数理ファイナンス入門*

重川 一郎†

平成 21 年 9 月 29 日

目 次

*2009 年 9 月 14 日 (月)～17 日 (木) 愛媛大学理学部集中講義
†e-mail: `ichiro@math.kyoto-u.ac.jp`, URL: `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/`

1.　2項モデル

この節では，2項モデルを中心にオプションの価格付けについて述べる．

オプション

時刻を $t = 0, 1, \ldots, T$ とし，株価を S_t とする．正確には S_t は一単位あたりの値段である．また株の売買は一単位以下のものも許すものとする．例えば 0.5 株買う，ということを認める．

コールオプション:	満期時 T に行使価格 K で，決められた数の株を買う権利
プットオプション:	満期時 T に行使価格 K で，決められた数の株を売る権利

コールオプションの場合に解説を加えよう．株は 1 株だけ買うことに固定しておく．満期時の株価は S_T である．$S_T \le K$ であれば，市場で価格 S_T で売られている株を，それより高い値段の K で買う必要はない．損をするだけである．従ってこの場合は権利は行使されず，利得は 0 である．$S_T > K$ のときに意味を持つ．このときは安い値段の K で買うことが出来るのであるから，権利を行使して，K を支払って株を買い，直ちに市場価格の S_T で売却すれば $S_T - K$ の利得が得られる．従ってこのコールオプションの価値は $(S_T - K)_+$ と考える．プットの場合も同様である．数式で書けば

コールオプション:	$H = (S_T - K)_+$
プットオプション:	$H = (K - S_T)_+$

これらの時刻 0 における価格 $\pi(H)$ を決めることが問題．未来のものを，現在の時点で価格付けしなければならない．

オプションのように，株式そのもの（これを原資産という）ではなく，それから派生したものという意味で**派生証券** (derivative secureity) と呼ぶ．また株価の変動に応じて支払いが変動するので，**条件付き請求権** (contingent claim) とも呼ばれる．

単期間モデル: コールオプションの例

時刻は 0 と 1 のみ．株価の変動を $\{S_t\}, t = 0, 1$ で表す．$S_0 = 10$ として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p \\ 7.5, & \text{確率 } 1 - p \end{cases}$$

とした場合に，コールオプション $H = (S_1 - K)_+$ の $K = 15$ の場合の価格を考えよう．

価格を平均と考えると

$$E[(S_1 - K)_+] = (20 - 15) \times p + 0 \times (1 - p) = 5p$$

である．従来はこれが価格と考えられてきた．$p = 0.5$ ならば，2.5 が価格である．

実際には価格は 1 とすべきことを以下に述べる．全体の見通しを与えるために，目標をはっきりさせておこう．次のことを示すことがこの講義の目標である．

- オプションの価格は同値マルチンゲール測度での平均で与えられる．
- 市場が viable (no arbitrage) $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度が存在
- viable な市場が完備 $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度は一意的
- オプションを複製する戦略によってヘッジできる

無裁定条件

「元手 0 から出発して正の利得を得る」という取引を**裁定取引** (arbitrage) という．**裁定機会**と呼ばれることもある．この様な裁定取引が存在しない，というのが経済の基本的な原則である．これを

- 無裁定条件 (no arbitrage)

と呼ぶ．no free lunch という用語も使われる．

以後この無裁定の条件から価格が決まってくることを見ていく．また確率論的な意味づけも与える．

コール・プットパリティ

無裁定の条件の使い方の例として，コール・プットパリティを証明してみよう．

コール $(S_T-K)_+$ と プット $(K-S_1)_+$ を考え，更に利子で時間とともに $(1+\rho)^t$ の割合で預金が増えていくとする．これは時間とともにお金の価値が変っていくことを意味する．さてコールとプットの時刻 t における価格を C_t, P_t とする．すると次の関係 (コール・プットパリティと呼ばれる) が成立する：

$$C_t - P_t = S_t - (1+\rho)^{-(T-t)}K. \tag{1.1}$$

これを見るために時刻 t において次の二つの状況を考えてみよう．

1. コールを買い，プットを売る．
2. 株を 1 単位買い，金を $(1+\rho)^{-(T-t)}K$ だけ借りる．

これから出発して時刻 T での状態を考えてみると

1. $C_T - P_T = (S_T-K)_+ - (K-S_T)_+$ 所有
2. $S_T - (1+\rho)^{(T-t)}(1+\rho)^{-(T-t)}K$ だけ所有

どちらも $S_T - K$ だけ所有している．

(1.1) が成立しなければ，時刻 t のときに差額が生じる．従ってこの差額を利用して裁定機会が生じることになる．よって，無裁定の条件から等号が成立しなければならない．

ポートフォリオ

株 S_t のほかに銀行からの資金の貸し借りも含めた状況を考える．銀行との取引を一種の証券と考え B_t で表す．B_t は**安全証券** (riskless security) と呼ばれることがある．これに対して株の方は**危険証券** (risky security) と呼ばれる．B_t もやはり単価であり，B_t を買うことは，借金することに相当する．B_t はお金そのものと考えた方が分かりやすいので以下ではそのような解釈で話を進めていく．また以下では $B_t = (1+\rho)^t$ とする．ρ は利率である．B_t の保有量を η_t とし，S_t の保有量を θ_t とするとき (η_t, θ_t) を**ポートフォリオ**と呼ぶ．これは配分の比率を表している．さらに，

$$V_t = \eta_t B_t + \theta_t S_t$$

を価値過程と呼ぶ．資金の運用による，資産の状態を表している．ポートフォリオに対しては

$$\eta_t B_t + \theta_t S_t = \eta_{t+1} B_t + \theta_{t+1} S_t$$

を仮定する．これが満たされるとき**自己充足的**または**自己資金調達** (self financing) であるいう．別のところからの資金の貸し借りはない，ということである．このようにポートフォリオを組んで，満期時点で V_T を $H = (S_T - K)_+$ に等しくなるようにすることを考える．この操作を**複製** (duplication) という．

$V_T = H$ となるようなポートフォリオ (η_t, θ_t) が存在するとき，このときの V_0 がこのオプションの価格となる．このことを以下見ていくことにする．

単期間のポートフォリオ

単期間モデルの場合に戻る．また簡単のため $B_t = 1$ として，利率が 0 の場合を考える．今は $T = 1$ なので，(η_1, θ_1) だけ考えればいいので (η, θ) と表す．また簡単のため利率は 0 とする．即ち $B_t = 1$. すると

$$V_0 = \eta + \theta S_0$$
$$V_1 = \eta + \theta S_1$$

$H = V_1$ となる (η, θ) を求めたい．S_1 は二つの場合があるので

$$S_1(\omega_+) = 20,$$
$$S_1(\omega_-) = 7.5,$$

とすると

$$H(\omega_+) = 5,$$
$$H(\omega_-) = 0$$

である．

$$H(\omega) = \eta + \theta S_1(\omega)$$

を解けばよい．即ち

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 7.5\theta \end{cases}$$

図式的に表すと

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
S_0 & S_1 & H & \\
 & 20 & 5 & 5 = \eta + 20\theta \\
10 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & 7.5 & 0 & 0 = \eta + 7.5\theta
\end{tikzcd}$$

これを解いて

$$\eta = -3, \quad \theta = 0.4$$

$V_0 = \eta + \theta S_0$ に代入して

$$V_0 = -3 + 0.4 \times 10 = 1$$

が求める価格である．

- オプションを売る側 (writer) で考えてみる．
  - $t = 0$ のとき
    - オプションを 1 で売る　　1
    - 銀行から 3 を借りる　　3
    - 株を 0.4 株買う　0.4×10　-4
  - $t = 1$ のとき

$S_1 = 20$ のとき		
∗ 買い手がオプションを行使して 15 で株を買いに来る		15
∗ 株を 0.6 株買う	0.6×20	-12
∗ 銀行へ 3 返済		-3
∗ 1 株を買い手に引き渡す		
$S_1 = 7.5$ のとき		
∗ 0.4 株売る	0.4×7.5	3
∗ 銀行へ 3 返済する		-3

価格が $\pi(H) > 1$ であれば，1 を元手に上のことを実行すれば，$\pi(H) - 1$ が手許に残る．売り手有利．$\longrightarrow \pi(H) > 1$ ではありえない．

- 買い手 (buyer) 場合を考えてみる

- $t=0$ のとき
  - ＊ -0.4 株購入 $=0.4$ 株売る (空売り)　0.4×10　4
  - ＊ 3 を銀行へ預金　-3
  - ＊ 1 でオプションを購入　-1
- $t=1$ のとき

$S_1=20$ のとき	
＊ 銀行から 15 借りる	15
＊ 15 でオプションを行使して 1 株買う	-15
＊ $1-0.4=0.6$ 株売る　0.6×20	12
＊ 銀行へ 12 返済	-12
$S_1=7.5$ のとき	
＊ 銀行から 3 引き出す	3
＊ 0.4 株買う　0.4×7.5	-3

最初の価格が $\pi(H)<1$ であれば，手許に $1-\pi(H)$ 残るので買い手に有利 $\longrightarrow \pi(H)<1$ ではありえない．

最後に注意として

$$S_1=\begin{cases}20, & \text{確率 } p\\ 5, & \text{確率 } 1-p\end{cases}$$

の場合を考えてみよう．先のものとの違いは，変動の幅が大きいことである．このとき

$$\begin{cases}5=\eta+20\theta,\\ 0=\eta+5\theta\end{cases}$$

を解いて

$$\eta=-\frac{5}{3},\quad \theta=\frac{1}{3}$$

$V_0=\eta+\theta S_0$ に代入して

$$V_0=-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\times 10=\frac{5}{3}.$$

前の場合より，価格が高くなっている．このように，価格の変動が大きいと価格は一般に高くなる．

単期間 3 項モデル

$S_0 = 10$ として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p_1 \\ 10, & \text{確率 } p_2 \\ 7.5, & \text{確率 } p_3 \end{cases}$$

となる場合を考えてみよう．このとき行使価格を $K = 15$ としてコールオプション $S_1 - K_+$ の複製を作ることを考える．2 項の場合と同様にすると，次の方程式を解かなければならない．

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 10\theta, \\ 0 = \eta + 7.5\theta. \end{cases}$$

明らかにこの場合は解が存在しない．このように，複製が必ずしも可能でないものが存在するとき，**非完備市場**という．このときにはリスク中立測度は無限に存在し，別の基準を導入しなければ一意的には決まらない．このような場合は困難が伴うので，ここではどんな複製も可能な**完備市場**のみを扱う．

リスク中立測度

単期間二値モデルを一般的な枠組みで考える．安全証券の方は $B_t = (1+\rho)^t$ であるとする．$\beta = (1+\rho)^{-1} \leq 1$ を割引率という．異なった時間の価格はこの割引率を勘案した形で考える必要がある．S_0, S_1 を株価とする．S_1 は

$$S_1(\omega_+), \quad S_1(\omega_-)$$

の二値とする．$P(\omega_+) = p$, $P(\omega_-) = 1-p$ とする．p は価格付けに直接には関係しない．オプションを H として H の価格付けを考える．

価値過程は

$$\begin{aligned} V_0 &= \eta + \theta S_0 \\ V_1 &= \beta^{-1}\eta + \theta S_1. \end{aligned}$$

$V_1 = H$ としたいので $H = \beta^{-1}\eta + \theta S_1$.

$$H(\omega_+) = \beta^{-1}\eta + \theta S_1(\omega_+) \tag{1}$$

$$H(\omega_-) = \beta^{-1}\eta + \theta S_1(\omega_-) \tag{2}$$

これを解いて

$$\theta = \frac{H(\omega_+) - H(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}$$

また $(1)\times S_1(\omega_-)-(2)\times S_1(\omega_+)$ としてこれを解いて

$$S_1(\omega_-)H(\omega_+)-S_1(\omega_+)H(\omega_-)=\beta^{-1}\eta(S_1(\omega_-)-S_1(\omega_+))$$
$$\eta=\frac{\beta(S_1(\omega_+)H(\omega_-)-S_1(\omega_-)H(\omega_+))}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}$$

と求まる．従って V_0 は

$$\begin{aligned}
V_0&=\eta+\theta S_0\\
&=\frac{\beta(S_1(\omega_+)H(\omega_-)-S_1(\omega_-)H(\omega_+))}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}+\frac{H(\omega_+)-H(\omega_-)}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}S_0\\
&=\frac{S_0-\beta S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}H(\omega_+)+\frac{\beta S_1(\omega_+)-S_0}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}H(\omega_-)\\
&=\beta\left\{\frac{\beta^{-1}S_0-S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}H(\omega_+)+\frac{S_1(\omega_+)-\beta^{-1}S_0}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}H(\omega_-)\right\}\\
&=\beta(qH(\omega_+)+(1-q)H(\omega_-)).
\end{aligned}$$

ここで

$$q=\frac{\beta^{-1}S_0-S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)} \tag{1.2}$$

とおいた (これは H には関係していないことに注意しよう)．即ち，確率 Q を

$$Q(\{\omega_+\})=q,\quad Q(\{\omega_-\})=1-q$$

と定めれば

$$\pi(H)=V_0=E^Q[\beta H].$$

これは，価格がある確率に関する期待値で表されている，ということを意味している．但し，これはもともとの確率とは異なっている．この確率測度を**リスク中立測度**と呼ぶ．

この測度の意味を考えよう．そのために期待値 $E^Q[\beta S_1]$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
E^Q[\beta S_1]&=\beta S_1(\omega_+)q+\beta S_1(\omega_-)(1-q)\\
&=\beta S_1(\omega_+)\frac{\beta^{-1}S_0-S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}+\beta S_1(\omega_-)\frac{S_1(\omega_+)-\beta^{-1}S_0}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}\\
&=\frac{S_1(\omega_+)S_0-\cancel{\beta S_1(\omega_+)S_1(\omega_-)}+\cancel{\beta S_1(\omega_-)S_1(\omega_+)}-S_1(\omega_-)S_0}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}\\
&=\frac{(S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-))S_0}{S_1(\omega_+)-S_1(\omega_-)}\\
&=S_0
\end{aligned}$$

となり，これは $S_0,\beta S_1$ がマルチンゲールになっていることを意味する．即ち，リスク中立測度は，(割り引いた) 株価過程がマルチンゲールになる様な測度なのである．そのために**同値マルチンゲール測度**とも呼ばれる．

多期間 2 項モデル=CRR モデル

株価過程 $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_T$ を次で定める：

$$S_t = \begin{cases} (1+b)S_{t-1} & \text{確率 } p \\ (1+a)S_{t-1} & \text{確率 } 1-p \end{cases}$$

