1 次元拡散過程とスペクトル

目 次

1次元拡散過程とスペクトル

重川 一郎 *

（京都大学大学院理学研究科）

1. 導入

1 次元拡散過程について述べる．特にそのスペクトルについて調べることを目的とする．特に Pearson-Kolmogorov 拡散過程のスペクトルについて詳述する．この拡散過程は次のような生成作用 $\mathfrak{A}$ を持つものとして定義される．

$$\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}. \tag{1.1}$$

ここで a は 2 次式で，b は 1 次式である．この拡散過程は（やや漠然とした言い方ではあるが）次のような特徴を持つ．

(1) 形が単純

(2) 標準測度 (speed measure) が Pearson 分布

(3) 固有関数が多項式

ちなみに speed measure を「速度測度」という訳語を当てれば面白い気もするが，そういう習慣はないようである．少し解説をしておこう．(1) は，係数が 1 次式や 2 次式のときをまず考えようというのは自然だろう．(2) は Kolmogorov [16] によって注意されている．このことを根拠に Pearson-Kolmogorov 拡散過程と（一部で）呼ばれている．Pearson 自身がこの拡散過程に注目した訳ではないので，Kolmogorov 拡散過程と呼んでもよいかもしれない．またそちらの方が簡便である．(3) はすべての場合に成り立つわけではない．しかし，何らかの意味で多項式に関わっていることは間違いない．また直感的に多項式が固有関数になる条件を考えると，$\frac{d^2}{dx^2}$ を作用させると次数が 2 下がるので，2 次式を掛ければ次数が変わらない．同じく $\frac{d}{dx}$ を作用させると次数が 1 下がるが，1 次式を掛ければ次数が元に戻る．

そういう理由でこの形の生成作用素を考えてみるというのは発想としては自然であろう．他にも次のような理由が挙げられる．

(4) 標準測度と尺度関数の入れ替えで閉じている

*e-mail: `ichiro@math.kyoto-u.ac.jp`, URL: `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/`

(5) Stein の双対で閉じている

これらについては，その意味も込めて後に詳しく説明する．一種の双対性であるが，超対称性が背後にある．超対称性と言う視点が，このノートの一つの特徴である．1 次元拡散過程は様々な観点から調べることができるであろうが，ここでは超対象性というものが強調されている．必要以上に強調されすぎているとも言えるが，いろいろな観点があってもよいであろう．全体の構成は，最初の部分で一般的な枠組みを準備し，後半で具体的な例を論じる．知られている結果がほとんどであるが，観点を変えて見ているということである．

2. Pearson 分布族

まず密度 ρ が次のような形をしている分布を Pearson 分布族という．

$$\rho(x) = \exp\left\{\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right\}. \tag{2.1}$$

ここで $g(x)$ は 1 次式で，$f(x)$ は 2 次式である．所与の区間で $f > 0$ を仮定している．特に ρ が確率密度のときを Pearson 分布族と言うが，ここでは特に正規化されてなくてもよいし，無限の測度を持つ場合も一緒に考えることにする．(2.1) の形の関数を Pearson 密度と総称する．

Karl Pearson による Pearson 分布族 (Pearson's system of distribution) は 1895 年に発表された論文 [22] に初めて現れる ([23] の pp. 41-112 にも納められている．この分布は 12 種類に分類されている（例えば [21] p. 549 を見よ）．Pearson の研究は統計的な問題意識に基づいているが，我々の興味はスペクトルなのでこれほど細かく分ける必要はないので，6 種類に分ける．むしろ議論を進めて行く上で，議論が同属の分布の間で閉じているほうが望ましいので，その観点からはむしろ 6 種類の方が自然である．確率密度で言うと

(2.2)

	密度関数	区間
1	$e^{-\beta x^2/2}$	$\mathbb{R}$
2	$x^\alpha e^{-\beta x}$	$(0,\infty)$
3	$x^\alpha(1-x)^\beta$	$(0,1)$
4	$(1+x^2)^\alpha \exp\{\beta \arctan x\}$	$\mathbb{R}$
5	$x^\alpha e^{-\beta/x}$	$(0,\infty)$
6	$x^\alpha(1+x)^\beta$	$(0,\infty)$

となる．線型変換で移りあうものは無視した．本質的なものだけを考えている．区間は全て開区間にしたが，密度関数を well-defined にするためで，場合によっては (境界条件が正則であれば) 端点を含めなければならない．また，正規化定数を考慮していないので，確率密度にはならない．確率密度にすると，後の議論が煩雑になるので，その影響は必要になったときに考慮することにする．またパラメーター α, β によっては有限測度にならないが，パラメーターの範囲は全ての実数である．β の役割は，ものによって多少意味合いが違う．3, 6 では α, β は対等な立場だが，他のものは β は正負だけが本質的な意味を持つ．

