{f} \in \mathbb{R}, \bigcap_{\omega\in\Omega} D_{N(\omega)}^{M(f(\omega))} = \{\underline{f}\}$ を示せ。
(2) $f_A = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [0,1],\ (x, \underline{f}, y) \in U\}$ を示せ。
(3) $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [0,1],\ (x, y, y) \in U\}$ は Borel 可測でない事を示せ。

95. $(\star)$ $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 連続 $\mid \exists R > 0,\ |x| > R \implies f(x) = 0\}$ とおき、問１５の零集合全体を $\mathcal{N}$ とおく。ある関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0(\mathbb{R})$ について

(1) $\exists N \in \mathcal{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus N, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
(2) $\lim_{n,m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)| dx = 0$.

となる $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 全体を $\mathcal{L}$, $I(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx$ と定める。以下を示せ。

(1) $\mathcal{L}$ は線形空間で $\forall f \in \mathcal{L}, |f| \in \mathcal{L}$.
(2) $I : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ は well-defined な線形写像で $|I(f)| \leq I(|f|)$.
(3) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L},\ \lim_{n,m\to\infty} I(|f_n - f_m|) = 0$ なら $\exists f \in \mathcal{L},\ \lim_{n\to\infty} I(|f_n - f|) = 0$.

96. 上の問の $\mathcal{L}$ は $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の Lebesgue 可積分関数全体と一致し、$I(f)$ は Lebesgue 積分値と一致する事を示せ。

97. ２つ上の問の $\mathcal{L}$ の定義から積分についての条件を外すことで定義される関数集合は $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の Lebesgue 可測関数全体と一致する事を示せ。

以下、X は σ 有限な測度空間として、可測関数 $f : X \to \mathbb{C}$, $0 < p \le \infty$ に対し $\|f\|_{L^p(X)}$ を

$$\|f\|_{L^p(X)} = \begin{cases} \left[\int_X |f(x)|^p dx\right]^{1/p} & (0 < p < \infty), \\ \inf\{t > 0 \mid a.e.x \in X,\ |f(x)| \le t\} & (p = \infty). \end{cases}$$

と定義し、$\|f\|_{L^p(X)} < \infty$ なる f 全体を $L^p(X)$ とおく。なお、$\inf \emptyset = \infty$, $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$. $X \supset A$ の測度は $|A|$ で表す。$\mathbb{R}^d$ は Lebesgue 測度での測度空間であると見なす。x_k についての偏微分を $\partial_{x_k} f$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ に対して

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d},\ \partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f,\ |\alpha| = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k$$

と表す。以下、上の問の結論を下の問で用いて良い。

98. $0 < p, q, r \le \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ なら $\forall f \in L^q(X)$ について次が成立つ事を示せ。

$$\max\{\|fg\|_{L^p(X)} \mid g \in L^r(X),\ \|g\|_{L^r(X)} \le 1\} = \|f\|_{L^q(X)}.$$

(訂正： $q = \infty$, $r < \infty$ の場合は max を sup に置きかえよ．)

99. 可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して $I = \{p \in (0, \infty] \mid \|f\|_{L^p(X)} < \infty\}$ とおく。

(1) $\|f\|_{L^p(X)}$ は p の関数として I 上で連続、内部で C^∞ であり、I に含まれない端点 $\in (0, \infty]$ への極限は発散する事を示せ。

(2) I が 0 の近傍を含むなら $\lim_{p \to +0} \|f\|_{L^p(X)}^p = |\{x \in X \mid f(x) \ne 0\}|$ を示せ。

100. 測度空間 X が $\delta = \inf\{|A| \mid X \supset A : \text{可測},\ |A| > 0\} > 0$ を満たすとき、$0 < \forall p \le \forall q \le \infty$, $\forall f \in L^p(X)$ について次が成立つ事を示せ。

$$\|f\|_{L^q(X)} \le \|f\|_{L^p(X)} \delta^{1/q - 1/p}.$$

101. $(\star)$ $0 < p < \infty$, 関数列 $f_n \in L^p(X)$ が $a.e.x \in X$ で $f_n(x) \to f(x)$ かつ $\|f_n\|_{L^p(X)} \to \|f\|_{L^p(X)}$ を満たすなら $\|f_n - f\|_{L^p(X)} \to 0$ を示せ。