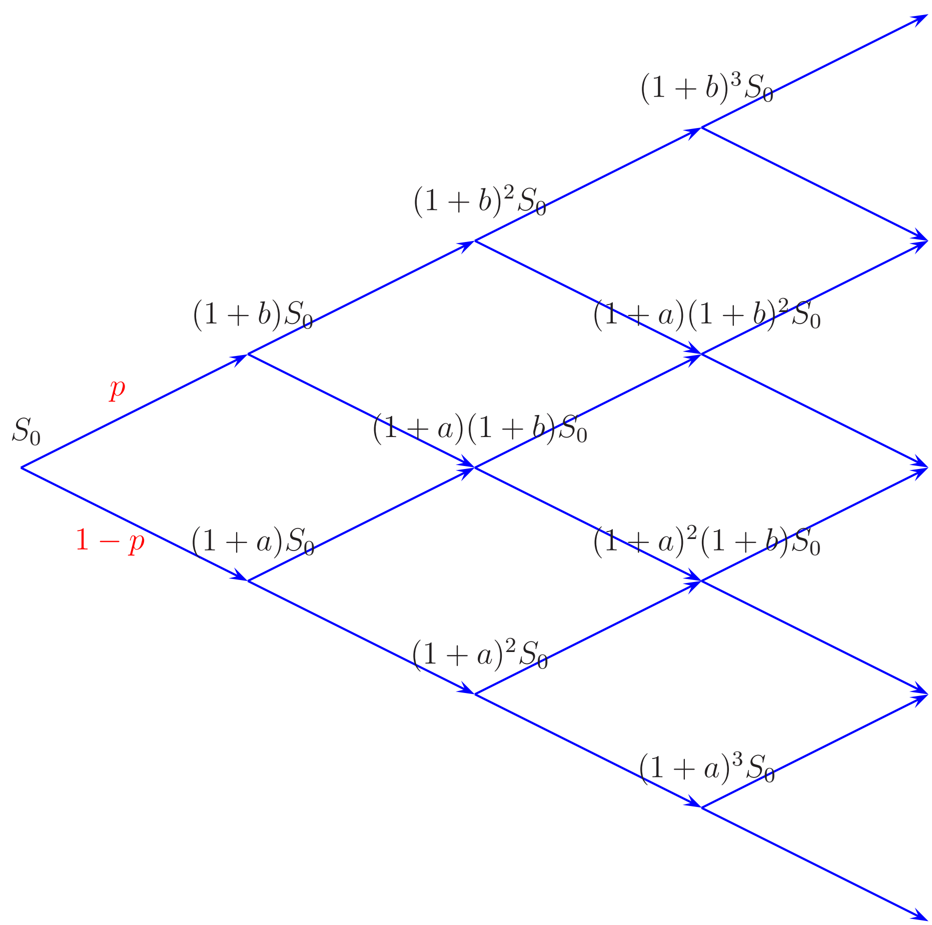

図 1: CRR モデル

単期間のときは，(1.2) から

$$\beta = (1+\rho)^{-1}, \quad q = \frac{\beta^{-1}S_0 - (1+a)S_0}{(1+b)S_0 - (1+a)S_0} = \frac{\rho - a}{b - a}$$

とおくと，価格は

$$V = E^Q[\beta H] = \beta(qH_b + (1-q)H_a)$$

であった．

　これを 2 期間の時に次のように考える．

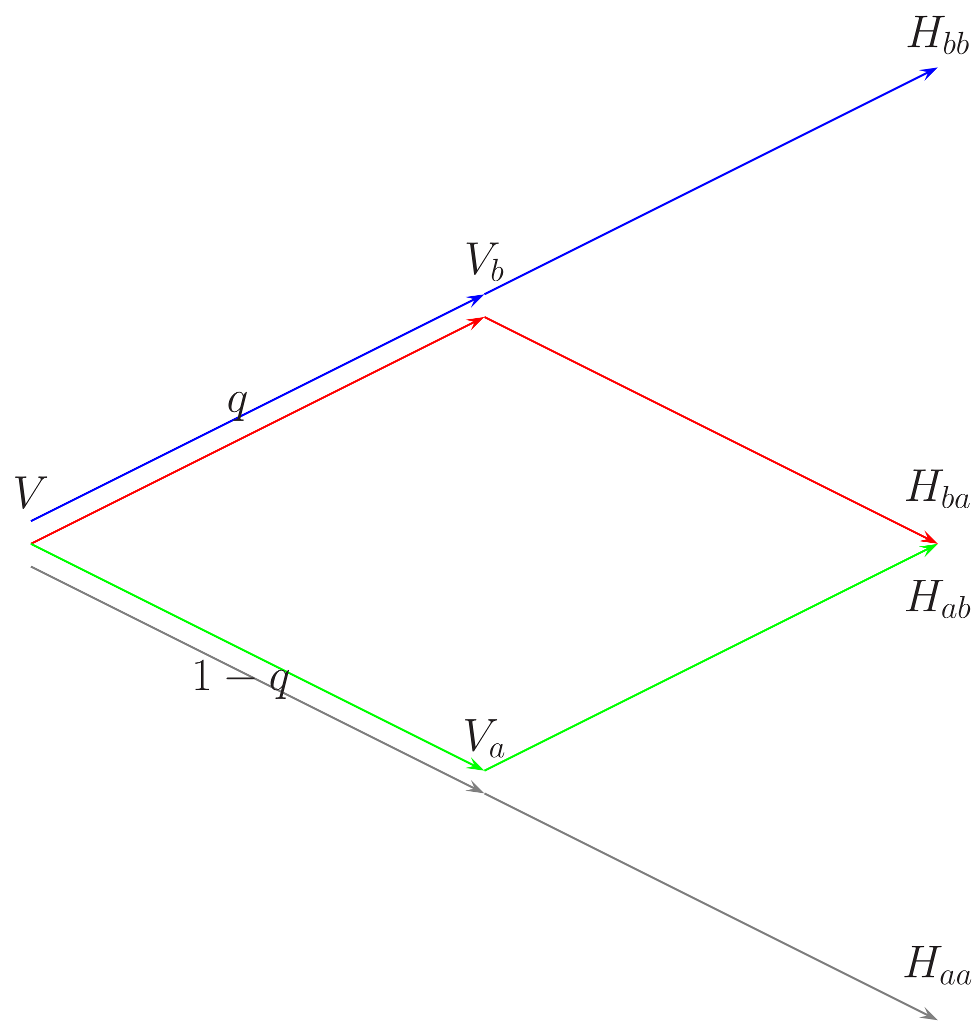

図 2: 2 期間 CRR モデル

　オプション H の時刻 $T-2$ における価格を V_{T-2} を帰納的に求めることが出来る．まず時刻 $T-1$ のとき，図の V_a, V_b は

$$V_b = \beta(qH_{bb} + (1-q)H_{ba}) \tag{1.3}$$

$$V_a = \beta(qH_{ab} + (1-q)H_{aa}). \tag{1.4}$$

さらに V_b, V_a をオプションと見て，時刻 $T-2$ における価格は

$$V = \beta(qV_b + (1-q)V_a) \tag{1.5}$$

(1.5) へ (1.3), (1.4) を代入して

$$V = \beta^2(q^2 H_{bb} + q(1-q)H_{ba} + (1-q)qH_{ab} + (1-q)^2 H_{aa}) \tag{1.6}$$

が得られる．$S_{T-2} = S$ として，コールオプション $H = (S_T - K)_+$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} V = \beta^2\{ & q^2((1+b)^2 S - K)_+ + 2q(1-q)((1+a)(1+b)S - K)_+ \\ & + (1-q)^2((1+a)^2 S - K)_+\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

が得られることになる．

CRR 公式

以上の手続きを繰り返すと，価格として次のものが得られる．

$$\begin{aligned} V_0 &= \beta^T \sum_{t=0}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} ((1+b)^t (1+a)^{T-t} S_0 - K)_+ \\ &= S_0(1+\rho)^{-T} \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} (1+b)^t (1+a)^{T-t} - K(1+\rho)^{-T} \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} \\ &= S_0 \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} \left(\frac{1+b}{1+\rho}\right)^t \left(\frac{1+a}{1+\rho}\right)^{T-t} - K(1+\rho)^{-T} \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} \end{aligned}$$

ここで

$$A = \min\{k;\ S_0(1+b)^k(1+a)^{T-k} > K\}.$$

更に整理をしよう．

$$q = \frac{\rho - a}{b - a}, \quad q' = q\frac{1+b}{1+\rho}$$

とおく．

$$\begin{aligned} q\frac{1+b}{1+\rho} + (1-q)\frac{1+a}{1+\rho} &= q\frac{b-a}{1+\rho} + \frac{1+a}{1+\rho} \\ &= \frac{\rho-a}{b-a}\frac{b-a}{1+\rho} + \frac{1+a}{1+\rho} \\ &= \frac{\rho-a}{b-a}\frac{\rho-a}{1+\rho} + \frac{1+a}{1+\rho} = 1 \end{aligned}$$

であるから

$$q' \in (0,1), \quad 1-q' = (1-q)\frac{1+a}{1+\rho}$$

である．従って

$$\begin{aligned} V_0 &= S_0 \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} (q')^t (1-q')^{T-t} - K(1+\rho)^{-T} \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} \\ &= S_0 \Psi(A; T, q') - K(1+\rho)^{-T} \Psi(A; T, q) \end{aligned} \tag{1.8}$$

ここで

$$\Psi(m; n, p) = \sum_{j=m}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

(1.8) は Cox-Ross-Rubinstein (CRR) の公式と呼ばれている

ヘッジ

一般の時刻 t に対しては

$$\begin{aligned} V_t &= \beta^{T-t} \sum_{s=0}^{T-t} \binom{T-t}{s} q^s (1-q)^{T-t-s} ((1+b)^s (1+a)^{T-t-s} S_t - K)_+ \\ &= S_t \Psi(A_t; T-t, q') - K(1+\rho)^{-(T-t)} \Psi(A_t; T-t, q) \end{aligned} \tag{1.9}$$

が成り立つ．但し

$$A_t = \min\{k; S_t(1+b)^k(1+a)^{T-t-k} > K\}.$$

ここで $[t-1, t]$ でのポートフォリオを (η_t, θ_t) とすると

$$V_t = \eta_t(1+\rho)^t + \theta_t S_t$$

V_t は S_t から決まるが，S_t は S_{t-1} と，$[t-1, t]$ における変動で決まる．今の場合の 2 項モデルでは $S_t = (1+b)S_{t-1}$ か $S_t = (1+a)S_{t-1}$ のどちらになるかで決まる．対応する価格を V_t^b, V_t^a とすれば

$$\begin{aligned} V_t^b &= \eta_t(1+\rho)^t + \theta_t(1+b)S_{t-1}, \\ V_t^a &= \eta_t(1+\rho)^t + \theta_t(1+a)S_{t-1} \end{aligned}$$

であるから

$$\theta_t = \frac{V_t^b - V_t^a}{(b-a)S_{t-1}}, \quad \eta_t = \frac{(1+b)V_t^a - (1+a)V_t^b}{(1+\rho)^t(b-a)} \tag{1.10}$$

となる．さらに V_t^b, V_t^a は最初の式に戻って

$$V_t^b = \beta^{T-t}\sum_{s=0}^{T-t}\binom{T-t}{s}q^s(1-q)^{T-t-s}((1+b)^s(1+a)^{T-t-s}S_{t-1}(1+b)-K)_+$$

$$V_t^a = \beta^{T-t}\sum_{s=0}^{T-t}\binom{T-t}{s}q^s(1-q)^{T-t-s}((1+b)^s(1+a)^{T-t-s}S_{t-1}(1+a)-K)_+$$

となるから，θ_t, η_t が S_{t-1} の関数で表されていることを見ることが出来る．

コールオプションでは，満期時に売り手は価格 S_T の株を K で売らなければならない．S_t は K よりも大きい場合もあるのだから，何もしなければこの差額の分だけ損失を生む(最初にオプション料をを取っているから一部はそれで埋め合わせることができるが)．しかし上で述べた戦略をとれば，満期時にオプションを行使されてもそれに応じることが出来る．このようなリスクの回避策を**ヘッジ** (hedge) という．売り手側からすれば，この複製戦略を求めることが重要なのは明らかであろう．理論的な裏づけの必要性が理解されるであろう．

2. 離散モデルの一般的枠組み

取引戦略

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を与え，取引時刻を $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ とし，株価過程を (S_t)，時刻 t までで生成される σ-field を $\mathscr{F}_t$ で表す．株は d-種あり，$S^1, S^2, \ldots, S^d$ とする．さらに，安全証券として S^0 をおく．証券全体を $S = (S^0, S^1, S^2, \ldots, S^d)$ とおく

S^0	安全証券 (riskless security)
$S^1, S^2, \ldots, S^d$	危険証券 (risky security) 例えば株

$\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$ を**割引率** (discount factor) と呼ぶ．通常 $S_t^0 = (1+\rho)^t$ であることを仮定する．従って $\beta_t = (1+\rho)^{-t}$ である．しかしこのことは特にあとで必要になるわけではない．S^0 は deterministic である必要もない．異なる時刻での価格は基準が違うため，β_t をかけて調整しているわけである．時刻 t の時点での価値が 1 のものは，時刻 0 で β_t の価値を持つとみなす．

株の売買を行い，資産運用のモデルを立てよう．時刻 t における証券 S^0, $S^1, \ldots, S^d$ の保有量を

$$\theta_t = (\theta_t^0, \theta_t^1, \ldots, \theta_t^d)$$

で表す．これをポートフォリオと呼ぶ．またポートフォリオをどのように組替えていくかが**取引戦略** (trading strategy) となる．このときの**価値過程** (value process) を

$$V_0(\theta) = \theta_1 \cdot S_0 \tag{2.1}$$

$$V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d}\theta_t^i S_t^i, \quad t \geq 1 \tag{2.2}$$

で定める．時刻 $t-1$ の時点で保有量 θ_t を決め，$(t-1,t]$ の区間でこの保有量を保つ．時刻 t で，価値は $\theta_t \cdot S_t$ になる．この時点で新たな保有量 θ_{t+1} を決める．このように時刻 t の段階で保有量 θ_{t+1} を決めていくことになる．つまり，時刻 θ_{t+1} を決めるには時刻 t までの情報だけを使って決定されなければならない．そこで θ_t は $\mathscr{F}_{t-1}$ 可測である，という仮定をおく．このように一つ前に σ-field に関して可測な確率過程を**可予測** (predictable) な確率過程という．特に未来の情報を使うことが出来ない．これは現実に即した自然な仮定である．

さて，上に述べたように時刻 $t-1$ のときの価値が $\theta_t \cdot S_{t-1}$ であったものが，証券価格 S_t が変化することにより，時刻 t では $\theta_t \cdot S_t$ となる．この差額 $\theta_t \cdot S_t - \theta_t \cdot S_{t-1}$ を**利得**という (負の場合は損失である)．一般の確率過程 (X_t) に対して $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ の記法を使う．すると利得は

$$\theta_t \cdot \Delta S_t \tag{2.3}$$

と表される．これらの和として**利得過程** (gain process) G を次で定める:

$$G_0(\theta) = 0, \tag{2.4}$$

$$G_t(\theta) = \theta_1 \cdot \Delta S_1 + \theta_2 \cdot \Delta S_2 + \cdots + \theta_t \cdot \Delta S_t. \tag{2.5}$$

定義 2.1. 取引戦略 θ が次の条件をみたすとき，**自己資金調達** (self-financing) であるという (**自己充足的**と呼ばれることもある):

$$\theta_t \cdot S_t = \theta_{t+1} \cdot S_t, \quad 1 \le t \le T-1. \tag{2.6}$$

この条件は，時刻 t でポートフォリオを組み替えたとき，そのときの保有証券の価値 $\theta_t \cdot S_t$ と，新たに組み替えた保有証券の価値 $\theta_{t+1} \cdot S_t$ が等しくなることを要請している．つまり外部との資金の出し入れがなく，内部で閉じているということである．

self-financing の条件は $\theta_{t+1} \cdot S_t - \theta_t \cdot S_t = \Delta\theta_{t+1} \cdot S_t$ だから

$$\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0, \quad 2 \le t \le T. \tag{2.7}$$

とかくこともできる．self-financing の同値条件をまとめておこう．

命題 2.2. 次の条件は全て同値である:

$$\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0, \quad 2 \le t \le T, \tag{2.8}$$

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta S_t, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{2.9}$$

$$V_t(\theta) = V_0(\theta) + G_t(\theta), \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{2.10}$$

証明　まず (2.8) から (2.9) を導出しよう．(2.8) を仮定すると，$t = 2, \ldots, T$ のとき $\theta_t \cdot S_{t-1} = \theta_{t-1} \cdot S_{t-1}$ であるから