典型的な分布の名前を付ければ

	分布名
1	正規分布
2	ガンマ分布
3	ベーター分布
4	t-分布
5	極値分布
6	F-分布 & Pareto 分布

これは少し観点を変えて次のような分類も考えられる．

	完全系列	不完全系列
α-系列	正規分布	t-分布
β-系列	ガンマ分布	極値分布
γ-系列	ベーター分布	F-分布 & Pareto 分布

α, β, γ の系列は，対応する 2 階の常微分方程式の実軸にある特異点の数で分類している．∞ も特異点と数えて，1 個，2 個，3 個で分類している．

あるいは次のように分類したほうがいいかもしれない．

	完全系列	不完全系列	
α-系列	正規分布		
β-系列	ガンマ分布	極値分布	
γ-系列	ベーター分布	F-分布 & Pareto 分布	t-分布

今度は，複素平面で考えて，特異点の個数を数えている．密度を入れてみると

	完全系列	不完全系列	
α-系列	$e^{-\beta x^2/2}$		
β-系列	$x^\alpha e^{-\beta x}$	$x^\alpha e^{-\beta/x}$	
γ-系列	$x^\alpha(1-x)^\beta$	$x^\alpha(1+x)^\beta$	$(1+x^2)^\alpha \exp\{\beta \arctan x\}$

こちらの方が，密度の類似性が見て取れるよう思える．

今までは，測度の分類を行ったわけであるが，それぞれこれらの測度を不変測度に持つ拡散過程が対応している．そこで，拡散過程の生成作用素の方を見てみよう．

拡散過程の生成作用素に対して次のような表現を考えよう．

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{d}{dm}\frac{d}{ds} \quad \text{(Feller)} \\
&= a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx} \quad \text{(Kolmogorov)} \\
&= \left(a\frac{d}{dx} + b\right)\frac{d}{dx} \quad \text{(Stein method.)}
\end{aligned}
$$

これはよく知られた表現であるが，3 番目の Stein method が，ここでの主要な話題である．この分解はほとんど自明な分解で，それほど意味があるように思えないが，作用素の族を考えるとき，統一的な理解を可能にする．それがこの論文の主題であると言ってよい．

この作用素に対する固有値を考えていく．したがって次の微分方程式を考える必要がある．

$$au'' + bu' + \lambda u = 0.$$

この微分方程式は実軸の上で考えるべきであるが，特殊関数との対応を考えると，複素平面で考えたほうが良い．そして複素平面で考えたとき，特異点が何個あるかで分類が可能である．上の 2 番目の分類は，実軸の上に (∞ は実軸に含まれないものとしている) 何個あるかに注目している α-系列は 0 個，β-系列は 1 個，γ-系列は 2 個，である．特異点をどこで考えるかは，多少観点の相違をもたらす．複素平面で考えると，t-分布は複素平面では特異点が 2 つなので γ-系列に入れたほうが良いようにも思える．これらは，性質を詳しく調べていけば自然な分類法に落ち着くであろう．

また，完全系列，不完全系列の分類は，多項式が固有関数の完全系を与えるか，あるいはある有限次数までは多項式が固有関数になるが，残りは固有値 (点スペクトル) としては現れてこないで，固有関数が完全系ではない場合である．

さて，生成作用素の係数 a の形が分類に反映している．先ほどの分類表を a の形で対応させると

	完全系列	不完全系列		特殊関数
α-系列	$a = 1$			${}_0F_1$
β-系列	$a = x$	$a = x^2$		${}_1F_1$
γ-系列	$a = x(1-x)$	$a = x(1+x)$	$a = 1 + x^2$	${}_2F_1$

確率過程との対応を考えると

	完全系列	不完全系列	
α-系列	ブラウン族		
β-系列	ベッセル族	ブラック-ショールズ族	
γ-系列	ヤコビ族	フィッシャー・パレート族	スチューデント族

という様な分類が可能である．

3. 生成作用素の表現について

生成作用素 $\mathfrak{A}$ の表現には，いくつかの流儀がある．これを次のように分類する．

名前	生成作用素	双対性	微分作用素
Kolmogorov	$a\dfrac{d^2}{dx^2}+b\dfrac{d}{dx}$		
Feller	$\dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds}$	$\dfrac{d}{dm}=-\dfrac{d}{ds}^*$	$\dfrac{d}{ds}\colon L^2(dm)\to L^2(ds)$
Stein	$\Big(a\dfrac{d}{dx}+b\Big)\dfrac{d}{dx}$	$a\dfrac{d}{dx}+b=-\dfrac{d}{dx}^*$	$\dfrac{d}{dx}\colon L^2(\rho)\to L^2(a\rho)$

Stein は Kolmogorov と変わりないように見えるが，$a\frac{d}{dx}+b=-\frac{d}{dx}^*$ という双対性が背景にある．また Feller は $\frac{d}{dm}=-\frac{d}{ds}^*$ という双対性が特徴的である．係数の regularity を仮定するので，すべて同値と言ってよいが，違った観点から見ていることになる．そのことの説明をこの節で与える．

Kolmogorov 表現

1 次元の拡散過程の生成作用素は

$$\mathfrak{A}=a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx} \tag{3.1}$$

と表される．空間は $I=[\ell,r]$ とする．但し，境界の点は，境界が正則で Neumann 境界条件を課すとき以外は，I には含まれないとする．こうした細かな点は，それが問題になったときに詳しく述べることにし，今は境界のことは深入りしない．