102. (Minkowski の不等式) X, Y は σ 有限な測度空間として、可測関数 $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ と $0 < p, q \le \infty$ に対して $\|f\|_{L^q_y}(x) = \|f(x, \cdot)\|_{L^q(Y)}$, $\|f\|_{L^p_x L^q_y} = \|\|f\|_{L^q_y}\|_{L^p(X)}$ とおく。$p \le q$ のとき次の不等式が成立つ事を示せ。

$$\|f\|_{L^q_y L^p_x} \le \|f\|_{L^p_x L^q_y}.$$

103. $0 < p \le \infty$, $L^p(X) \ni f, g$ が $a.e.x \in X$ で $f(x) = g(x)$ のとき $f \sim g$ と定め、$L^p(X) \ni \forall f, \forall g$ の同値類 $[f], [g]$ に対し

$$d([f],[g]) = \begin{cases} \|f - g\|_{L^p(X)} & (1 \le p \le \infty) \\ \|f - g\|_{L^p(X)}^p & (0 < p < 1) \end{cases}$$

とおくと商空間 $L^p(X)/_\sim$ は完備距離空間になる事を示せ。

104. $(\star)$ $2 \le p < \infty$ とする。(1) $\forall a, \forall b \in \mathbb{C}$ で次の不等式が成り立つ事を示せ。

$$|a + b|^p + |a - b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

(2) 関数列 $f_n, g_n \in L^p(X)$ が $\|f_n\|_{L^p(X)} \to 1$, $\|g_n\|_{L^p(X)} \to 1$ と $\|f_n + g_n\|_{L^p(X)} \to 2$ を満たすなら $\|f_n - g_n\|_{L^p(X)} \to 0$ となる事を示せ。

105. (Young の不等式) 可測関数 $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して合成積を次で定める

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

$p, q, r \in [1, \infty]$, $1/p + 1 = 1/q + 1/r$ のとき次の不等式が成り立つ事を示せ。

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}.$$

106. $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $a.e.t \in \mathbb{R}$ で $g(t+1) = g(t)$ のとき、次の等式を示せ。

$$\lim_{s \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(st)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt \int_0^1 g(t)dt.$$

107. ($\star$)　可測関数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して $f^* : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ を

$$f^*(x) = \inf\{s \geq 0; |\{y \in \mathbb{R}^d \mid |f(y)| > s\}| \leq |\{y \in \mathbb{R}^d \mid |y| < |x|\}|\}.$$

で定義する (ただし $\inf \emptyset = \infty$)。以下が成り立つ事を示せ。

(1) $f^*(x)$ は $r = |x|$ の関数として右連続単調減少。
(2) $F : [0, \infty] \to [0, \infty]$ 単調増加左連続なら

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(|f(x)|)dx = \int_{\mathbb{R}^d} F(f^*(x))dx.$$

108. ($\star$) (Hardy-Littlewood 極大関数) $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} r^{-d} \int_{|x-y|<r} |f(y)|dy$$

とおくと、d のみに依存する $C \in (0, \infty)$ が存在して $\forall \alpha \in (0, \infty)$ について次の不等式が成り立つ事を示せ。

$$\alpha |\{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathcal{M}f(x) > \alpha\}| \leq C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

109. (1) $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ のとき $a.e.x \in \mathbb{R}^d$ について以下が成り立つ事を示せ：$\mathbb{R}^d \supset A_1, \ldots,$:可測、$A_n \subset \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x-y| < r_n\}$, $r_n \to 0$, $\inf_{n \in \mathbb{N}} |A_n|/r_n^d > 0$ なら

$$\frac{1}{|A_n|} \int_{A_n} |f(x) - f(y)|dy \to 0.$$

(2) $f \in L^1(\mathbb{R})$ のとき $F(x) = \int_0^x f(y)dy$ とおくと $a.e.x \in \mathbb{R}$ で微分可能で $F'(x) = f(x)$ である事を示せ。