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t - \theta_{t-1} \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot S_t - \theta_t \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot \Delta S_t$$

が成り立つ．$t = 1$ のときは

$$\Delta V_1(\theta) = V_1(\theta) - V_0(\theta) = \theta_1 \cdot S_1 - \theta_1 \cdot S_0 = \theta_1 \cdot \Delta S_1$$

でやはり (2.9) が成立している．

次に (2.9) から (2.10) を示す．(2.9) が成り立っていると

$$\begin{aligned} V_t(\theta) &= V_0(\theta) + \sum_{s=1}^{t} \Delta V_s(\theta) \\ &= V_0(\theta) + \sum_{s=1}^{t} \theta_s \cdot \Delta S_s \\ &= V_0(\theta) + \sum_{s=1}^{t} \Delta G_s(\theta) \\ &= V_0(\theta) + G_t(\theta) - G_0(\theta) \\ &= V_0(\theta) + G_t(\theta). \end{aligned}$$

ここで 3 行目の等号で $\Delta G_s(\theta) = \theta_s \cdot \Delta S_s$ を使った．これで (2.10) が示せている．

最後に (2.10) から (2.8) を導こう．(2.10) を仮定すると $t \geq 1$ のとき

$$\Delta V_t(\theta) = \Delta G_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta S_t.$$

一方 $t \geq 2$ のとき

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t - \theta_{t-1} \cdot S_{t-1}.$$

よって $t \geq 2$ のとき

$$\cancel{\theta_t \cdot S_t} - \theta_{t-1} \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot \Delta S_t = \cancel{\theta_t \cdot S_t} - \theta_t \cdot S_{t-1}.$$

従って

$$(\theta_t - \theta_{t-1}) \cdot S_{t-1} = 0$$

となり (2.8) が示せた． □

基準財

常に正の確率過程 (Z_t) を**基準財** (numéraire) と呼ぶ．S_t の代わりに $Z_t S_t$ で考える．この様な変更を行っても self-financing の条件は変らない．実際

$$\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\theta_t \cdot (Z_{t-1} S_{t-1}) = 0$$

であるからこのことはすぐに分かる．(Z_t) は単に基準を何に採るかということだけで，本質は何も変らない．ドルで表示するか，ユーロで表示するかといった違いでしかない．(Z_t) 通

常 $Z_t = (S_t^0)^{-1} = \beta_t$ ととるが，正であればなんでもいいわけで，$(S_t^1)^{-1}$ ととっても構わない．また S^0 を安全証券と呼んだが，数学的には特に意味があるわけではない．全部が危険証券だけでも本来いいわけである．

さて，以下では $Z_t = \beta_t$ ととり，

$$\overline{S}_t := \beta_t S_t$$

とおく．$(\overline{S}_t)$ は割り引かれた証券価格過程 (discounted security price process) と呼ばれる．$(\overline{S}_t)$ に対応する確率過程を $\overline{V}, \overline{G}$ とする:

$$\overline{V}_0(\theta) = \theta_1 \cdot \overline{S}_0 \tag{2.11}$$
$$\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \overline{S}_t, \quad t \geq 1 \tag{2.12}$$
$$\overline{G}_0(\theta) = 0, \tag{2.13}$$
$$\overline{G}_t(\theta) = \theta_1 \cdot \Delta\overline{S}_1 + \theta_2 \cdot \Delta\overline{S}_2 + \cdots + \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t. \tag{2.14}$$

命題 2.3 で見たように $\overline{S}$ に対しても次の条件は同値になる．

$$\Delta\theta_t \cdot \overline{S}_{t-1} = 0, \quad 2 \leq t \leq T, \tag{2.15}$$
$$\Delta\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.16}$$
$$\overline{V}_t(\theta) = \overline{V}_0(\theta) + \overline{G}_t(\theta), \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{2.17}$$

(2.15) は基準財の変更だけだから前に見たように self-financing の条件と同値である．従って上の条件は全て self-financing と同値である．また $\overline{V}$ に対しては

$$\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \overline{S}_t = \theta_t \cdot \beta_t S_t = \beta_t \, \theta_t \cdot S_t = \beta_t \, V_t(\theta)$$

が成り立っている．$\overline{G}_t(\theta)$ は $G_t(\theta)$ と単純な関係では結ばれていない．但し θ が self-financing の場合は (2.17) から

$$\begin{aligned}
\overline{G}_t(\theta) &= \overline{V}_t(\theta) - \overline{V}_0(\theta) \\
&= \beta_t V_t(\theta) - \beta_0 V_0(\theta) \\
&= \beta_t (V_0(\theta) + G_t(\theta)) - \beta_0 V_0(\theta) \\
&= \beta_t G_t(\theta) + (\beta_t - \beta_0) V_0(\theta)
\end{aligned}$$

となる．特に $V_0(\theta) = 0$ のときは $\overline{G}_t(\theta) = \beta_t G_t(\theta)$ が成り立つ．以下 $S_0^0 = 1$ を常に仮定する．このとき $\overline{V}_0(\theta) = V_0(\theta)$ となっていることに注意しよう．

$\overline{G}(\theta)$ には θ_t^0 の寄与がないので，θ_t^0 は $V_0(\theta)$ と θ^i, $i = 1, \ldots, d$ から決まる．命題として述べておこう．

命題 2.3. V_0 と predictable process $\theta^1, \ldots, \theta^d$ が与えられたとき，predictable process θ^0 を

$$\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^d)$$

が self-financing であるように出来る．さらに θ^0 は次で一意的に定まる:

$$\theta_t^0 = V_0 + \sum_{u=1}^{t-1}(\theta_u^1 \Delta\overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta\overline{S}_u^d) - (\theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d). \tag{2.18}$$

証明 $\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^d)$ が self-financing であるとすると

$$\begin{aligned}\overline{V}_t(\theta) &= \theta_t^0 + \theta_t^1 \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_t^d = V_0 + \overline{G}_t \\ &= V_0 + \sum_{u=1}^{t}(\theta_u^1 \Delta\overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta\overline{S}_u^d).\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}\theta_t^0 &= V_0 + \sum_{u=1}^{t}(\theta_u^1 \Delta\overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta\overline{S}_u^d) - \theta_t^1 \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_t^d \\ &= V_0 + \sum_{u=1}^{t-1}(\theta_u^1 \Delta\overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta\overline{S}_u^d) + (\theta_t^1 \Delta\overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \Delta\overline{S}_t^d) - \theta_t^1 \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_t^d \\ &= V_0 + \sum_{u=1}^{t-1}(\theta_u^1 \Delta\overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta\overline{S}_u^d) - \theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d\end{aligned}$$

となり，(2.18) が得られる．

逆に (2.18) が成立すれば，θ_t^0 は predictable で，上の式を逆にたどれば $\overline{V}_t(\theta) = V_0 + \overline{G}_t(\theta)$ が成立するから，self-financing であることが示せる． □

裁定機会

self-financing strategy の全体を Θ とかく．さらに self-financing strategy θ が**許容** (admissible) であることを

$$V_t(\theta) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

が成り立つことと定義する．このような self-financing strategy 全体を Θ_a とかく．

定義 2.4. 次を満たす 許容戦略 (admissible strategy) を**裁定機会** (arbitrage opportunity) という．

$$V_0(\theta) = 0, \quad V_t(\theta) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad E[V_T(\theta)] > 0.$$

$E[V_T(\theta)] > 0$ の条件は $P(V_T(\theta) > 0) > 0$ と同値である．

定義 2.5. 裁定機会が存在しなとき，市場は**成熟** (viable）と呼ばれる．これは

$$\theta \in \Theta_a \text{ かつ } V_0(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_T(\theta) = 0$$

を意味する．

定義 2.4 では $V_t(\theta) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}$ を仮定したが

$$V_0(\theta) = 0, \quad V_T(\theta) \geq 0, \quad E[V_T(\theta)] > 0$$

のとき，弱い意味での裁定機会という．

命題 2.6. 弱い意味で裁定機会が存在すれば，本来の意味での裁定機会が存在する．

証明 θ を弱い意味での裁定機会とする．更にある t で $V_t(\theta)$ が負になる部分があるとする．従って $t < T$ と $A \in \mathscr{F}_t$ を $P(A) > 0$ で

$$\theta_t \cdot S_t < 0 \quad \text{on } A, \quad \theta_u \cdot S_u \geq 0 \quad \text{for } u > t$$

となるように取れる．これから新しい戦略 ϕ を次のように作る．まず A^c では $\phi_u = 0$ とする．A 上では

$$\begin{aligned}
&\phi_u(\omega) = 0, \quad u \leq t \\
&\phi_u^0(\omega) = \theta_u^0(\omega) - \frac{\theta_t \cdot S_t}{S_t^0(\omega)}, \quad \phi_u^i(\omega) = \theta_u^0(\omega), \quad i = 1, \ldots, d, \ u > t
\end{aligned}$$

と定める．ϕ が predictable であることは明らか．

self-financing であることを見よう．A^c では $V_u(\phi) = 0$ だから明らか．あとは A 上で $\Delta\phi_{t+1} \cdot S_t = 0$ を示せばよい．($\Delta\phi_u$ と $\Delta\theta_u$ が異なるのは $u = t + 1$ のときだけだから．) A 上では

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{t+1}^0 &= \phi_{t+1}^0 = \theta_{t+1}^0 - \frac{\theta_t \cdot S_t}{S_t^0}, \\
\Delta\phi_{t+1}^i &= \theta_{t+1}^i, \quad i = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{t+1} \cdot S_t &= \Delta\phi_{t+1}^0 S_t^0 + \sum_{i=1}^d \Delta\phi_{t+1}^i S_t^i \\
&= (\theta_{t+1}^0 - \frac{\theta_t \cdot S_t}{S_t^0}) S_t^0 + \sum_{i=1}^d \theta_{t+1}^i S_t^i \\
&= \theta_{t+1}^0 S_t^0 - \theta_t \cdot S_t + \sum_{i=1}^d \theta_{t+1}^i S_t^i \\
&= \theta_{t+1} \cdot S_t - \theta_t \cdot S_t \\
&= 0
\end{aligned}$$

最後の等式で，θ が self-financing を使った．

次に $V_u(\phi) \geq 0$ と $P(V_T(\phi) > 0) > 0$ を示す．A^c では $V_u(\phi) = 0$ である．A 上では $u \leq t$ のときは $V_u(\phi) = 0$ である．$u > t$ のとき

$$\begin{aligned} V_u(\phi) = \phi_u \cdot S_u &= \theta_u^0 S_u^0 - \frac{(\theta_t \cdot S_t) S_u^0}{S_t^0} + \sum_{i=1}^d \theta_u^i S_u^i \\ &= \theta_u \cdot S_u - (\theta_t \cdot S_t) \frac{S_u^0}{S_t^0}. \end{aligned}$$

条件から $\theta_u \cdot S_u \geq 0$, $u > t$ で $(\theta_t \cdot S_t) < 0$, $S^0 \geq 0$ であるから $V_u(\phi) \geq 0$ が成り立つ．
最後に A 上で $V_T(\phi) > 0$ となることは $\theta_t \cdot S_t < 0$ より従う． □

条件付請求権 H を 1 つ固定する．H は単に $\mathscr{F}_T$ 可測な非負確率変数ということである．H は適当な $\theta \in \Theta_a$ が存在して

$$V_T(\theta) = H \tag{2.19}$$

とできるとき，**複製される** (duplicated) という．このとき，viable の条件があれば，価値過程 $V_t(\theta)$ は一意に決まる．即ち $\theta, \theta' \in \Theta_a$ が $V_T(\theta) = V_T(\theta') = H$ を満たすと，$V_t(\theta) = V_t(\theta')$ が全ての t で成立する．このことを示そう．この事実を経済学では**一物一価の法則**と呼ぶ．価格は一意的に決まるということである．そうでなければ，安い値段で買って，高い値段で売ればよいのだから裁定機会が存在することは直観的には明らかである．

命題 2.7. viable market で複製可能な H に対して，価値過程は一意的である．

証明　許容戦略 θ, ϕ がともに

$$V_T(\theta) = V_T(\phi) = H$$

を満たすとする．$V(\theta) \neq V(\phi)$ ならば $t < T$ で

$$\begin{aligned} V_u(\theta) &= V_u(\phi), \quad u < t \\ V_t(\theta) &\neq V_t(\phi) \end{aligned}$$

となる t が取れる．$A = \{V_t(\theta) > V_t(\phi)\}$ とおく．$P(A) > 0$ として一般性を失わない．$X = V_t(\theta) - V_t(\phi)$ は $\mathscr{F}_t$ 可測である．ψ を次で定める．A 上では

$$\begin{aligned} &\psi_u = \theta_u - \phi_u, \quad u \leq t \\ &\psi_u^0 = \beta_t X, \quad \psi_u^i = 0,\ i = 1, \dots, d,\ u > t. \end{aligned}$$

A^c 上では

$$\psi_u = \theta_u - \phi_u, \quad u \in \mathbb{T}.$$

ψ は predictable. self-financing を示そう．$u < t$ のときは θ, ϕ ともに self-financing だから明らか．$u > t$ のときは，A^c ではやはり self-financing である．$u > t$ で A 上を考えよう．このとき $\psi_{u+1} = \psi_u$ だからやはり明らか．

最後に $u=t$ のときを考える．

$$\psi_t \cdot S_t = V_t(\theta) - V_t(\phi).$$

また

$$\begin{aligned}\psi_{t+1} \cdot S_t &= 1_{A^c}(\theta_{t+1} - \phi_{t+1}) \cdot S_t + 1_A \beta_t X S_t^0 \\ &= 1_{A^c}(\theta_{t+1} - \phi_{t+1}) \cdot S_t + 1_A (S_t^0)^{-1}(V_t(\theta) - V_t(\phi)) S_t^0 \\ &= 1_{A^c}(\theta_{t+1} - \phi_{t+1}) \cdot S_t + 1_A (V_t(\theta) - V_t(\phi)) \\ &= V_t(\theta) - V_t(\phi) = \psi_t \cdot S_t.\end{aligned}$$

これで ψ も self-financing である．明らかに $V_0(\psi) = 0$ で，

$$V_T(\psi) = 1_A \beta_t X S_T^0$$

は，非負で，A 上では正である．これは viable の仮定に反するので，この様なことは起こりえない．　□

マルチンゲール

σ-field $\mathscr{G}$ が与えられたとき，$X \in L^1$ に対して，全ての $A \in \mathscr{G}$ に対し

$$E[X1_A] = E[Y1_A]$$

となる $\mathscr{G}$ 可測関数 Y が一意的に定まる．これを X の $\mathscr{G}$ で条件付けられた条件付き期待値を呼び $E[X|\mathscr{G}]$ とかく．特に $\mathscr{G}$ が有限生成の場合は disjoint 集合 $A_1, \ldots, A_K$ で $\cup_j A_j = \Omega$ を満たすものが取れ，$\mathscr{G}$ の元は $A_1, \ldots, A_K$ のうちのいくつかの和集合でかける．このときは

$$E[X|\mathscr{G}] = \sum_j \frac{1}{P(A_j)} E[X1_{A_j}] 1_{A_j}$$

と表される．一般の場合はこの様な極限と考えてよい．

条件付き期待値に関しては次のことが成り立つ：

1. $E[\alpha X + \beta Y|\mathscr{G}] = \alpha E[X|\mathscr{G}] + \beta E[Y|\mathscr{G}]$
2. $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$ のとき $E[E[X|\mathscr{G}_2]|\mathscr{G}_1] = E[X|\mathscr{G}_1]$
3. $E[E[X|\mathscr{G}]] = E[X]$
4. X が $\mathscr{G}$-可測なら $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$.
5. X が $\mathscr{G}$ と独立ならば $E[X|\mathscr{G}] = E[X]$.