(3.1) の表現は Kolmogorov に遡るといってよいものであろう．a を拡散係数，b をずれの係数と呼び，確率論的な意味がある．a は C^2 級で， b が C^1 級を仮定すれば，以下の計算は正当化できる．更に滑らかさを落とすこともできるが，上の仮定で十分である．実際に出てくる関数はすべて C^∞ なので，そう仮定してもよい．また (ℓ,r) 上で $a>0$ を仮定する．境界では $a=0$ になることを許している．

それに対して Feller による speed measure と scale function を用いた表現もある:

$$\mathfrak{A}=\frac{d}{dm}\frac{d}{ds} \tag{3.2}$$

と表される．これは一階の微分作用素の積として表現しているとみなせる．いきなり 2 階の微分作用素を扱うことは難しいので，1 階の微分作用素に分解して考えるというやり方である．

もちろん (3.1) と (3.2) の違いは表面的なことだけで，互いに一方から他方に移れる．ここでは regularity の良いものだけ考えている．すると dm の密度 ρ は

$$\rho=\frac{1}{a}\exp\Big\{\int\frac{b}{a}\,dx\Big\} \tag{3.3}$$

とあらわされる．

尺度関数 s の微分は

$$s' = \exp\left\{-\int \frac{b}{a}\,dx\right\} = \frac{1}{a\rho}$$

で与えられる．

Feller の表現

次に，Feller の表現から出発してみよう．

$$dm = \rho dx \tag{3.4}$$

として，scale を表すのに

$$s' = \frac{1}{a\rho} \tag{3.5}$$

とおく．従って二つの関数 a, ρ の組から決まると言ってよい．(a,ρ) とかく．これから

$$\mathfrak{A} = \frac{d}{dm}\frac{d}{ds} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho\frac{d}{dx} \tag{3.6}$$

である．ここで，記法について約束をしておく．作用素の記号であるが，二つの関数 a, ρ を与えて，作用素 $\mathfrak{A}$ が (3.6) で決まる．後の議論では，a を固定していることが多いので，(a,ρ) に対応する作用素を $\mathfrak{A}_\rho$ とかく:

$$\mathfrak{A}_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho\frac{d}{dx}. \tag{3.7}$$

従って ρ の代わりに $a\rho$ をとれば，対応する作用素は $\mathfrak{A}_{a\rho}$ である．

(3.6) を更に計算すると

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho\frac{d}{dx}\\ &= a\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(a\rho)'}{\rho}\frac{d}{dx}\\ &= a\frac{d^2}{dx^2} + (a' + a(\log\rho)')\frac{d}{dx}\end{aligned}$$

となる．従って b は次のように表される．

$$b = \frac{(a\rho)'}{\rho} = a' + a(\log\rho)' \tag{3.8}$$

これから $\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}$ の Kolmogorov の表現が得られる．さらに (3.8) から

$$(\log\rho)' = \frac{b - a'}{a}$$

であるから

$$\log\rho = \int \frac{b-a'}{a}dx$$

よって

$$\rho = \exp\left\{\int \frac{b-a'}{a}dx\right\} \tag{3.9}$$

となる．これから a が 2 次式，b が 1 次式のとき，Pearson 密度が得られることがわかる．このことは Kolmogorov [16] によって注意されているので，この形の拡散過程をこのことにちなんで Pearson-Kolmogorov diffusion と呼ぶ．この論文では単に Kolmogorov diffusion と呼ぶことにする．

ρ の特徴づけとしては，上の式から

$$(a\rho)' = b\rho \tag{3.10}$$

も得られる．

上の議論を振り返ると，a が 2 次式で $a(\log\rho)'$ が 1 次式ならば ρ は Pearson 密度になることが分かったわけである．このことに注意すれば，2 パラメーターの族にすぐ広げられることが次でわかる．

命題 3.1. a が 2 次式で $a(\log\rho)'$ が 1 次式であると仮定する．このとき α, $\beta\in\mathbb{R}$ に対し，$\rho_{\alpha,\beta} = a^\alpha\rho^\beta$ は Pearson 密度である．従って $(a,\rho_{\alpha,\beta})$ は Kolmogorov diffusion を定める．

証明 示すべきは $a(\log\rho_{\alpha,\beta})'$ が 1 次式であること．

$$a(\log\rho_{\alpha,\beta})' = a(\log a^\alpha\rho^\beta)' = a(\alpha\log a + \beta\log\rho)' = a\Big(\alpha\frac{a'}{a} + \beta(\log\rho)'\Big) = \alpha a' + \beta a(\log\rho)'.$$

これは仮定から 1 次式になる． □

これで一つ Kolmogorov diffusion (a,ρ) が存在すれば新たな Kolmogorof diffusion の 2 パラメーターの族 $(a, a^\alpha\rho^\beta)$ が得られる．