110. $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ として、$\forall t > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy$$

とおくとき、以下を示せ。

(1) $u(t, x)$ は $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ で C^∞ かつ熱方程式 $\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x)$ を満たす。ただし $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$.
(2) $1 \leq p < \infty$ なら $\lim_{t \to +0} \|u(t, \cdot) - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0$.
(3) $p = \infty$ の場合、(2) が成り立たない $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在する。

111. $(\star)$ (Calderón-Zygmund 分解) $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall \alpha > 0$ に対して以下を満たす $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ と互いに交わらない立方体 (同じ長さの区間 d 個の直積) の列 $Q_1, Q_2, \ldots, \subset \mathbb{R}^d$ が存在する事を示せ。

(1) $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$, $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le 2^d\alpha$.
(2) $\mathrm{supp}(f-g) \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$, $\sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j| \le \alpha^{-1}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.
(3) $\forall j \in \mathbb{N}$, $\int_{Q_j}(f(x)-g(x))dx = 0$, $\|f-g\|_{L^1(Q_j)} \le 2^{d+1}\alpha|Q_j|$.

112. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C},\ C^\infty \mid \forall\alpha, \forall\beta \in \mathbb{N}_0^d,\ x^\alpha\partial^\beta f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)\}$ とおく。また、$\varphi(t) = t/(1+t)$ とおいて $\forall f, \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し $\rho(f,g)$ を次で定める

$$\rho(f,g) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d} 2^{-|\alpha|-|\beta|}\varphi(\|x^\alpha\partial^\beta(f-g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)})$$

このとき $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \rho)$ は完備距離空間になる事を示せ。

113. (1) $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $f \mapsto \lambda f, x^\alpha f, \partial^\alpha f$ はどれも $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 連続写像である事を示せ。
(2) $(f,g) \mapsto f+g, fg$ はどちらも $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^2 \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の連続写像である事を示せ。

114. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ni \forall f$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を次で定める

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 連続で $\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $\forall f, \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対し次が成り立つ事を示せ。

$$\mathcal{F}(x^\alpha f) = (i\partial)^\alpha\mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}(\partial^\alpha f) = (-ix)^\alpha\mathcal{F}f, \quad \mathcal{F}(f*g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$$

115. $(\star)$ (1) $s \in \mathbb{C}$, $\Re s < 0$ のとき、$e^{s|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の Fourier 変換を求めよ。
(2) $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ について $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の位相で $\lim_{s\to+0} e^{-s|x|^2}f = f$ を示せ。
(3) $\mathcal{F}$ の逆写像は $\mathcal{F}^{-1}f(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ で与えられる事を示せ。

116. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $u(t,x)$ を $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|^2}\mathcal{F}\varphi)$ で定義すると、u は $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}$ 上で C^∞ 級で、Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u = \Delta u$$

を満たし、$t \to 0$ とすると $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の位相で φ へ収束する事を示せ。

117. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \{F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C} \mid \text{連続線形}\}$ とおき、$\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $\forall\varphi, \forall\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\forall F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ に対して $\psi^\dagger(x) = \psi(-x)$,

$$(x^\alpha F)(\varphi) = F(x^\alpha\varphi), \quad (\partial^\alpha F)(\varphi) = F((-\partial)^\alpha\varphi),$$
$$(\psi F)(\varphi) = F(\psi\varphi), \quad (\psi * F)(\varphi) = F(\psi^\dagger * \varphi), \quad (\mathcal{F}F)(\varphi) = F(\mathcal{F}\varphi)$$

とおくと $x^\alpha F, \partial^\alpha F, \psi F, \psi * F, \mathcal{F}F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ となる事を示せ。

118. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して $I[f](\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx$ とおくと $L^1(\mathbb{R}^d)/_\sim + L^\infty(\mathbb{R}^d))/_\sim \ni f \mapsto I[f] \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 単射となる事を示せ (同値類の定義は問 103 の通り)。更に $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の場合, $\forall\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $\forall\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$I[x^\alpha f] = x^\alpha I[f],\ I[\partial^\alpha f] = \partial^\alpha I[f],\ I[\psi f] = \psi I[f],\ I[\psi * f] = \psi * I[f],\ I[\mathcal{F}f] = \mathcal{F}I[f]$$

となる事を示せ。以下、f と $I[f]$ を同一視する。

119. $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ のとき $g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix\xi}dx$ とおくと g は $\mathbb{R}^d$ 上で連続かつ有界で、次の等式が成り立つ事を示せ。

$$\lim_{|\xi|\to\infty} g(\xi) = 0, \quad \mathcal{F}I[f] = I[g].$$

120. $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ のとき、関数列 $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ が存在して $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ を満たし、さらに $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $I[f_n](\varphi) \to I[f](\varphi)$ となる事を示せ。

121. (1) $0 < \alpha < d \in \mathbb{N}$ のとき $|x|^{-\alpha}$ の Fourier 変換を求めよ。
(2) $s \in \mathbb{C}$, $\Re s = 0$ のとき $e^{s|x|^2}$ の Fourier 変換を求めよ。

122. (Plancherel の定理) $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ のとき次の等式が成り立つ事を示せ。

$$(2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}d\xi.$$

123. $(\star)$ (Littlewood-Paley 分解) $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ が $|\xi| \le 1$ で $\chi(\xi) = 1$, $|\xi| \ge 2$ で $\chi(\xi) = 0$ を満たすとして、$\forall j \in \mathbb{Z}$, $\forall p \in [1, \infty]$, $\forall F \in L^p(\mathbb{R}^d)$ に対し

$$\chi_j = \chi(2^{-j}\xi) - \chi(2^{-j+1}\xi), \quad \Delta_j F = \mathcal{F}^{-1}(\chi_j \mathcal{F}F)$$

と定める。以下が成り立つ事を示せ。

(1) $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\exists F_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $\Delta_j F = I[F_j]$.
(2) $1 < p < \infty$ なら $\lim_{N\to\infty} \|F - \sum_{j=-N}^{N} F_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0$.
(3) $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $\exists C_k \in (1, \infty)$, $1 \le \forall p \le \forall q \le \infty$, $\forall F \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$,

$$2^{(d/q-d/p)j}\|F_j\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}/C_k \le 2^{-kj} \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha F_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C_k \|F_j\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

124. $(\star)$ (Gagliardo-Nirenberg の不等式) $d \in \mathbb{N}$, $s > 0$, $0 < \theta < 1$, $1/p = 1/2 - \theta s/d \in [0, 1/2]$ のとき、ある $C \in (0, \infty)$ が存在して $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して次の不等式が成り立つ事を示せ。

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \||\xi|^s \mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{\theta}.$$

125. $(\star)$ 実数値関数 $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$ が $\mathbb{R}^3$ 上で偏微分方程式

$$-\Delta u + u = u^3$$

を満たすとする。ただし $\Delta u = \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}^2 u$ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ の意味で解釈する。このとき u は $\mathbb{R}^3$ 上で C^∞ 級である事を示せ。

126. $(\star)$ $V : \mathbb{R}^d \to (-\infty, 0]$ は有界可測で $|\{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) < 0\}| > 0$ かつ

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{|x|>R} |V(x)| = 0$$

とする。$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall \lambda > 0$ に対し $E_\lambda(f)$ を次で定める

$$E_\lambda(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d}[|x|^2|\mathcal{F}f(x)|^2 + \lambda V(x)|f(x)|^2]dx}{\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2 dx}$$

$\lambda > 0$ が十分大なら E_λ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上で負の最小値を持つ事を示せ。更に、その最小値を $m = E_\lambda(f)$ とすると, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ の意味で次の方程式が成り立つ事を示せ

$$-\Delta f + \lambda V f = mf.$$