さて σ-fields の増大列 $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ が与えられているとき，可積分な確率過程 (M_t) が $(\mathscr{F}_t)$-adapted で

$$E[M_{t+1}|\mathscr{F}_t] = M_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{2.20}$$

を満たすとき，**マルチンゲール**であるという．マルチンゲールの条件は

$$E[\Delta M_{t+1}|\mathscr{F}_t] = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

と同値である．またこれから $E[\Delta M_{t+1}] = 0$ 従って $E[M_{t+1}] = E[M_t]$ が成り立つ．
　また (2.20) の代わりに

$$E[M_{t+1}|\mathscr{F}_t] \geq M_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

が成り立つときは劣マルチンゲール，

$$E[M_{t+1}|\mathscr{F}_t] \leq M_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

が成り立つときを，優マルチンゲールという．

定義 2.8. マルチンゲール $M = (M_t)$ と predictable process $\phi = (\phi_t)$ から

$$X_t = \phi_1 \Delta M_1 + \phi_2 \Delta M_2 + \cdots + \phi_t \Delta M_t \tag{2.21}$$

で定まる確率過程 X を M の ϕ による**マルチンゲール変換** (martingale transform) と呼ぶ．$X_0 = 0$ と定義している．このように定義された X を $\phi \cdot M$ とかく．

　$\phi = (\phi_t)$ が有界で predictable のとき $\phi_{t+1}\Delta M_{t+1}$ は可積分だから

$$E[\Delta X_{t+1}|\mathscr{F}_t] = E[\phi_{t+1}\Delta M_{t+1}|\mathscr{F}_t] = \phi_{t+1}E[\Delta M_{t+1}|\mathscr{F}_t] = 0$$

となるので，上で定義された X は再びマルチンゲールになっている．この性質を使って，マルチンゲールを特徴付けることができる．

命題 2.9. $(\mathscr{F}_t)$-adapted な可積分な確率過程 (M_t) がマルチンゲールであるための必要十分条件は任意の有界な predictable process ϕ に対し

$$E[(\phi \cdot M)_t] = E[\sum_{u=1}^{t} \phi_u \Delta M_u] = 0 \tag{2.22}$$

が成り立つことである．

証明　M がマルチンゲールならば $X = \phi \cdot M$ もマルチンゲールで，$X_0 = 0$ だから $E[(\phi \cdot M)_t] = E[X_0] = 0$ となる．
　逆に (2.22) がすべての有界な predictable process ϕ に対して成り立っているとする．特に $A \in \mathscr{F}_t$ をとり，$\phi_{t+1} = 1_A$ で，その他の u については $\phi_u = 0$ ととると

$$0 = E[(\phi \cdot M)_T] = E[1_A \Delta M_{t+1}].$$

A は任意だから，$E[\Delta M_{t+1}|\mathscr{F}_t] = 0$ となり，M がマルチンゲールであることが分かる．□

同値マルチンゲール測度 (EMM)

条件付請求権の価格付けはマルチンゲールの理論と密接に結びついている．そこで discounted な株価過程を $(\overline{S})$ とする．この $(\overline{S})$ をマルチンゲールにするような確率測度 Q が存在したとしよう．即ち

$$E^Q[\Delta\overline{S}_t^i|\mathscr{F}_{t-1}] = 0, \quad i = 1, \ldots, d$$

が成り立っているとする．すると，

$$\overline{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \overline{G}_t(\theta) = \theta_1 \cdot S_0 + \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta\overline{S}_u = \theta_1^0 S_0^0 + \sum_{i=1} \left(\theta_1^i S_0^i + \sum_{u=1}^{t} \theta_u^i \Delta\overline{S}_u^i \right)$$

が成り立つ．これは $(\overline{V}_t(\theta))$ 自体がマルチンゲールになっていることを意味する．

この事実から裁定機会が存在しないことが示せる．θ を任意の許容戦略で，$V_0(\theta) = 0$ かつ $V_T(\theta) \geq 0$ となるものとする．$(\overline{V}_t(\theta))$ は Q の下ではマルチンゲールである．特に $E[\overline{V}_T(\theta)] = E[V_0(\theta)] = 0$ となり，これから $V_T(\theta) = 0$ Q-a.e. が従う．Q と P が同値ならば (i.e., $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$) であれば，$V_T(\theta) = 0$ P-a.e. となり，裁定機会が存在しないことが示せた．従って次の定理が得られる．

定理 2.10. P と同値な確率測度 Q で，$(\overline{S})$ をマルチンゲールにするものが存在すれば，市場は viable である．即ち裁定機会は存在しない．

ここで言葉を 1 つ定義しておこう．

定義 2.11. $(\overline{S})$ をマルチンゲールにする P と同値な確率測度を，同値マルチンゲール測度 (equivalent martingale measure = EMM) とよぶ．

従って

- 同値マルチンゲール測度が存在すれば市場は viable である

であることがしめせた．実は上の証明では暗黙のうちに使っている性質がある．それは $\overline{V}_t(\theta)$ が Q について可積分という性質である．このことは決して自明ではないので証明をつけておく．

定理 2.12. Q を同値マルチンゲール測度，$H \geq 0$ を複製可能な条件付請求権とする．即ちある許容戦略 θ を用いて $H = V_T(\theta)$ と表現できるとする．すると $\beta_T H$ は Q-可積分で，価値過程 $V_t(\theta)$ は

$$V_t(\theta) = \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T H|\mathscr{F}_t] \tag{2.23}$$

と表現される．

証明 $H = V_T(\theta)$ が成り立っているとする．割り引かれた価値過程を $\overline{V} = \overline{V}(\theta)$ と表す．まず (逆向きの) 帰納法で $\overline{V}_t \geq 0$ を示す．$t = T$ のときは $\overline{V}_T = \beta_T H \geq 0$ より明らか．

次に $\overline{V}_t \geq 0$ を仮定する．このとき $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_n = \{|\theta_t| \leq n, |\overline{V}_{t-1}| \leq n\}$$

とおくと $A_n \in \mathscr{F}_{t-1}$ である．θ は self-financing だから

$$\overline{V}_t = \overline{V}_{t-1} + \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t.$$

両辺に 1_{A_n} をかけて

$$\overline{V}_t 1_{A_n} = \overline{V}_{t-1} 1_{A_n} + \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n}. \tag{2.24}$$

左辺は非負だから

$$\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} \geq -\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n}.$$

両辺可積分だから条件付き平均をとって

$$\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} | \mathscr{F}_{t-1}] \geq -E[\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n} | \mathscr{F}_{t-1}] = -1_{A_n} \theta_t \cdot E[\Delta\overline{S}_t | \mathscr{F}_{t-1}] = 0.$$

ここで $n \to \infty$ とすれば $\overline{V}_{t-1} \geq 0$ Q-a.e. が従う．

正値性が分かれば，(2.24) に戻って，右辺が可積分なので左辺も可積分となり

$$E[\overline{V}_t 1_{A_n}] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n}] + E[\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n}] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n}].$$

ここで $n \to \infty$ として $E[\overline{V}_t] = E[\overline{V}_{t-1}]$ を得る．$\overline{V}_0$ は定数で可積分なので，全ての t に対して $\overline{V}_t$ は可積分になる．

最後に $(\overline{V}_t)$ がマルチンゲールになることを示しておこう．$A \in \mathscr{F}_{t-1}$ を任意に取る．(2.24) の両辺に 1_A をかけて積分すれば

$$E[\overline{V}_t 1_{A_n} 1_A] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} 1_A] + E[\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n} 1_A] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} 1_A].$$

ここで再び $n \to \infty$ として

$$E[\overline{V}_t 1_A] = E[\overline{V}_{t-1} 1_A].$$

これでマルチンゲールであることが示せた．従って

$$\overline{V}_t(\theta) = E^Q[\beta_T H | \mathscr{F}_t]$$

より

$$V_t(\theta) = \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T H | \mathscr{F}_t]$$

が得られる． □

価格付け

(時刻 T における) 条件付け請求権 H が複製可能なら，その (時刻 0 における) 価格 $\pi(H)$ は

$$\pi(H) = \overline{V}_0(\theta) = E^Q[\beta_T H|\mathscr{F}_0] = E^Q[\beta_T H] \tag{2.25}$$

で与えられる．これは H を複製するのに必要な最初の資金が $\overline{V}_0(\theta)$ であるから自然な結果である．

優ヘッジ

もう少し一般的な観点から価格付けの問題を考えてみよう．

定義 2.13. 条件付き請求権 H が与えられたとき，初期投資を x として $V_T(\theta) \geq H$ となる許容戦略 θ を (x, H)**-ヘッジ**という．

定義のような戦略を**優ヘッジ** (superhedging) という．これは売り手の側の見方で，このような戦略でポートフォリオを組めば，満期時に H を要求されたときに，損失を生むことなく応じることが出来る．従って実用の立場から言えば，この優ヘッジ戦略を見出すことが重要な問題となる．特に $V_T(\theta) = H$ となる θ を最小ヘッジ (minimal hedge) という．

さて，複製が可能な条件付き請求権の場合はこれでよいが，一般論としては次のように考える必要がある．売り手の立場からはヘッジできることが必要なので，売り手値段 (seller's price) は

$$\pi_s = \inf\{z \geq 0; \exists\theta \in \Theta \text{ s.t. } V_T(\theta) = z + G_T(\theta) \geq H\}$$

買い手の立場からは，買い手値段 (buyer's price) は

$$\pi_b = \sup\{y \geq 0; \exists\theta \in \Theta \text{ s.t. } -y + G_T(\theta) \geq -H\}$$

とすれば，満期時に損失を生むことがない．

命題 2.14. 市場が viable であれば次が成立する:

$$\pi_b \leq E^Q[\beta_T H] \leq \pi_s. \tag{2.26}$$

証明 $V_T(\theta) = z + G_T(\theta) \geq H$ としよう．$z = V_0(\theta)$ である．$\overline{V}_T = V_0 + \overline{G}_T$ であり，$\overline{S}$ がマルチンゲールであるから $E^Q[\overline{G}_T] = 0$ となる．従って

$$z = V_0(\theta) = E^Q[\overline{V}_T] = E^Q[\beta_T V_T] \geq E^Q[\beta_T H]$$

inf をとって

$$\pi_s \geq E^Q[\beta_T H]$$

が得られる．$\pi_b \leq E^Q[\beta_T H]$ も同様である． □

上のことから市場が viable で，条件付き請求権 H が複製可能な場合は $\pi_s = \pi_b = E^Q[\beta_T H]$ となり，これが合理的な価格であることが分かる．

コール・プットパリティ

ここでもう一度コーループットパリティを見直してみよう．コールとプットの値段は

$$\beta_t C_t = E^Q[\beta_T (S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t]$$
$$\beta_t P_t = E^Q[\beta_T (K - S_T)_+ | \mathscr{F}_t]$$

であるから

$$\begin{aligned}
C_t - P_t &= \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T (S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t] - \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T (K - S_T)_+ | \mathscr{F}_t] \\
&= \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T (S_T - K) | \mathscr{F}_t] \\
&= \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T S_T | \mathscr{F}_t] - \beta_t^{-1} E[\beta_T K | \mathscr{F}_t] \\
&= \beta_t^{-1} \beta_t S_t - (1+\rho)^t (1+\rho)^{-T} K \\
&= S_t - (1+\rho)^{-(T-t)} K
\end{aligned}$$

となり，(1.1) が再び得られた．

多期間のリスク中立測度

多期間の場合のリスク中立測度 Q を求め，コールオプションの価値過程 V_t が

$$V_t = (1+\rho)^{-(T-t)} E^Q[((S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t] \tag{2.27}$$

で与えられることを示す．ここで $E^Q[\ \ |\mathscr{F}_t]$ は**条件付き期待値**である．

リスク中立測度 Q の構成について述べる．

$$R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

と定める．Q は，この確率変数列 $R_1, R_2, \ldots, R_T$ が独立同分布になるようなもので，分布は

$$Q(R_t = 1+b) = q, \quad Q(R_t = 1+a) = 1-q$$

で与えられる．

$$q = \frac{\rho - a}{b - a}$$

であったから

$$\begin{aligned}
E^Q[R_t] &= (1+b)\frac{\rho - a}{b - a} + (1+a)\frac{b - \rho}{b - a} \\
&= \frac{\rho - a + b\rho - ba + b - \rho + ab - a\rho}{b - a} \\
&= \frac{(b-a)(1+\rho)}{b - a} \\
&= 1 + \rho.
\end{aligned}$$

これから

$$
\begin{aligned}
E^Q[\beta S_{t+1}|\mathscr{F}_t] &= \beta E^Q[S_t R_{t+1}|\mathscr{F}_t] \\
&= \beta S_t E^Q[R_{t+1}|\mathscr{F}_t] \\
&= \beta S_t E^Q[R_{t+1}] \quad (\because R_{t+1} \text{ と } \mathscr{F}_t \text{ の 独立性}) \\
&= \beta S_t (1+\rho) = S_t.
\end{aligned}
$$

これは $\{\beta^t S_t\}$ がマルチンゲールになっていることを意味する:

$$
E^Q[\beta^{t+1} S_{t+1}|\mathscr{F}_t] = \beta^t S_t.
$$

この測度 Q を用いると

$$
\begin{aligned}
&(1+\rho)^{-(T-t)} E^Q[(S_T - K)_+|\mathscr{F}_t] \\
&\quad = (1+\rho)^{-(T-t)} E^Q[(S_t R_{t+1} \dots R_T - K)_+|\mathscr{F}_t] \\
&\quad = (1+\rho)^{-(T-t)} \sum_{s=0}^{T-t} \binom{T-t}{s} q^s (1-q)^{T-t-s} (S_t (1+b)^s (1+a)^{T-t-s} - K)_+ = V_t.
\end{aligned}
$$

これは (1.9) で求めたものと一致する．これで価値過程がリスク中立測度による条件付き期待値として表されることが確認できた．

3. Black-Scholes 公式

多期間 2 項モデルの時間分割を細かくして行った極限として，連続時間の最も基本的なモデルである Black-Scholes モデルが得られる．そのことを以下に見ていく．

離散の極限

時間区間 $[0,T]$ を N 等分する．$h_N = \frac{T}{N}$ とおいて，時刻列 $\{0, h_N, 2h_N, \dots, Nh_N\}$ を取る．ここで N ステップの 2 項モデルを考える．パラメータとして，a, b, ρ があったが，これらは N に応じて変えていく．従って a_N のように依存性を明確にすべきであるが，かえって煩雑になるので単に a とかく．h_N も単に h とかく．定数として $r \geq 0$, $\sigma > 0$ を与え，これをパラメーターとして a, b, ρ が次の関係を満たすように N に依存して取る．

$$
\begin{aligned}
\rho &= rh \\
\log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right) &= \sigma\sqrt{h} = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}, \\
\log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right) &= -\sigma\sqrt{h} = -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}.
\end{aligned}
$$

ここで ρ に関して

$$
\lim_{N\to\infty} (1+\rho)^N = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{rT}{N}\right)^N = e^{rT}
$$

が成り立つことに注意しておく．さらに u, d を次のように定める (やはり N に依存する)

$$
\begin{aligned}
u = 1 + b &= \left(1 + \frac{rT}{N}\right) e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} \\
d = 1 + a &= \left(1 + \frac{rT}{N}\right) e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}.
\end{aligned}
$$