あとで述べるが Feller の枠組みでは dm-ds 双対性が存在する．dm と ds を交換することに相当する．これに関連してあらかじめ次のことを注意しておく．$(a,\rho_{-1,-1})$ は丁度 m と s を入れ換えたものになっている．実際 $\rho_{-1,-1} = \frac{1}{a\rho}$ なので，これは $dm=\rho dx$ のときの s' である．この場合の scale density は $\frac{1}{a\rho_{-1,-1}} = \rho$ なので speed measure desnsity と scale density を入れ替えたものになっている．双対がこの族の中に入っていることが分かり，自然な族であることがわかる．さらに言えば $(a,\rho)=(a,\rho_{0,1})$ の双対が $(a,\rho_{-1,-1})$ となる．一般化して $(a,\rho_{\alpha,\beta})$ の双対が $(a,\rho_{-\alpha-1,-\beta})$ である．これは

$$\frac{1}{a\rho_{\alpha,\beta}} = \frac{1}{aa^\alpha\rho^\beta} = a^{-\alpha-1}\rho^{-\beta} = \rho_{-\alpha-1,-\beta}$$

という計算からわかる．対応する拡散過程の生成作用素のスペクトルは 0 を除いて一致するというのが超対称性の帰結であり，後で具体例を見ていく．これがこの論文の一つの主要な主題である．

$(a, \rho_{\alpha,\beta})$ の drift 係数 $b_{\alpha,\beta}$ は

$$b_{\alpha,\beta} = a' + a(\log \rho_{\alpha,\beta})' = a' + \alpha a' + \beta a(\log \rho)' \tag{3.11}$$

となる．b は要するに 1 次式なので，

$$b = mx + n$$

という，(m, n) によるパラメター付も可能である．

Stein の表現

さて，(3.1) から，$\mathfrak{A}$ は次のように

$$\mathfrak{A} = \left(a\frac{d}{dx} + b\right)\frac{d}{dx} \tag{3.12}$$

と二つの 1 階の微分作用素の積による表現とみることもできる．この分解が Stein's method の巧妙なとことであるということもできる．この論文ではこの分解を基本に議論を進めていく．(3.6) と合わせて考えれば

$$a\frac{d}{dx} + b = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho \tag{3.13}$$

と言う関係も成立している．

双対作用素

分解 (3.12) の意味を考えてみよう．このことは超対称性と関連がある．(3.9) で $\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho$ という作用素を考えた．これは $-\frac{d}{dx}$ の双対作用素になる．実際次が成立する．

命題 3.2. $f, g \in C_0^1((l, r))$ に対し

$$\int_l^r \frac{df}{dx} g a\rho \, dx = -\int_l^r f \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(a\rho g)\, \rho dx \tag{3.14}$$

証明 簡単な計算で

$$\int_l^r \frac{df}{dx} g a\rho \, dx = -\int_l^r f \frac{d}{dx}(a\rho g)\, dx = -\int_l^r f \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(a\rho g)\, \rho dx. \qquad \square$$

この命題は，次のように考えられる．作用素 D を

$$D = \frac{d}{dx} \tag{3.15}$$

で定める．但し

$$D\colon L^2(\rho)\to L^2(a\rho) \tag{3.16}$$

とみなす．ここで $L^2(\rho)$ は測度，ρdx に関する L^2 空間を表す．$L^2(a\rho)$ も同様である．すると命題 3.1は D の双対作用素が

$$D^* = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho = -\Big(a\frac{d}{dx}+b\Big) \tag{3.17}$$

であることを意味している．従って (3.4) の分解は $\frac{d}{dx}$ とその双対に分解したとみることが出来る（符号がマイナスになるが）．

同じことが Feller の表示 (3.2) についてもいえる．実際

$$\frac{d}{dm} = -\Big(\frac{d}{ds}\Big)^* \tag{3.18}$$

が成り立つ．

ここでの計算は，関数を台がコンパクトなものに制限しているので，formal adjoint の計算でしかない．境界条件まで厳密に考慮した定式化を次節で与えるが，感覚は理解してもらえるものと思う．

超対称性とスペクトル

さて，上の計算では生成作用素 $\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}$ を

$$\mathfrak{A} = -D^*D$$

あるいは

$$\mathfrak{A} = -\Big(\frac{d}{ds}\Big)^*\frac{d}{ds}$$

と表したことになる．このように表現することの利点を挙げておこう．そのために超対称性に対する一般論を述べておく．

命題 3.3. $T\colon H_1\to H_2$ を Hilbert 空間 H_1 から H_2 への稠密に定義された閉作用素とする．このとき T^*T は自己共役作用素で $\mathrm{Dom}(T^*T)$ は $\mathrm{Dom}(T)$ で稠密．

証明

$$\mathscr{E}(u,v) = (Tu,Tv),\quad u,v\in\mathrm{Dom}(T) \tag{3.19}$$

で bilinear form $\mathscr{E}$ を定めれば，これは閉．対応する Friedrichs 拡大を S とすれば，$u\in\mathrm{Dom}(S)$, $v\in\mathrm{Dom}(T)$ に対し

$$(Su,v) = (Tu,Tv). \tag{3.20}$$

これは $Tu\in\mathrm{Dom}(T^*)$ で $T^*Tu = Su$ を意味する．即ち $S\subset T^*T$．T^*T が対称であることは明らかで，S は自己共役だから $S=T^*T$ が従う．