時刻 kh における株価を S_k と表し，

$$
R_k = \frac{S_k}{S_{k-1}}
$$

と定める (これらも N に依存するが，とくに明示しない)．リスク中立確率は次を満たした．

$$
Q(R_k = 1 + b) = q = \frac{\rho - a}{b - a}, \quad Q(R_k = 1 + a) = 1 - q = \frac{b - \rho}{b - a}.
$$

ここで新たな独立同分布の確率変数列 $\{Y_k\}_{k=1,\ldots,N}$ を次で定める．

$$
Y_k = \log\left(\frac{R_k}{1 + \rho}\right).
$$

これから

$$
Z_N = \sum_{k=1}^{N} Y_k = \sum_{k=1}^{N} \log R_k - N \log(1 + \rho)
$$

とおくと，時刻 $T = Nh$ における株価は

$$
S_N = S_0 \prod_{k=1}^{N} R_k = S_0 (1 + \rho)^N \exp\left\{\sum_{k=1}^{N} Y_k\right\} = S_0 (1 + \rho)^N e^{Z_N}
$$

と表される．よってコールオプション $C = (S_N - K)_+$ の価格は

$$
\begin{aligned}
V_0(C) &= \beta^N E^Q[(S_N - K)_+] \\
&= \beta^N E^Q[(S_0 (1 + \rho)^N e^{Z_N} - K)_+] \\
&= E^Q[(S_0 e^{Z_N} - (1 + \rho)^{-N} K)_+] \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

で得られる．ここで $N \to \infty$ の極限を取ることを次に考える．

Y_k の分布

Y_k の平均を μ, 分散を v として計算する．まず平均は

$$
\begin{aligned}
E^Q[Y_k] &= E^Q\left[\log\left(\frac{R_k}{1 + \rho}\right)\right] \\
&= \log\left(\frac{1 + b}{1 + \rho}\right) q + \log\left(\frac{1 + a}{1 + \rho}\right)(1 - q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma\sqrt{h}q - \sigma\sqrt{h}(1-q) \\
&= (2q-1)\sigma\sqrt{h}.
\end{aligned}
$$

また 2 次のモーメントは

$$
\begin{aligned}
E^Q[Y_k^2] &= E^Q\left[\log\left(\frac{R_k}{1+\rho}\right)\right] \\
&= \left\{\log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right)\right\}^2 q + \left\{\log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right)\right\}^2 (1-q) \\
&= \sigma^2 hq + \sigma^2 h(1-q) = \sigma^2 h
\end{aligned}
$$

なので，分散は

$$
v = E^Q[Y_k^2] - E^Q[Y_k]^2 = \sigma^2 h - (2q-1)^2\sigma^2 h.
$$

それぞれの極限を求めるために q を調べよう.

$$
\begin{aligned}
1-q &= \frac{b-\rho}{b-a} \\
&= \frac{1+b-(1+\rho)}{1+b-(1+a)} \\
&= \frac{(1+\rho)e^{\sigma\sqrt{h}} - (1+\rho)}{(1+\rho)e^{\sigma\sqrt{h}} - (1+\rho)e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{e^{\sigma\sqrt{h}} - 1}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
2q-1 &= 1 - 2(1-q) \\
&= 1 - 2\frac{e^{\sigma\sqrt{h}} - 1}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}} - 2e^{\sigma\sqrt{h}} + 2}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{2 - e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{1-\cosh\sigma\sqrt{h}}{\sinh\sigma\sqrt{h}} \sim -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h}.
\end{aligned}
$$

以上により

$$
N\mu = N(2q-1)\sigma\sqrt{h} \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h}\right)\sigma\sqrt{h} = -\frac{1}{2}\sigma^2 Nh = -\frac{1}{2}\sigma^2 T.
$$

また

$$
Nv = N\sigma^2 h - N(2q-1)^2\sigma^2 h = \sigma^2 T - (2q-1)^2\sigma^2 T \sim \sigma^2 T.
$$

ここで次の中心極限定理を使う.

定理 3.1. 各 $N \in \mathbb{N}$ に対して独立同分布の確率変数 $\{Y_k^N\}_{k=1,\ldots,N}$ が与えられている．さらに平均を μ_N, 分散を σ_N^2 とするとき，$N\mu_N \to \mu$, $N\sigma_N^2 \to \Sigma^2$ が成立している．このとき $Z_N = \sum_{k=1}^N Y_k^N$ は平均 μ, 分散 Σ^2 の正規分布に収束する．

これを我々の場合使うと Z_N が平均 $-\frac{1}{2}\sigma^2 T$, 分散 $\sigma^2 T$ の正規分布に収束する．この分布を持つ確率変数を Z とすると，プットオプションの極限での価格は (3.1) で $N \to \infty$ として

$$V_0(C) = E^Q[(S_0 e^Z - e^{-rT}K)_+] \tag{3.2}$$

で与えられる．

Black-Scholes の公式

$$X = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(Z + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$$

とおくと，X は $N(0,1)$ に従う．書き換えると

$$Z = \sigma\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

であるから，$V_0(C)$ の値は

$$V_0(C) = \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

x の積分範囲は

$$\log\left(\frac{K}{S_0}\right) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x$$

をといて

$$x = \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

この右辺を γ とおくと，

$$\begin{aligned}
V_0(C) &= \int_{\gamma}^{\infty} (S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
&= S_0 \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - e^{-rT}K \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
&= S_0 \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T})^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx - e^{-rT}K(1 - \Phi(\gamma)) \\
&= S_0 \int_{\gamma - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx - e^{-rT}K(1 - \Phi(\gamma))
\end{aligned}$$

$$= S_0(1-\Phi(\gamma-\sigma\sqrt{T})) - e^{-rT}K(1-\Phi(\gamma)).$$

但し，Φ は $N(0,1)$ の分布関数である：

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy.$$

ここで $d^- = -\gamma$, $d^+ = d^- + \sigma\sqrt{T}$ とおくと

$$1-\Phi(\gamma) = \Phi(-\gamma) = \Phi(d^-)$$
$$1-\Phi(\gamma-\sigma\sqrt{T}) = \Phi(d^+)$$

である．即ち

$$d^{\pm} = \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

である．これを使うと

$$V_0(C) = S_0\Phi(d^+) - e^{-rT}K\Phi(d^-).$$

これが Black-Scholes の公式と呼ばれるコールオプションの価格を与える式である．

同様に時刻 t における価格は

$$V_t(C) = S_t\Phi(d_t^+) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_t^-). \tag{3.3}$$

ただし

$$d_t^{\pm} = \frac{\log(\frac{K}{S_t}) - (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である．

(3.3) のコールオプションの価格を c とすると c は S_t, t, K, T, r, σ の関数となる．c は次のような性質があることが確かめられる．

1. c を S_t と t の関数とみなすとき，即ち $V_t(C) = c(S_t,t)$ と表して， $c(x,t)$ は次の Black-Scholes の偏微分方程式を満たしている:
$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + rx\frac{\partial c}{\partial x} - rc = 0. \tag{3.4}$$
2. 次の関係を満たしている．
   - $\lim_{T\to t} c(S_t,t) = (S_t - K)_+$
   - $\dfrac{\partial c}{\partial \sigma} > 0$
   - $\lim_{\sigma\to\infty} c(S_t,t) = S_t$
   - $\lim_{\sigma\to 0} c(S_t,t) = (S_t - Ke^{-r(T-t)})_+$
   - $\dfrac{\partial c}{\partial x} = \Phi(d_+)$

4. 基本定理

この節では，有限市場の場合に次の同値性を示す．

- 市場が viable $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度が存在する
- viable な市場が完備である $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度は一意である

ここでは，市場は有限であると仮定している．即ち Ω は有限個の点からなるものとする．無限の場合は初等的でないのでここでは扱わない．

分離定理

次の定理は分離定理としてよく知られている．ここでは有限次元空間としたが Banach 空間でも成り立つ．

定理 4.1. L を $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間，K を L と交わらないコンパクトな凸集合とする．このとき K と L を分離する超平面が存在する．すなわち，線型汎関数 $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ で L 上で $\phi(x)=0$，K 上で $\phi(x)>0$ となるものが存在する．

証明 claim 1 $C \subseteq \mathbb{R}^n$: 閉凸集合，$0 \notin C \Leftrightarrow$ ある線型汎関数 ψ で $\psi \geq c > 0$ on C.

$\because$ $B = B(0,r) = \{x; |x| < r\}$ を $B \cap C \neq \emptyset$ と取る．$z \in B \cap C$ を原点 0 からの最短点とする．C の凸性から $x \in C, \lambda \in [0,1]$ のとき

$$y = \lambda x + (1-\lambda)z \in C$$

であるから

$$|z|^2 \leq |\lambda x + (1-\lambda)z|^2 = \lambda^2|x|^2 + 2\lambda(1-\lambda)x\cdot z + (1-\lambda)^2|z|^2.$$

よって

$$\lambda^2|x|^2 + 2\lambda(1-\lambda)x\cdot x + (\lambda^2 - 2\lambda)|z|^2 \geq 0$$
$$\lambda|x|^2 + 2(1-\lambda)x\cdot z + (\lambda - 2)|z|^2 \geq 0$$

ここで $\lambda \to 0$ として

$$x \cdot z \geq |z|^2.$$

よって $\psi(x) = x\cdot z$ と定めれば，C 上で $\psi \geq |z|^0$ である．//

claim 2 $C = K - L = \{k - l;\, k \in K,\ l \in L\}$ とおくと，C は閉凸集合で $0 \notin C$.

$\because$ 閉であることだけ示す．$x_n = k_n - l_n$ が x に収束すると，k_n から収束する部分列 k_{n_j} が取れる．極限を $k \in K$ とする．

$$l_{n_j} = k_{n_j} - x_{n_j} \to k - x$$

L は閉集合だから $k - x \in L$ となり，$x = k - l \in K - L$. //

claim 2 の C に claim 1 を用いて，$\psi \geq c$ on $K - L$ とできる．$x = k - \lambda l$ として

$$\psi(k) - \lambda\psi(l) > c$$

$\lambda \to \infty$ or $\lambda \to -\infty$ とすることにより，$\psi(l) = 0$ でなければならない．よって $\psi(k) > c$. $\square$

同値マルチンゲール測度

さて，有限市場を考える．すると確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ も有限になる．S^0 を安全証券，$S^1, \ldots, S^d$ を危険証券とする．Ω は n 個の元からなるとしよう．Ω 上の確率変数 X は Ω から $\mathbb{R}$ への写像全体であるから，n 次元ユークリッド空間と同型であるから，前の定理が使える．C を次のようにおこう．

$$C = \{X\colon \Omega \to \mathbb{R};\ X \geq 0 \text{ で，ある } \omega \in \Omega \text{ に対して } X(\omega) > 0\}.$$

無裁定の条件は許容戦略 $\theta \in \Theta_a$ に対して

$$\overline{V}_t(\theta) = \overline{G}_t(\theta) \notin C \quad \text{if } V_0(\theta) = 0$$

が成り立つことである．そうでなければ，それは裁定機会の存在を意味する．

自己充足戦略 (self-financing strategy) $\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^d)$ は株の保有量 $\hat{\theta} = (\theta^1, \ldots, \theta^d)$ できまる．$\hat{\theta}$ に対しても利得を $t = 1, 2, \ldots, T$ に対して

$$\overline{G}_t(\hat{\theta}) = \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta\overline{S}(u) = \sum_{u=1}^{t}\sum_{i=1}^{d} \theta_u^i \Delta\overline{S}_u^i.$$

$\overline{G}_T(\hat{\theta}) \in C$ ならば，$\beta_t = (S_t^0)^{-1}$ を割引率として

$$V_T(\theta) = \beta_T^{-1}\overline{V}_T(\theta) = \beta_T^{-1}\{V_0(\theta) + \overline{G}_T(\theta)\} = \beta_T^{-1}\overline{G}_T(\hat{\theta})$$

は非負で，どこかで正になる．よって θ は裁定機会となり，viability に矛盾するので $\overline{G}_T(\hat{\theta}) \notin C$ が結論できる．次の補題が証明できた．

補題 4.2. 市場が viable であるならば，predictable $\mathbb{R}^d$-値確率過程 $\hat{\theta}$ から定まる割り引かれた利得過程 $\overline{G}_T(\hat{\theta})$ は C には属さない．

次の定理がこの節の主定理である．**第一基本定理**と呼ばれる．有限市場であることを仮定している．

定理 4.3. 市場が viable であるための必要十分条件は，同値マルチンゲール測度が存在することである．

証明 同値マルチンゲール測度が存在すれば，市場は viable であることは証明したので，逆を示せばよい．C は すべての ω に対して $F(\omega) \geq 0$ で，ある ω_0 に対して $F(\omega_0) > 0$ となる Ω 上の関数全体のなす凸錐である．市場が viable であれば 補題 4.2 から $\overline{G}_T(\hat{\theta}) \notin C$ である．ところで

$$L = \{\overline{G}_T(\hat{\theta});\ \hat{\theta} = (\theta^1, \ldots, \theta^d),\ \theta^i\ (i = 1, \ldots, d) \text{ は predictable}\}$$

は Ω 上の関数の線型部分空間である．$\Omega = \omega_1, \ldots, \omega_n$ として，$p_i = P(\{\omega_i\}) > 0$ とおく．

L と C は共通部分を持たない．

$$K = \{X \in C; E^P[X] = 1\}$$

はコンパクトな部分集合である．ここで Ω が有限集合であることを使っている．よって分離定理から L 上で 0 で，K 上で正となる線型汎関数 f が存在する．f は次のような表現を持つ:

$$f(x) = x \cdot q = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i.$$

$\xi_i = (0, \ldots, 0, \frac{1}{p_i}, 0, \ldots, 0)$ とおくと，$E^P[\xi] = 1$ だから $\xi_i \in K$ であるから $f(\xi) = \frac{q_i}{p_i} > 0$ である．従って $q_i > 0$ でなければならない．新たな線型汎関数を $g = \frac{f}{\alpha}$, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} q_i$ で定める．$p_i^* = \frac{q_i}{\alpha}$ とおくと，これは新たな確率測度 P^* を定める．$P^* \sim P$ である．

さて，$g(x) = \frac{1}{\alpha} f(x) = 0$ on L だから $E^{P^*}[\overline{G}_T(\hat{\theta})] = 0$ である．$\hat{\theta}$ から self-financing strategy θ で $V_0(\theta) = 0$ となるものが対応する．よって $E^{P^*}[\overline{G}_T(\theta)] = 0$ となる．すなわち

$$E^{P^*}\left[\sum_{u=1}^{T} \theta_u^i \Delta \overline{S}_u^i\right] = 0.$$

ここで命題 2.9 を使えば，$\overline{S}^i$ がマルチンゲールになる．これで P^* が同値マルチンゲール測度であることが示せた． □

市場の完備性

定義 4.4. 任意の条件付き請求権が複製可能のとき，市場は**完備**であるという．

完備性の特徴付けを与えよう．

命題 4.5. EMM Q を持つ viable な有限市場が完備であるための必要十分条件は $(Q, (\mathscr{F}_t))$-マルチンゲール M が次の表現を持つことである：ある predictable process γ が存在し

$$M_t = M_0 + \sum_{u=1}^{t} \gamma_u \cdot \Delta \overline{S}_u = M_0 + \sum_{u=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} \gamma_u^i \Delta \overline{S}_u^i. \tag{4.1}$$

証明　まず市場が完備であると仮定する．M を $(Q, (\mathscr{F}_t))$-マルチンゲールとする．マルチンゲールは非負マルチンゲールの差とあらわされるので，M は非負であるとする．$H = M_T S_T^0$ ととると，完備性から $\theta \in \Theta_a$ がとれて $V_T(\theta) = H$ とできる．したがって $\overline{V}_T(\theta) = M_T$ となる．$\overline{V}$ は Q-マルチンゲールであったから

$$\overline{V}_t(\theta) = E^Q[\overline{V}_T(\theta) | \mathscr{F}_t] = E^Q[M_T | \mathscr{F}_t] = M_t.$$

よって

$$M_t = \overline{V}_t(\theta) = \overline{V}_0(\theta) + \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta \overline{S}_u = M_0 + \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta \overline{S}_u$$

となるので，(4.1) のように表される．

逆に条件付き請求権 H を与える．マルチンゲール M を

$$M_t = E^Q[\beta_T H | \mathscr{F}_t]$$

で定める．仮定より，M_t は (4.1) の表現を持つ．そこで

$$\begin{aligned} \theta_t^i &= \gamma_t^i, \quad i = 1, \dots, d \\ \theta_t^0 &= M_t - \gamma_t \cdot \overline{S}_t \end{aligned}$$

と定める．θ が self-financing であることを示せばよい．すなわち $\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0$. 実際

$$\begin{aligned} \Delta\theta_t \cdot S_{t-1} &= S_{t-1}^0(\Delta M_t - \Delta[\sum_{i=1}^d \gamma_t^i \overline{S}_t^i]) + \sum_{i=1}^d S_{t-1}^i \Delta\gamma_t^i \\ &= \sum_{i=1}^d (S_{t-1}^0[\gamma_t^i \Delta\overline{S}_t^i - (\gamma_t^i \overline{S}_t^i - \gamma_{t-1}^i \overline{S}_{t-1}^i)] + S_{t-1}^i \Delta\gamma_t^i) \\ &= \sum_{i=1}^d (S_{t-1}^0[\cancel{\gamma_t^i \overline{S}_t^i} - \gamma_t^i \overline{S}_{t-1}^i - (\cancel{\gamma_t^i \overline{S}_t^i} - \gamma_{t-1}^i \overline{S}_{t-1}^i)] + S_{t-1}^i \Delta\gamma_t^i) \\ &= \sum_{i=1}^d S_{t-1}^i (\Delta\gamma_t^i - \Delta\gamma_t^i) = 0. \end{aligned}$$

さらに

$$\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \overline{S}_t = \theta_t^0 + \gamma_t \cdot \overline{S}_t = M_t$$

である．特に $\overline{V}_T(\theta) = M_T = \beta_T H$ より $V_T(\theta) = H$ となるから完備性が示せた． □

これを使うと，完備性と EMM の一意性の同値性が示せる．次の定理は**第二基本定理**と呼ばれる．

定理 4.6. viable な有限市場が完備であるための必要十分条件は，同値マルチンゲール測度が一意的であることである．

証明　完備性を仮定する．このとき二つの EMM Q と Q' が存在したとする．H を条件付き請求権とすると，$\theta \in \Theta_a$ が存在して

$$\beta_T H = V_T(\theta) = V_0(\theta) + \sum_{u=1}^T \theta_u \cdot \Delta\overline{S}_u.$$

$\overline{S}$ は Q の下でも，Q' の下でもマルチンゲールだから

$$E^Q[\beta_T H] = V_0(\theta) = E^{Q'}[\beta_T H].$$

これから
$$E^Q[H] = E^{Q'}[H]$$
となるから $Q = Q'$ が従う．

逆を示すために，市場は viable であるが，完備でないとする．すると複製できない非負確率変数 X が存在する．
$$L = \{c + \sum_{u=1}^{T} \hat{\theta}_u \cdot \Delta \overline{S}_u : \ \hat{\theta} = (\theta^1, \dots, \theta^d) \text{ is predictable}\}.$$
これは Ω 上の関数全体 $L^0(\Omega, P)$ の線形部分空間である．$L^0(\Omega, P)$ は $\mathbb{R}^n$ と同じであった．$\beta_T X \notin L$ である．もし $\beta_T X \in L$ ならば $\beta_T X = \overline{V}_T(\hat{\theta})$ とできるが，$\theta = (\theta^0, \hat{\theta})$ が self-financing になるように θ^0 を決められる ((2.18)) ので，$\beta_T X = \overline{V}_T(\theta)$, したがって $X = V_T(\theta)$ となり，X が複製できてしまう．L は有限次元なので閉集合であり，$L^0(\Omega, P)$ とは一致しないから L に直行する非自明な元 Z が存在する：
$$E^Q[YZ] = 0, \quad \forall Y \in L.$$
特に $1 \in L$ だから $E[Z] = 0$ である．$R = 1 + \frac{Z}{2\|Z\|_\infty}$ とおくと，$R \geq \frac{1}{2}$. そこで測度 Q' を
$$Q' = RQ$$
で定めると，Q' は再び確率測度になる．しかも $Y = c + \sum_{u=1}^{T} \hat{\theta}_u \cdot \Delta \overline{S}_u \in L$ のとき
$$E^{Q'}[Y] = E^Q[RY] = E^Q[Y] + \frac{1}{2\|Z\|_\infty} E^Q[YZ] = E^Q[Y] = c.$$
特に $c = 0$ ならば $E^{Q'}[Y] = 0$ だから
$$E^{Q'}[\sum_{u=1}^{T} \hat{\theta}_u \cdot \Delta \overline{S}_u] = 0.$$
これは Q' が同値マルチンゲール測度であることを意味し，一意性に矛盾する． □

CRR モデルの完備性

CRR モデルは $S_t^0 = (1+\rho)^t$ と $S_t = R_t S_{t-1}$ が与えられている．R_t は i.i.d. で
$$R_t = \begin{cases} 1+b, & \text{確率 } q = \frac{\rho - a}{b - a} \\ 1+a, & \text{確率 } 1-q = \frac{b-\rho}{b-a} \end{cases}$$
ここで $-1 < a < \rho < b$ を viable を保証するために仮定する．EMM はこれで完全に特徴付けられる．記法の簡単のために $u = 1+b$, $d = 1+a$, $E^Q[R_t] = w$ とする．また $\mathscr{F}_t = \sigma\{R_u; u \leq t\}$ とする．さらに
$$m_t = \sum_{u=1}^{t} (R_u - w)$$
とおくと，(m_t) は平均 0 のマルチンゲールである．完備性を示そう．

命題 4.7. $M_0 = 0$ となる任意の Q-マルチンゲールは

$$M_t = \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta m_u \tag{4.2}$$

とあらわされる．ただし $\theta = (\theta_t)$ は predictable である．

証明　M_t は $\mathscr{F}_t$ 可測だから

$$M_t = f_t(R_1, \ldots, R_t)$$

と表される．(4.2) が成り立っていると，$\Delta M_t = \theta_t \Delta m_t$ であるから

$$\begin{aligned} f_t^u &= f_t(R_1, \ldots, R_{t-1}, u) \\ f_t^d &= f_t(R_1, \ldots, R_{t-1}, d) \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f_t^u - f_{t-1} &= \theta_t(u - w), \\ f_t^d - f_{t-1} &= \theta_t(d - w) \end{aligned}$$

が従う．上の式は

$$\theta_t = \frac{f_t^u - f_{t-1}}{u - w} = \frac{f_t^d - f_{t-1}}{d - w}$$

を意味する．実際にこれが成り立っていることを見よう．$E^Q[\Delta M_t | \mathscr{F}_{t-1}] = 0$ から

$$q f_t^u + (1 - q) f_t^v = f_{t-1} = q f_{t-1} + (1 - q) f_{t-1}.$$

よって

$$\frac{f_t^u - f_{t-1}}{q - 1} = \frac{f_t^d - f_{t-1}}{q}$$

ここで

$$w = E^Q[R_1] = uq + v(1 - q)$$

から

$$q = \frac{w - d}{u - d}, \quad q - 1 = \frac{w - u}{u - d}$$

となるから，上の式と同値になることがわかる． □

ところで 命題 4.5 ではマルチンゲールが $M_t = M_0 + \sum_{u=1}^{t} \gamma_u \cdot \Delta \overline{S}_u$ と表現できることが完備性の必要十分条件であった．これは Δm_u で表現するのとは異なるので，両者の関係を見ておこう．まず

$$
\begin{aligned}
E^Q[R_t] &= (1+b)q + (1+a)(1-q) \\
&= (1+b)\frac{\rho - a}{b-a} + (1+a)\frac{b-\rho}{b-a} \\
&= \frac{\rho(1+b-1-a) - a - ba + b + ab}{b-a} \\
&= \frac{(1+\rho)(b-a)}{b-a} \\
&= 1+\rho.
\end{aligned}
$$

つまり $w = 1+\rho$ である．さらに

$$
\begin{aligned}
\Delta \overline{S}_t &= (1+\rho)^{-t} S_t - (1+\rho)^{-t+1} S_{t-1} \\
&= (1+\rho)^{-t}(S_{t-1}R_t - (1+\rho)S_{t-1}) \\
&= (1+\rho)^{-t} S_{t-1}(R_t - (1+\rho)) \\
&= (1+\rho)^{-t} S_{t-1}(R_t - w) \\
&= (1+\rho)^{-t} S_{t-1} \Delta m_t
\end{aligned}
$$

となるので，両者は同値であることが分かる．

5.　離散アメリカ型オプション

前節までは満期日が決まっているヨーロッパ型オプションについて論じた．ここでは，行使時刻をランダムに選べるアメリカ型オプションについて述べる．

アメリカ型オプション

取引時刻を $t = 0, 1, \ldots, T$ とし，安全証券は S^0, 株価などの危険証券を $S^1, \ldots, S^d$ とする．割引率を $\beta_t = (S^0_t)^{-1}$ とおく．$S = (S^0, S^1, \ldots, S^d)$ とかく．時刻 t までに生成される σ-field を $\mathscr{F}_t$ と表す．

$t \in \mathbb{T}$ に対して条件付き請求権 $f_t(S)$ が与えられ，ランダムに時刻を選んでこれを行使できるようなオプションを考え，その価格付けの問題を考えよう．この様なオプションを**アメリカ型オプション**という．市場は viable で完備であるとする．同値マルチンゲール測度を Q とする．以下では測度はこの Q に固定し，特に明示しない．権利の行使はランダムであるが，未来の情報を使うことが出来ないという制約をつける．数学的には行使時刻は停止時刻であるとする．τ が停止時刻とは，任意の t に対し

$$\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \tag{5.1}$$

をみたす $\mathbb{Z}_+$-値の確率変数のことである．一般論としては $\mathbb{Z}_+$-値であるが，取引時刻は $\mathbb{T}$ としているのでここで考えるのは $\mathbb{T}$-値のみである．さて，停止時刻 τ で権利行使すれば，

$f_\tau(S)$ の利得が得られる．従ってその価格は $E[\beta_\tau f_\tau(S)]$ である．τ は $\mathbb{T}$-値停止時刻を自由に選べるから

$$x = \sup_\tau E[\beta_\tau f_\tau(S)] \tag{5.2}$$

が価格と考えられる．一方またこのオプションを売る側の立場からはどの時刻で権利行使されても hedge できるように複製しなければならないので，許容戦略 θ を

$$V_t(\theta) \geq f_t(S) \tag{5.3}$$

が全ての t で成り立つようにしなければならない．従って

$$V_0(\theta) = E[\overline{V}_\tau(\theta)] = E[\beta_\tau V_\tau(\theta)] \geq E[\beta_\tau f_\tau(S)]$$

なので $V_0(\theta) \geq x$ である．θ をうまく取れば，(5.3) を満たし，$V_0(\theta) = x$ とできることを示すのがこの節の目標である．従って (5.2) で定めた価格が合理的であることもこれで分かる．以下そのために，数学的な準備をする．

任意抽出定理

τ が停止時刻とするとき，σ-fileld $\mathscr{F}_\tau$ を

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F};\, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \quad \forall t\} \tag{5.4}$$

で定める．感覚的には，時刻 τ までに得られる情報を表している．

次の定理を **Doob の任意抽出定理**という．

定理 5.1. (X_t) を優マルチンゲール，σ, τ を有界な停止時刻で $\sigma \leq \tau$ が成り立っているとする．このとき

$$E[X_\tau | \mathscr{F}_\sigma] \leq X_\sigma \tag{5.5}$$

が成り立つ．X がマルチンゲールであれば，(5.5) で等号が成立する．劣マルチンゲールであれば逆向きの不等式が成立する．

定義 5.2. X を確率過程で τ を停止時刻とするとき，τ で停止させた確率過程 X^τ を $X_t^\tau = X_{\tau\wedge t}$ で定義する．

定理 5.3. X を (優) マルチンゲール，τ を停止時刻とすると X^τ も (優) マルチンゲール である．劣マルチンゲールのときも同様．

Doob 分解

定理 5.4. X を優マルチンゲールとする．X は次のように表現される：

$$X_t = X_0 + M_t - A_t. \tag{5.6}$$

ここで (M_t) は $M_0 = 0$ であるマルチンゲール，(A_t) は $A_0 = 0$ である predictable な増加過程．さらにこの分解は一意的である．

証明 次のように帰納的に定めればよい．

$$
\begin{aligned}
A_t &= A_{t-1} + X_{t-1} - E[X_t|\mathscr{F}_{t-1}], \\
M_t &= M_{t-1} + X_t - E[X_t|\mathscr{F}_{t-1}].
\end{aligned}
$$

□

スネル包

定義 5.5. X を非負の確率過程とする．次で定まる確率過程 Z を**スネル包** (Snell envelope) と呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
Z_T &= X_T \\
Z_{t-1} &= \max\{X_{t-1}, E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]\} \quad t = 1, 2, \ldots, T.
\end{aligned}
$$

次の命題が基本的である．

命題 5.6. (Z_t) を (X_t) のスネル包とすると，次が成り立つ．

1. Z は X より大きな最小の優マルチンゲールである．
2. $\tau^* = \min\{t \geq 0; Z_t = X_t\}$ とおくと，Z^{τ^*} はマルチンゲールである．

証明 $Z_t \geq X_t$ は定義より明らかで，また $Z_{t-1} \geq E[Z_t|\mathscr{F}_t]$ だから優マルチンゲールである．Z の最小性を言うために $Y = (Y_t)$ を $Y_t \geq X_t$ となる優マルチンゲールとする．明らかに $Y_T \geq X_T = Z_T$ である．いま $Y_t \geq Z_t$ とすると，

$$
\begin{aligned}
Y_{t-1} &\geq E[Y_t|\mathscr{F}_{t-1}] \quad (\because Y \text{ は優マルチンゲール}) \\
&\geq E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]. \quad (\because \text{仮定})
\end{aligned}
$$

一方 $Y_{t-1} \geq X_{t-1}$ だから

$$
Y_{t-1} \geq \max\{X_{t-1}, E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]\} = Z_{t-1}.
$$

これで帰納的に示せた．

次に Z^{τ^*} がマルチンゲールになることを示そう．$\phi_t = 1_{\{\tau^* \geq t\}}$ とおくと，ϕ は predictable で

$$
Z_t^{\tau^*} = Z_0 + \sum_{u=1}^{t} \phi_u \Delta Z_u.
$$

よって

$$
Z_t^{\tau^*} - Z_{t-1}^{\tau^*} = \phi_t(Z_t - Z_{t-1}) = 1_{\{\tau^* \geq t\}}(Z_t - Z_{t-1}).
$$

ところで $\tau^*(\omega) \geq t$ ならば $Z_{t-1}(\omega) > X_{t-1}(\omega)$ だから $Z_{t-1}(\omega) = E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}](\omega)$ が成り立っている．

$$
\begin{aligned}
E[Z_t^{\tau^*} - Z_{t-1}^{\tau^*}|\mathscr{F}_{t-1}] &= E[1_{\{\tau^* \geq t\}}(Z_t - E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}])|\mathscr{F}_{t-1}] \\
&= 1_{\{\tau^* \geq t\}} E[(Z_t - E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}])|\mathscr{F}_{t-1}] = 0.
\end{aligned}
$$