残りは明らか． □

超対称性を利用すると，二つの作用素が同じスペクトルを持っていることが示せる．これは次の命題が根拠になっている．

命題 3.4. 一般に T を Hilbert 空間 H_1 から Hilbert 空間 H_2 への閉作用素とするとき，T^*T と TT^* は固有値 0 を除いて，同じスペクトル構造を持っている．

証明 作用素 U を

$$U\colon \sqrt{T^*T}u \mapsto Tu \tag{3.21}$$

で定めると U は $\mathrm{Ran}(\sqrt{T^*T}) \subseteq H_1$ から $\mathrm{Ran}(T) \subseteq H_2$ への等距離作用素となる．実際

$$(\sqrt{T^*T}u, \sqrt{T^*T}u)_{H_1^*} = (T^*Tu, u)_{H_1^*} = (Tu, Tu)_{H_2^*}$$

よりこのことは明らか．U は $\overline{\mathrm{Ran}(\sqrt{T^*T})}$ から $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$ へ一意的に拡張できる．さらに

$$U^{-1}TT^*U\sqrt{T^*T}u = U^{-1}TT^*Tu = \sqrt{T^*T}T^*Tu = T^*T\sqrt{T^*T}u$$

であるから，$\mathrm{Ran}(\sqrt{T^*T})$ 上で $U^{-1}TT^*U = T^*T$ が成立している．これは T^*T の 0 以外での固有値の空間で T^*T と TT^* が unitary equivalent であることを示している． □

特に固有ベクトルの対応は T で与えられることが次のように確かめられる．

命題 3.5. $\lambda > 0$ とする．x が T^*T の固有値 λ に対する固有ベクトルならば，Tx は TT^* の固有値 λ に対する固有ベクトルであり，$|Tx| = \sqrt{\lambda}|x|$ である．また Tx が TT^* の固有値 λ に対する固有ベクトルで，$x \perp \mathrm{Ker}(T)$ ならば x は T^*T の固有値 λ に対する固有ベクトルであり，$|T^*x| = \sqrt{\lambda}|x|$ である．

さらに，T と T^* の役割を入れ替えれば，θ が TT^* の固有値 λ の固有ベクトルならば$T^*\theta$ は T^*T の固有値 λ の固有ベクトルで $|T^*\theta| = \sqrt{\lambda}|\theta|$ が成り立つ．

証明 x を T^*T の λ に対する固有ベクトルとする:

$$T^*Tx = \lambda x. \tag{3.22}$$

すると $y \in \mathrm{Dom}(TT^*)$ に対し

$$(Tx, TT^*y) = (T^*Tx, T^*y) = \lambda(x, T^*y) = \lambda(Tx, y)$$

となり，$TT^*Tx = \lambda Tx$ が従う．また (3.22) から

$$|Tx|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda|x|^2.$$

これから $|Tx| = \sqrt{\lambda}|x|$ が従う．

Tx が TT^* の固有値 λ に対する固有ベクトルのとき

$$TT^*Tx = \lambda Tx$$

$$T(T^*Tx - \lambda x) = 0$$

より $T^*Tx - \lambda x \in \mathrm{Ker}(T)$．ところで $y \in \mathrm{Ker}(T)$ のとき

$$\begin{aligned}(T^*Tx - \lambda x, y) &= (Tx, Ty) - \lambda(x, y) \\ &= 0. \quad (\because\ Ty = 0 \text{ と } (x, y) = 0 \text{ から})\end{aligned}$$

よって $T^*Tx - \lambda x = 0$ となる．またこれから

$$|Tx|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda |x|^2.$$

□

4.　双対作用素

この節で $\frac{d}{ds}$ の共役作用素が $-\frac{d}{dm}$ であることを示す．まず dm, ds による拡散過程の特徴づけを簡単にまとめておく．

標準測度と尺度関数

空間を $I = [0, r)$ とする．$r \in (0, \infty]$ である．境界の分類は後で述べるが，0 は正則境界，r は正則ではない境界であることを想定し，0 は空間に含ませ，r は除外しておく．もちろんともに正則でもよいし，ともに正則でなくてもよい．区間を二つに分けて考えるなどすればよい．

m, s を I 上の連続な狭義単調関数とし，$m(0) = s(0) = 0$ を仮定する．m, s から定まる測度を dm, ds と表す．dm を標準測度，s を尺度関数と呼ぶ．

境界の分類

境界を分類するため dm, ds を用いて次のような関数を導入する．$x \le r$ に対し

$$S(x) = \int_0^x m(y)\, ds(y) = \int_0^x (s(x) - s(u))\, dm(u), \tag{4.1}$$

$$M(x) = \int_0^x s(y)\, dm(y) = \int_0^x (m(x) - m(u))\, ds(u). \tag{4.2}$$

S, M の境界 r の近傍の挙動に応じて次のように分類される．これを Feller の分類法という．

定義 4.1. $S(r-) < \infty$ のとき境界 r は **exit**，$S(r-) = \infty$ のとき境界 r は **non-exit**，$M(r-) < \infty$ のときは **entrance**，$M(r-) = \infty$ のときは **non-entrance** と呼ぶ．

r が exit ならば $s(r-) < \infty$, entrance ならば $m(r-) < \infty$ が成り立つ．これらは確率論的な意味からこのような名前が付けられている．境界 0 は初めから exit かつ entrance を仮定していることになる．exit, entrance のとき正則という．それ以外の場合を非正則と

いう．これはまた次の様に言い換えることもできる．$M(r-)+s(r-)<\infty$ のとき正則，$M(r-)+s(r-)=\infty$ のとき非正則.