従って Z^{τ^*} はマルチンゲールになることが分かった． □

定義 5.7. 停止時刻 τ が次を満たすとき，X の最適停止時刻という：

$$E[X_\tau] = \sup_\sigma E[X_\sigma] \tag{5.7}$$

命題 5.8. (Z_t) を (X_t) のスネル包とする．

$$\tau^* = \min\{t \geq 0; Z_t = X_t\} \tag{5.8}$$

と定めると，τ^* は X の最適停止時刻である．

証明　命題 5.6 より Z^{τ^*} はマルチンゲールであるから

$$Z_0 = E[Z_0^{\tau^*}] = E[Z_T^{\tau^*}] = E[Z_{\tau^*}] = E[X_{\tau^*}].$$

一方，任意の停止時刻 τ に対して Z^τ は優マルチンゲールであるから

$$Z_0 = E[Z_0^\tau] \geq E[Z_T^\tau] = E[Z_\tau] \geq E[X_\tau].$$

よって τ^* は最適である．　□

アメリカンオプションの価格付け

f_t の discount process を

$$\overline{f}_t = \beta_t f_t$$

とする．さらに $\overline{f}$ のスネル包を Z とする:

$$\begin{aligned} Z_T &= \overline{f}_T, \\ Z_{t-1} &= \max\{\overline{f}_{t-1}, E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]\} \end{aligned}$$

Z_t はスネル包の定義であるが，条件付き請求権の価格とも見れる．時刻 $t-1$ の時点で 次の時点の Z_t を条件付き請求権とみなし，現時点 $t-1$ で $\overline{f}_{t-1}$ を選択するか，次の時点まで待って Z_t を得るかで，有利なほうを取るわけである．Z_t を取る場合は条件付き期待値が価格であった．以下帰納的に前の時刻の価格を決めていくことになる．Z_0 が時刻 0 における価格ということになる．これが妥当な価格であることを以下見てみよう．

$\tau^* = \min\{t \geq 0; Z_t = \overline{f}_t\}$ とおくと，命題 5.6 から

$$Z_0 = \sup_\tau E[\overline{f}_\tau] = E[\overline{f}_{\tau^*}]$$

となる．さて，(Z_t) は優マルチンゲールであったから

$$Z_t = Z_0 + \overline{M}_t - \overline{A}_t$$

とマルチンゲールと増加過程の差にかける．$Z_0 + \overline{M}_T = Z_T + \overline{A}_T \geq 0$ 注意しておこう．さて，完備性より，許容戦略 θ が存在して

$$\overline{V}_t(\theta) = Z_0 + \overline{M}_t$$

とあらわされる．ところで，Z^{τ^*} はマルチンゲールであったから，$t \le \tau^*$ では $Z_t = Z_0 + M_t$ が成り立っている．特に

$$Z_{\tau^*} = Z_0 + \overline{M}_{\tau^*} = \overline{V}_{\tau^*}(\theta)$$

が成り立つ．よって

$$V_0(\theta) = E[\overline{V}_{\tau^*}(\theta)] = E[Z_{\tau^*}] = E[\overline{f}_{\tau^*}] = \sup_{\tau} E[\overline{f}_{\tau}].$$

したがって，

$$V_0(\theta) = Z_0 = \sup_{\tau} E[\overline{f}_{\tau}].$$

これら 3 つの量が全て等しくなるので，この節のはじめに述べたように，$\sup_{\tau} E[\overline{f}_{\tau}]$ を価格とすることの正当化ができ，また戦略 θ で hedge できることも示された．

6. 伊藤解析

今まで離散のモデルを論じてきたが，次に連続モデルを論じる．そのために必要な準備をこの節で行う．

<u>ブラウン運動</u>

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を与え，以後この空間の上で考える．時間区間は $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ とする．全ての $t \in [0, \infty)$ に対して，確率変数 X_t が定義されているときこれを確率過程と呼ぶ．確率変数は単に $\mathscr{F}$-可測な関数であるが，確率過程に関しては t と ω の 2 変数の関数 $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ としての可測性も仮定する．更に増大する σ-fields の族 $(\mathscr{F}_t)$ が与えられ，全ての t に対して X_t が $\mathscr{F}_t$ 可測のとき，$(\mathscr{F}_t)$-**適合**であるという．

定義 6.1. 確率過程 (W_t) が次の条件を満たすとき**ブラウン運動** (**Wiener 過程**) という．

1. $W_0 = 0$
2. 各自然数 n と時刻 $0 \le t_0 < t_1 \cdots < t_n$ に対して n 個の確率変数

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

   は独立である．
3. $0 \le s < t$ のとき $W_t - W_s$ の分布は $N(0, t-s)$ である．
4. 確率 1 で見本路 $t \mapsto W_t$ は連続である．

ブラウン運動を現象として初めて捉えたのは Brown であるので，ブラウン運動と呼ばれるが，この様な確率過程が実際に存在することを数学的に厳密に示したのは Wiener である．Wiener 過程とも呼ばれるのはそのためである．

σ-filed の増大族 $(\mathscr{F}_t)$ が与えられている場合は (W_t) は $(\mathscr{F}_t)$-適合で，$s < t$ に対し $\mathscr{F}_s$ と $W_t - W_s$ が独立であることを仮定する．$\mathscr{F}_t$ は W の時刻 t までで張られる σ-field を取ることが多い：$\mathscr{F}_t = \sigma\{W_u;\, u \le t\}$.

確率積分

Wiener 過程 (W_t) に対し，確率積分 $\int_0^t H_s dW_s$ を定義する．(W_t) の見本路は有界変動ではないことが知られているので，Stieltjes 積分として定義することは出来ない．

定義 6.2. 確率過程 (H_t) が次のように表現されるとき満たすとき**単純**と呼ばれる:

$$H_t = \sum_{i=1} \phi_i 1_{(t_{i-1},t_i]}(t). \tag{6.1}$$

ここで $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n$ で ϕ_i は $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$-可測な有界関数である．

単純過程 H に対して，確率積分 $\int_0^t H_s\, dW_s$ を次で定義する

$$\int_0^t H_s\, dW_s = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) \tag{6.2}$$

で定義する．上の和は実際は有限和である．

命題 6.3. H を単純過程であるとすると，次のことが成り立つ：

1. $\displaystyle\int_0^t H_s\, dW_s$ は連続マルチンゲールである．
2. $E\left[\left(\displaystyle\int_0^t H_s\, dW_s\right)^2\right] = E\left[\displaystyle\int_0^t H_s^2\, ds\right]$
3. $E\left[\displaystyle\sup_{t\le T}\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)^2\right] \le 4E\left[\displaystyle\int_0^T H_s^2\, ds\right]$.

証明　まず 1. を示す．$s < t$, $t_{j-1} < s \le t_j$ とする．

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^t H_u\, dW_u \middle| \mathscr{F}_s\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) \middle| \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \phi_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) + E[\phi_j (W_{t\wedge t_j} - W_{t\wedge t_{j-1})}) | \mathscr{F}_s] \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{\infty} E[E[\phi_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) | \mathscr{F}_{t_{i-1}}] | \mathscr{F}_s] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \phi_i (W_{s\wedge t_i} - W_{s\wedge t_{i-1}}) + \phi_j (W_{s\wedge t_j} - W_{s\wedge t_{j-1}}) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{\infty} E[\phi_i E[(W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) | \mathscr{F}_{t_{i-1}}] | \mathscr{F}_s] \\
&= \int_0^s H_u\, dW_u.
\end{aligned}$$

よってマルチンゲールであることが分かった．

2. を示す．$t_{n-1} < t \le t_n$ とし，$X_i = (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}})$ とおけば，$X_1, \ldots, X_n$ は独立で，平均 0, 分散 $t \wedge t_i - t \wedge t_{i-1}$ であるから

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^t H_u\,dW_u\right)^2\right] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[\phi_i\phi_j X_i X_j] \\
&= \sum_{i=1}^n E[\phi_i^2 X_i^2] + 2\sum_{i<j} E[E[\phi_i\phi_j X_i X_j|\mathscr{F}_{t_{j-1}}]] \\
&= \sum_{i=1}^n E[\phi_i^2]E[X_i^2] + 2\sum_{i<j} E[\phi_i\phi_j X_i E[X_j|\mathscr{F}_{t_{j-1}}]] \\
&= \sum_{i=1}^n E[\phi_i^2](t\wedge t_i - t\wedge t_{i-1}) \\
&= E\left[\int_0^t H_u^2\,du\right]
\end{aligned}
$$

となり，証明できた．

3. はマルチンゲールに関する Doob の不等式である． □

単純過程に対して確率積分を定義したが，命題 6.3 を用いれば次のクラスの $\mathscr{H}$ に拡張できることが示せる．

$$
\mathscr{H} = \{H = (H_t);\ (\mathscr{F}_t)\text{-適合で，任意の } M \text{ に対して } E\left[\int_0^M H_t^2 dt\right] < \infty\} \tag{6.3}
$$

離散の場合のマルチンゲール変換が確率積分に対応するわけであるが，離散の場合は被積分関数は predictable を仮定した．連続パラメーターの場合もそれが必要であるが，ブラウン運動の場合は $(\mathscr{F}_t)$-適合と predictable の概念が一致するので気にする必要がないのである．ジャンプのある確率過程を考えると，predictable という条件が必要になってくる．

$H \in \mathscr{H}$ に対して $\int_0^t H_s\,dW_s$ は 2 乗可積分マルチンゲールになるが逆に任意の 2 乗可積分マルチンゲール M_t は適当に $H \in \mathscr{H}$ をとって

$$
M_t = M_0 + \int_0^t H_s\,dW_s
$$

と一意的に表現できる．これを**マルチンゲール表現定理**という．

さらに有界なる停止時刻 $\tau \le T$ に対して次の等式が成立することが示せる．

$$
\int_0^\tau H_s\,dW_s = \int_0^T 1_{\{s\le\tau\}} H_s\,dW_s \tag{6.4}
$$

このことを使うと，次のように更に広いクラス $\tilde{\mathscr{H}}$ まで広げることが出来る．

$$
\tilde{\mathscr{H}} = \{H = (H_t);\ (\mathscr{F}_t)\text{-適合で，任意の } M \text{ に対し } \int_0^T H_t^2\,dt < \infty \quad P\text{-a.e.}\} \tag{6.5}
$$

実際有界な停止時刻の列 τ_n で $\tau_n \to \infty$ かつ $E[\int_0^{\tau_n} H_s^2\,ds] < \infty$ となるものが取れるので，$t < \tau_n$ のとき

$$\int_0^t H_s\,dW_s = \int_0^t 1_{\{s\le\tau_n\}} H_s\,dW_s$$

と定めればよい．このように定義された $\int_0^t H_s\,dW_s$ を**確率積分**と呼ぶ．創始者にちなんで伊藤積分と呼ばれることもある．ただし $\tilde{\mathscr{H}}$ にまで広げたときは，確率積分は最早マルチンゲールであるという保証はない．局所マルチンゲールというクラスになっている．適当な無限大に行く停止時刻の列 τ_n があって，τ_n で停止させた確率過程がマルチンゲールになるというクラスである．

伊藤過程

この確率積分を使っていろいろな計算が自由に出来る次のような確率過程のクラスを導入する

定義 6.4. 次の形の表現を持つ確率過程 (X_t) を**伊藤過程**と呼ぶ．

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\,ds + \int_0^t H_s\,dW_s. \tag{6.6}$$

ここで

- X_0 は $\mathscr{F}_0$-可測
- $K = (K_t)$, $H = (H_t)$ は $\mathscr{F}_t$-適合
- 任意の M に対し $\int_0^M |K_s|\,ds < \infty$ P-a.s.
- 任意の M に対し $\int_0^M |H_s|^2\,ds < \infty$ P-a.s.

このような分解は一意的であることが知られている．

伊藤の公式

伊藤過程の重要性は関数との合成で閉じていることである．即ち次の伊藤の公式が成立する．

定理 6.5. X を次の形の伊藤過程とする．

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\,ds + \int_0^t H_s\,dW_s.$$

また $f(t,x)$ を x について 2 階連続的微分可能，t ついて連続微分可能であるとする．このとき $f(t,X_t)$ も再び伊藤過程となり，次の等式が成立する．

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f_t(s,X_s)ds + \int_0^t f_x(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s,X_s)d\langle X,X\rangle_s. \tag{6.7}$$

ここで

$$\int_0^t f_x(s,X_s)dX_s = \int_0^t f_x(s,X_s)K_s\,ds + \int_0^t f_x(s,X_s)H_s\,dW_s$$
$$\langle X,X\rangle_t = \int_0^t H_s^2\,ds$$

である．

これを使うと，次で定義される局所マルチンゲール

$$M_t = \int_0^t H_s\,dW_s$$

に対し，

$$M_t^2 = \int_0^t 2M_sH_s\,dW_s + \langle M,M\rangle_t$$

が成り立つ．これは $M_t^2 - \langle M,M\rangle_t$ が局所マルチンゲールになることを意味している．この記号 $\langle M,M\rangle_t$ は，局所マルチンゲールに対してこのような性質を持つ増加過程として定義されるものである．**2 次変分** (quadratic variation) と呼ばれている．例えば Wiener 過程に対しては $\langle W,W\rangle_t = t$ となる．実はこの性質と，W_t がマルチンゲールであるという性質が Wiener 過程を特徴付けている．このことを Lévy の定理という．

<u>**幾何ブラウン運動**</u>

伊藤の補題として幾何ブラウン運動を述べよう．

$$S_t = x_0\exp\{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t\} \tag{6.8}$$

で定義される確率過程を幾何ブラウン運動という．ファイナンスでは Black-Scholes モデルといわれる最も基本的な確率過程である．さてこの確率過程は $f(t,x) = x_0\exp\{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma x\}$ とおけば $S_t = f(t,W_t)$ と表される．$f_t = (\mu-\sigma^2/2)f$, $f_x = \sigma f$, $f_{xx} = \sigma^2 f$ であるから，伊藤の公式を使えば

$$\begin{aligned} f(t,W_t) &= f(0,x_0) + \int_0^t (\mu-\sigma^2/2)f(s,W_s)ds + \int_0^t \sigma f(s,W_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 f(s,W_s)ds \\ &= x_0 + \int_0^t \sigma S_s\,dW_s + \int_0^t \mu S_s\,ds \end{aligned}$$

すなわち

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_s\,dW_s + \int_0^t \mu S_s\,ds$$

が成り立つ．これは形式的ではあるが，微分した形で

$$dS_t = \sigma S_t\,dW_t + \mu S_t\,dt$$

とかける．

これは確率積分を含む一種の微分方程式であり，確率微分方程式と言われるものの特別なものである．確率微分方程式に関してはここでは述べないが，存在や一意性など詳しい性質が調べられている．ここで扱うものは全て存在や一意性が成り立つものばかりであるので，それらの結果は断りなく使っていく．

ギルサノフの定理

最後にギルサノフ (Girsanov) の定理と呼ばれる測度の変換について述べておく．この定理はファイナンスでは同値マルチンゲール測度の構成をするときに重要になってくる．

定理 6.6. (θ_t) を $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ P-a.s. をみたす $(\mathscr{F}_t)$-適合過程であり，次の確率過程

$$L_t = \exp\left\{ -\int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 \, ds \right\} \tag{6.9}$$

がマルチンゲールになるものとする．$Q = L_T P$ と定めると，Q は P と同値な測度であり，Q の下で $B_t = W_t + \int_0^t \theta_s \, ds$ は Wiener 過程となる．