I 上の関数 f が

$$f(x)=f(0)+\int_0^x \theta(y)\,ds(y) \tag{4.3}$$

と表されるとき f は s-微分可能であるといい，

$$\frac{df}{ds}(x)=\theta(x) \tag{4.4}$$

と表記する．$\frac{df}{ds}(x)$ は ds-a.e. の意味でしか定まらないが，後では連続性などで，すべての点で定まっていることが多い．f 自体は，(4.3) ですべての点で定まっている．さらに f は $L^2(dm)$ の元であることを仮定することが多く，$L^2(dm)$ の元は，f,g,h などの記号を用いる．

同様に I 上の関数 η が

$$\eta(x)=\eta(0)+\int_0^x g(y)\,dm(y) \tag{4.5}$$

と表されるとき θ は m-微分可能であるといい，

$$\frac{d\theta}{ds}(x)=g(x) \tag{4.6}$$

と表記する．$\frac{df}{dm}(x)$ は dm-a.e. の意味でしか定まらないが，後では連続性などで，すべての点で定まっていることが多い．f 自体は，(4.5) ですべての点で定まっている．さらに η は $L^2(ds)$ の元であることを仮定することが多く，$L^2(ds)$ の元は，θ,η,ξ などの記号を用いる．(4.3) の θ は $L^1(ds)$ が仮定されているが (あるいは少なくとも $L^1_{\mathrm{loc}}(ds)$ を仮定する) ds に関わる関数を θ,η,ξ などの記号であらわしている．

$L^2(dm)$ と $L^2(ds)$ の区別は重要で，この二つの空間の間の写像がこの論文では重要な働きをする．

Dirichlet 形式

$L^2(dm)$ に Dirichlet 形式 $\mathscr{E}$ を次で導入する．$\mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ を $f\in L^2(dm)$ で f は s に関して微分可能であり，

$$\int_0^r \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds<\infty \tag{4.7}$$

となる関数全体とする．さて，上の (4.7) が成り立つ関数たちに対して

$$\mathscr{E}(f,g)=\int_0^r \frac{df}{ds}\frac{dg}{ds}\,ds,\quad f,g\in\mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \tag{4.8}$$

で Dirichlet 形式を定める．また $\mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ は次の内積 $\mathscr{E}_1$ で Hilbert 空間になる．

$$\mathscr{E}_1(f,g)=\mathscr{E}(f,g)+(f,g)_{L^2(dm)}=\int_0^r \frac{df}{ds}\frac{dg}{ds}\,ds+\int_0^r fg\,dm \tag{4.9}$$

$f \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ とするとき，f は I で連続であるから $x=0$ での値 $f(0)$ が確定する．$\mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ で $f \mapsto f(0)$ が連続であることを示そう．また，境界 r での漸近的な挙動についても述べておく．

命題 4.2. $f \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ に対し，次の不等式が成立する．

$$|f(0)| \leq \frac{1}{m(x)^{1/2}}\|f\|_{L^2(dm)} + \mathscr{E}(f,f)^{1/2}s(x)^{1/2} \tag{4.10}$$

が成り立つ．ここで x は $(0,r)$ の任意の点である．さらに $s(r-)<\infty$ のとき $f(r-)$ が存在し，$s(r-)<\infty$, $m(r-)=\infty$ のとき $f(r-)=0$ である．

証明 $0 \leq x < y$ とする．

$$\begin{aligned}
|f(y)-f(x)| &\leq \left|\int_x^y \frac{df}{ds}(t)\,ds(t)\right| \\
&\leq \sqrt{\int_x^y |\frac{df}{ds}(t)|^2\,ds(t)}\sqrt{\int_x^y ds(t)} \\
&\leq \mathscr{E}(f,f)^{1/2}(s(y)-s(x))^{1/2}.
\end{aligned}$$

特に $|f(x)-f(0)| \leq \mathscr{E}(f,f)^{1/2}s(x)^{1/2}$ だから

$$\begin{aligned}
|f(0)|^2 m(x) &= \int_0^x |f(0)|^2\,dm(t) \\
&\leq \int_0^x \{|f(t)| + \mathscr{E}(f,f)^{1/2}s(t)^{1/2}\}^2\,dm(t) \\
&\leq \int_0^x \{|f(t)|^2 + 2|f(t)|\mathscr{E}(f,f)^{1/2}s(t)^{1/2} + \mathscr{E}(f,f)s(t)\}\,dm(t) \\
&\leq \|f\|_{L^2(dm)}^2 + 2\left\{\int_0^x |f(t)|^2\,dm(t)\right\}^{1/2}\left\{\int_0^x \mathscr{E}(f,f)s(t)\,dm(t)\right\}^{1/2} \\
&\quad + \int_0^x \mathscr{E}(f,f)s(t)\,dm(t) \\
&\leq \|f\|_{L^2(dm)}^2 + 2\|f\|_{L^2(dm)}\mathscr{E}(f,f)^{1/2}s(x)^{1/2}m(x)^{1/2} \\
&\quad + \mathscr{E}(f,f)s(x)m(x) \\
&\leq (\|f\|_{L^2(dm)} + \mathscr{E}(f,f)^{1/2}s(x)^{1/2}m(x)^{1/2})^2.
\end{aligned}$$

よって

$$|f(0)| \leq \frac{1}{m(x)^{1/2}}\|f\|_{L^2(dm)} + \mathscr{E}(f,f)^{1/2}s(x)^{1/2}$$

となり，求める結果 (4.10) が得られた．

$s(r-) < \infty$ のときは上の計算から $f(r-)$ が存在することが分かる．これに加えて $m(r-) = \infty$ を仮定すると，$f(r-) = 0$ が成り立つ．実際，もし $f(r-) \neq 0$ であれば，ある $c > 0$ と $r > N > 0$ が存在して，$x \geq N$ のとき $|f(x)| \geq c$ とできる．すると $f \in L^2(dm)$ から

$$\infty > \int_{(N,r)} |f(x)|^2 \, dm(x) \geq \int_{(N,r)} c^2 \, dm(x) = c^2(m(r-) - m(N))$$

となり，$m(r-) = \infty$ に矛盾する．よって $f(r-) = 0$ でなければならない． □

この命題 4.2から $\mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \ni f \mapsto f(0)$ が連続であることが分かる．

dm を ds に置き換えれば，双対的な概念が同様に定義される．$L^2(ds)$ に Dirichlet 形式 $\hat{\mathscr{E}}$ を次で導入する．$\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ を $\theta \in L^2(ds)$ で θ は m に関して微分可能であり，

$$\int_0^r \left(\frac{d\theta}{dm}\right)^2 dm < \infty \tag{4.11}$$

となる関数全体とする．さて，上の (4.11) が成り立つ関数たちに対して

$$\hat{\mathscr{E}}(f,g) = \int_0^r \frac{d\theta}{dm}\frac{d\eta}{dm}\, dm, \quad \theta, \eta \in \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}}) \tag{4.12}$$

で Dirichlet 形式を定める．また $\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ は次の内積 $\hat{\mathscr{E}}_1$ で Hilbert 空間になる．

$$\hat{\mathscr{E}}_1(\theta,\eta) = \hat{\mathscr{E}}(\theta,\eta) + (\theta,\eta)_{L^2(ds)} = \int_0^r \frac{d\theta}{dm}\frac{d\eta}{dm}\, dm + \int_0^r \theta\eta \, ds \tag{4.13}$$

命題 4.3. $\theta \in \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ に対し，次の不等式が成立する．

$$|\theta(0)| \leq \frac{1}{s(x)^{1/2}} \|f\|_{L^2(dm)} + \hat{\mathscr{E}}(f,f)^{1/2} m(x)^{1/2} \tag{4.14}$$

が成り立つ．ここで x は $(0,r)$ の任意の点である．さらに $m(r-) < \infty$ のとき $\theta(r-)$ が存在し，$m(r-) < \infty, s(r-) = \infty$ のとき $\theta(r-) = 0$ である．

部分積分の公式

双対性の基本になるのは次の部分積分の公式である．

命題 4.4. $f \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E}), \theta \in \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ に対し次の等式が成立する：

$$\int_x^y \frac{df}{ds}\theta \, ds = f(y)\theta(y) - f(x)\theta(x) - \int_x^y f\frac{d\theta}{dm}\, dm. \tag{4.15}$$

ここで $0 \leq x < y < r$ である．

証明 Fubini の定理を用いて

$$(f(y) - f(x))(\theta(y) - \theta(x))$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_x^y \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) \int_x^y \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) \\
&= \int_x^y \left\{ \int_x^y \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) \right\} \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) \\
&= \int_x^y \left\{ \int_x^u \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) \right\} \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) + \int_x^y \left\{ \int_u^y \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) \right\} \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) \\
&= \int_x^y \{\theta(u) - \theta(x)\} \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) + \int_x^y \left\{ \int_x^v \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) \right\} \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) \\
&= \int_x^y \theta(u) \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) - \int_x^y \theta(x) \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) + \int_x^y \{f(v) - f(x)\} \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) \\
&= \int_x^y \theta(u) \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) - \theta(x) \int_x^y \frac{df}{ds}(u)\,ds(u) + \int_x^y f(v) \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) - \int_x^y f(x) \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) \\
&= \int_x^y \frac{df}{ds}(u)\theta(u)\ \,ds(u) - (f(y) - f(x))\theta(x) \\
&\quad + \int_x^y f(v) \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) - f(x)(\theta(y) - \theta(x)).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\int_x^y \frac{df}{ds}(u)\theta(u)\,ds(u) + \int_x^y f(v) \frac{d\theta}{dm}\,dm(v) \\
&\qquad = (f(y) - f(x))(\theta(y) - \theta(x)) + (f(y) - f(x))\theta(x) + f(x)(\theta(y) - \theta(x)) \\
&\qquad = (f(y) - f(x))\theta(y) + f(x)(\theta(y) - \theta(x)) \\
&\qquad = f(y)\theta(y) - f(x)\theta(y) + f(x)\theta(y) - f(x)\theta(x) \\
&\qquad = f(y)\theta(y) - f(x)\theta(x).
\end{aligned}
$$