上の定理で (L_t) がマルチンゲールになることを仮定したが，十分条件として

$$\exp\left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 \, ds \right\} \in L^1(P)$$

が知られている (Novikov の条件といわれている)．

7. Black-Scholes モデル

この節で連続モデルの最も典型的な Black-Scholes モデルを論じる．時間区間は $[0, T]$ で T が満期をあらわすとする．

モデル

安全証券は e^{rt} で与えられ，株 (危険証券) は S_t で次の確率微分方程式を満たしているとする．

$$dS_t = \sigma S_t \, dW_t + \mu S_t \, dt. \tag{7.1}$$

初期値は S_0 とする．これは第 6 節 で述べたように，

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\} \tag{7.2}$$

で与えられる．割り引かれた株価 $\overline{S}$ は $\overline{S}_t = e^{-rt} S_t$ だから，伊藤の公式から

$$d\overline{S}_t = -re^{-rt} S_t \, dt + e^{-rt} dS_t = -r\overline{S}_t \, dt + e^{-rt}(\sigma S_t \, dW_t + \mu S_t \, dt) = \overline{S}_t((\mu - r)dt + \sigma \, dW_t)$$

ここで，$B_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + W_t$ とおけば

$$d\overline{S}_t = \sigma \overline{S}_t \, dB_t \tag{7.3}$$

となる．ここで $\theta_t = (\mu - r)/\sigma$ とおいて Girsanov の定理を使えば $P^* = L_T P$ の下で (B_t) はブラウン運動となり，$\overline{S}$ は確率積分でかけるからマルチンゲールとなる．$\overline{S}$ は実際つぎのようにかける：

$$\overline{S}_t = S_0 \exp\{\sigma B_t - \sigma^2 t/2\}. \tag{7.4}$$

従ってこの場合は同値マルチンゲール測度は P^* であることが分かった．

Black-Scholes の公式

さて，具体的にコールオプションの価格を求めてみよう．コールオプションは $H = (S_T - K)_+$ で記述されるから，価格 $\pi(H)$ はそれを割り引いた $e^{-rT}(S_T - K)_+ = (\overline{S}_T - e^{-rT}K)_+$ の期待値として表される．即ち

$$\begin{aligned}\pi(H) &= E^{P^*}[(\overline{S}_T - e^{-rT}K)_+] = E^{P^*}[(S_0 \exp\{\sigma B_T - \sigma^2 T/2\} - e^{-rT}K)_+] \\ &= E^{P^*}[(S_0 e^Z - e^{-rT}K)_+].\end{aligned}$$

ここで $Z = \sigma B_T - \sigma^2 T/2$ とおいた．容易に分かるように，P^* のもとでは Z は平均 $-\sigma^2 T/2$, 分散 $\sigma^2 T$ の正規分布である．これは離散の極限として導いた (7.2) の結果と一致している．伊藤解析を使うとこれらのことが容易に導かれたことになる．

自己充足戦略

ポートフォリオ $\phi = (\eta, \theta)$ を与えたときの価値過程は

$$V_t(\phi) = \eta_t S_t^0 + \theta_t S_t \tag{7.5}$$

で定義される．self-financing strategy は，離散のときは $\Delta V_t(\phi) = \phi_t \cdot \Delta S_t$ であったから

$$dV_t(\phi) = \eta_t \, dS_t^0 + \theta_t \, dS_t \tag{7.6}$$

が成り立つことと定義する．これが意味を持つために

$$\int_0^T |\eta_t| \, dt < \infty, \quad \int_0^T |\theta_t|^2 \, dt < \infty \quad P\text{-a.s.} \tag{7.7}$$

を仮定する．$(\mathscr{F}_t)$-適合な確率過程 ϕ が (7.6), (7.7) をにたすとき self-financing strategy と呼ぶ．

割り引かれた株価過程は $\overline{S}_t = e^{-rt} S_t$ で定義される．

命題 7.1. ϕ が (7.7) を満たすとき，$V_t(\phi)$ を (7.5) で定め $\overline{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ とおく．このとき ϕ が self-financing であるための必要十分条件は

$$\overline{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \theta_t \, d\overline{S}_t \tag{7.8}$$

が全ての $t \in [0, T]$ で成り立つことである．

証明　$\overline{V}(\phi)$ の定義から

$$d\overline{V}_t(\phi) = -r\overline{V}_t(\phi)\,dt + e^{-rt}\,dV_t(\phi)$$

であるから，

$$\begin{aligned} d\overline{V}_t(\phi) &= -re^{-rt}(\cancel{\eta_t e^{rt}} + \theta_t S_t)\,dt + \cancel{e^{-rt}\eta_t d(e^{rt})} + e^{-rt}\theta_t\,dS_t \\ &= \theta_t((-re^{-rt}S_t)\,dt + e^{-rt}\,dS_t) \\ &= \theta_t\,d\overline{S}_t \end{aligned}$$

となり，(7.8) が得られる．逆も同様にできる．　□

許容戦略による複製

定義 7.2. self-financing strategy ϕ が**許容** (admissible) であることを，割り引かれた価値過程 $\overline{V}_t(\phi) = \eta_t + \theta_t\overline{S}_t$ がすべての t に対して非負で P^* の下で 2 乗可積分であることと定義する．

　条件付き請求権 H (非負の確率変数) が許容戦略の時刻 T での値と等しくできるとき，**複製**できるという．

定理 7.3. 条件付き請求権 H が P^* に関して 2 乗可積分であるとき，H は複製可能である．このとき時刻 t における価値過程は

$$V_t = E^{P^*}[e^{-r(T-t)}H|\mathscr{F}_t] \tag{7.9}$$

とあらわされる．

証明　まず H が ϕ によって複製できるとする．価値過程は

$$V_t(\phi) = \eta_t S_t^0 + \theta_t S_t$$

と定義される．条件から $V_T(\phi) = H$ である．割り引かれた価値過程は $\overline{V}_t(\phi) = e^{-rt}V_t(\phi)$ と定義されるから

$$\overline{V}_t(\phi) = \eta_t + \theta_t\overline{S}_t.$$

ここで self-financing の条件から命題 7.1 を使って

$$\overline{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \theta_s\,d\overline{S}_s = V_0(\phi) + \int_0^t \theta_s\sigma\overline{S}_s\,dB_s.$$

ところで $\overline{V}_t(\phi)$ は P^* の下で 2 乗可積分で，確率積分で表されるから $\overline{V}_t(\phi)$ は 2 乗可積分マルチンゲールになる．よって

$$\overline{V}_t(\phi) = E^{P^*}[\overline{V}_T|\mathscr{F}_t].$$

従って

$$V_t(\phi) = E^{P^*}[e^{-r(T-t)}H|\mathscr{F}_t].$$

が示せた．

H が複製できることを仮定して議論をしてきたが，実際に複製できることを示すことが残っている．$M_t = E^{P^*}[e^{-rT}H|\mathscr{F}_t]$ は 2 乗可積分マルチンゲールであり，マルチンゲール表現定理から $E^{P^*}[\int_0^T K_s^2\,ds] < \infty$ となる $(\mathscr{F}_t)$-適合な確率過程が存在し M_t が

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s\,dB_s$$

とあらわされる．ここで $\theta_t = K_t/\sigma\overline{S}_t$, $\eta_t = M_t - \theta_t\overline{S}_t$ とおき，$\phi = (\eta, \theta)$ とすると

$$\begin{aligned}
\overline{V}_t(\phi) &= \eta_t + \theta_t\overline{S}_t = M_t = M_0 + \int_0^t K_s\,dB_s \\
&= M_0 + \int_0^t \sigma\theta_s\overline{S}_s\,dB_s \\
&= M_0 + \int_0^t \theta_s\,d\overline{S}_s. \quad (\because (7.3))
\end{aligned}$$

これで，命題 7.1 を使えば $\phi = (\eta, \theta)$ が self-financing であることがわかるその価値過程は

$$V_t(\phi) = e^{rt}M_t = E^{P^*}[e^{-r(T-t)}H|\mathscr{F}_t].$$

この表現から $V_t(\phi)$ は非負の 2 乗可積分マルチンゲールで $V_T(\phi) = H$ が成立している．これで複製できていることがわかった． □

複製戦略

価格に関しては上の定理で求まっているが，ヘッジする立場から言えば複製戦略がきちんと求まっている必要がある．その表現を次に述べる．H は $f(S_T)$ の形で与えられている場合を考える．$f\colon (0,\infty) \to [0,\infty$ は次の条件を満たしているものとする：$c > 0, k_1 > 0, k_2 > 0$ が存在して

$$|f(x)| \le c(1+x)_1^k x^{-k_2}.$$

このとき次を得る．

定理 7.4. $H = f(S_T)$ の複製戦略 $\phi = (\eta, \theta)$ は次で与えられる:

$$\theta_t = e^{-r(T-t)}F_x(T-t, S_t) \tag{7.10}$$

$$\eta_t = e^{-rT}(F(T-t, S_t) - F_x(T-t, S_t)S_t). \tag{7.11}$$

ここで

$$F(T-t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x\exp\{\sigma y\sqrt{T-t} + (r-\sigma^2/2)(T-t)\})e^{-y^2/2}\,dy.$$

証明　ϕ を H の複製戦略とする．

$$S_t = S_0 \exp\{(r-\sigma^2/2)t + \mathscr{B}_t\}$$

であった．(S_t) は次を満たしていることに注意しよう: $t > s$ のとき

$$S_t = S_s \exp\{(r-\sigma^2/2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)\}$$

このことに注意すれば

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= E^{P^*}[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathscr{F}_t] \\ &= E^{P^*}[e^{-r(T-t)} f(S_t \exp\{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(B_T - B_t)) | \mathscr{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} F(T-t, S_t). \end{aligned} \tag{7.12}$$

ここで

$$\begin{aligned} F(T-t,x) &= E^{P^*}[f(x\exp\{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(B_T - B_t))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x\exp\{\sigma y\sqrt{T-t} + (r-\sigma^2/2)(T-t)\}) e^{-y^2/2}\, dy \\ &= \frac{1}{x} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(T-t, y/x, r-\sigma^2/2, \sigma)\, dy. \end{aligned}$$

但し，

$$g(t,z,\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta z\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log z - \alpha t)^2}{2\beta t}\right\}.$$

f の条件から $F(T-t,x)$ は (t,x) について微分可能である．$G(t,x) = F(t, e^{rt}x)$ とおけば

$$\overline{V}_t(\phi) = V_t(\phi) e^{-rt} = e^{-rT} G(t, e^{-rt} S_t) = e^{-rT} G(t, \overline{S}_t).$$

ここで伊藤の公式を使うと

$$\begin{aligned} d(\overline{V}_t(\phi)) &= e^{-rT} d(G(t,\overline{S}_t)) \\ &= e^{-rT} G_x(t,\overline{S}_t)\, d\overline{S}_t + e^{-rT} G_t(t,\overline{S}_t)\, dt + \frac{1}{2} e^{-rT} G_{xx}(t,\overline{S}_t)\, d\langle \overline{S}, \overline{S}\rangle_t \\ &= e^{-rT} G_x(t,\overline{S}_t) \sigma \overline{S}_t\, dB_t + e^{-rT} G_t(t,\overline{S}_t)\, dt \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-rT} G_{xx}(t,\overline{S}_t) \sigma^2 \overline{S}_t^2\, dt. \end{aligned}$$

積分形で書けば

$$\begin{aligned} E^{P^*}[e^{-rT} f(S_T) | \mathscr{F}_t] &= \overline{V}_t(\phi) \\ &= E^{P^*}[e^{-rT} f(S_T)] + e^{-rT} \int_0^t G_x(t,\overline{S}_t) \sigma \overline{S}_t\, dB_t \end{aligned}$$

$$+ e^{-rT}\int_0^t \{G_t(t,\overline{S}_t) + \frac{1}{2}G_{xx}(t,\overline{S}_t)\sigma^2\overline{S}_t^2\}dt.$$

左辺はマルチンゲールなので，分解の一意性から

$$G_t + \frac{1}{2}G_{xx}\sigma^2 x^2 = 0$$

が成り立っている．よって

$$\begin{aligned}\overline{V}_t(\phi) &= E^{P^*}[e^{-rT}f(S_T)] + e^{-rT}\int_0^t G_x(t,\overline{S}_t)\,d\overline{S}_t \\ &= E^{P^*}[e^{-rT}f(S_T)] + e^{-rT}\int_0^t e^{rt}F_x(t,S_t)\,d\overline{S}_t.\end{aligned}$$

ここで $G_x(t,x) = e^{rt}F_x(t,e^{rt}x)$ を使った．これと (7.8) の表現を比較して

$$\theta_t = e^{-r(T-t)}F_x(T-t,S_t)$$

が分かる．さらに η はポートフォリオの定義

$$V_t(\phi) = \eta_t e^{rt} + \theta_t S_t$$

から

$$\begin{aligned}\eta_t &= e^{-rt}V_t(\phi) - e^{-rt}\theta_t S_t \\ &= e^{-rt}e^{-r(T-t)}F(T-t,S_t) - e^{-rt}e^{-r(T-t)}F_x(T-t,S_t)S_t \\ &= e^{-rT}(F(T-t,S_t) - F_x(T-t,S_t)S_t).\end{aligned}$$

これが求める結果である． □

参考文献

[1] R. J. Elliott and P. E. Kopp, “*Mathematics of financial markets*,” Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] I. Karatzas and S. E. Shreve, “*Brownian motion and stochastic calculus*,” Second edition, Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] I. Karatzas and S. E. Shreve, “*Methods of mathematical finance*,” Applications of Mathematics, 39, Springer-Verlag, New York, 1998.

[4] D. Lamberton and B. Lapeyre, “*Introduction to stochastic calculus applied to finance,*” Second edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.

[5] D. Revuz and M. Yor, “*Continuous martingales and Brownian motion*,” Third edition, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1999.

[6] R. J. Williams, “*Introduction to the mathematics of finance*,” Graduate Studies in Mathematics, 72, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

数理科学特別講義「数理ファイナンス入門」　　重川 一郎

問題

1. 株価の変動が以下のように変動する．また安全債券は現在価格が 1 で，1 年後が 1.1 であるとする．

$$
\begin{array}{lll}
\text{現在} & \text{1 年後} & \\
 & 160 & \text{確率 } 0.6 \\
100 & \nearrow\!\!\!\searrow & \\
 & 80 & \text{確率 } 0.4
\end{array}
$$

   このとき，行使価格を 120 として，コールオプションと，プットオプションの現在時点での価格を求めよ．

2. 次のような CRR モデルについて述べよ．期間は $0, 1, 2, \ldots, T$ とし，安全証券を $S_t^0 = (1+\rho)^t$, $\rho > -1$ とし，危険証券 (S_t) は次の規則で変化するとする $(-1 < a < b)$

$$
\begin{array}{lll}
 & (1+b)S_t & \text{確率 } p \\
S_t & \nearrow\!\!\!\searrow & \\
 & (1+a)S_t & \text{確率 } 1-p
\end{array}
$$

   また上の事象は各時刻ごとに独立であるとする．

   (1) 割り引かれた株価過程 (S_t/S_t^0) がマルチンゲールになるような p を求めよ．

   (2) 市場が viable であるための必要十分条件は $\rho \in (a, b)$ であることを示せ．

   (3) $\rho \le a$ のとき，裁定機会を構成せよ．

   (4) アメリカ型プットオプションの時刻 t における価格を Z_t とする．このとき $Z_t = A(t, S_t)$ と表されることを帰納法で示せ．更に t を固定するとき $A(t, x)$ は下に凸の単調非増加関数であることを示せ．

3. $(M_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ を (劣) マルチンゲールとする．τ を停止時刻として，M^τ が再び (劣) マルチンゲールになることを示せ．