これで証明できた． □

上の関係は $\frac{d}{ds}$ と $-\frac{d}{dm}$ が双対的な関係にあることを示唆している．また関数 f, θ の可積分性は，(4.15) に意味がつけられるものに対して一般化できることは証明から明らかだろう．公式 (4.15) は適宜クラスを広げて使う．

微分が消える関数

命題 4.4の部分積分の公式はいたるところで使われることになるが，一つの応用として微分が消える関数というのを，超関数論でよくやるように双対的に特徴づけることができることを示す．記号を準備しておく．C_0 で台が $[0, r)$ のコンパクト集合に含まれる連続関数全体とする．この場合は 0 は台に含まれてもよい．また C_{00} で台が $(0, r)$ のコンパクト集合に含まれる連続関数全体とする．この場合は 0 は台に含まれてはいけない．C_0 は r の近傍で消えていて，C_{00} は 0 と r の両方の近傍で消えている．このとき次が成立する．

命題 4.5. $\theta \in L^2_{\mathrm{loc}}(ds)$ が次を満たしているとする．

$$
\int_0^r \frac{df}{ds}\theta\,ds = 0, \quad \forall f \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \cap C_{00}. \tag{4.16}
$$

このとき θ は $(0,r)$ 上で ds-a.e. で定数である．

証明 $0<a<b<c<d<r$ を任意にとる．f を次で定まる関数とする．

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le a,\\ \dfrac{s(x)-s(a)}{s(b)-s(a)}, & a<x\le b,\\ 1, & b<x\le c,\\ \dfrac{s(d)-s(x)}{s(d)-s(c)}, & c<x\le d,\\ 0, & d<x<r. \end{cases} \tag{4.17}$$

すると

$$\frac{df}{ds}(x)=\begin{cases} 0, & 0<x\le a,\\ \frac{1}{s(b)-s(a)}, & a<x\le b,\\ 0 & b<x\le c,\\ -\frac{1}{s(d)-s(c)}, & c<x\le d,\\ 0, & d<x\le r. \end{cases} \tag{4.18}$$

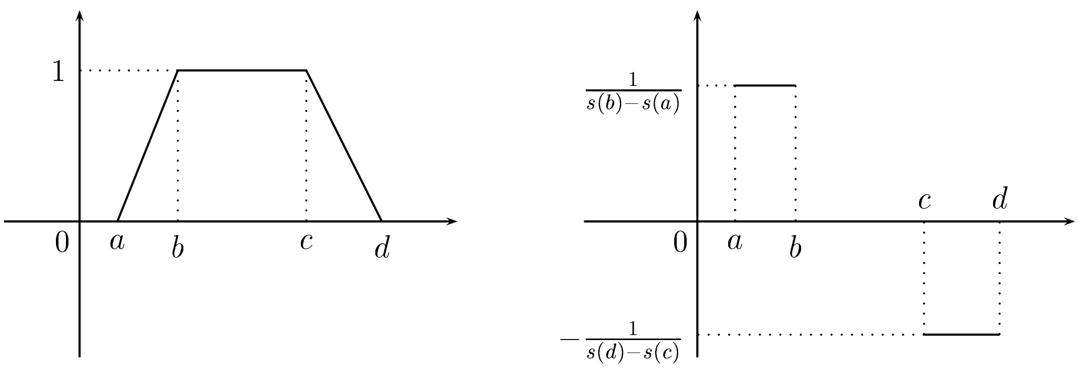


図 1: f と $\frac{df}{ds}$ のグラフ

ここで条件 (4.16) をこの関数 f に対して適用すると

$$\frac{1}{s(b)-s(a)}\int_a^b \theta\,ds=\frac{1}{s(d)-s(c)}\int_a^b \theta\,ds.$$

これから a, b, c, d を動かして，これらは全部同じ値になる．この値を k とすると，

$$\frac{1}{s(b)-s(a)}\int_a^b \theta\,ds=k$$

が任意の $a < b$ に ついて成立する．これを書き直すと

$$\int_a^b (\theta - k)\, ds = 0 \tag{4.19}$$

とできる．$a, b \in (0, r)$ は任意だから $(0, r)$ 上で $\theta = k$ ds-a.e. が従う． □

上のことを使って次が示せる．

命題 4.6. $\theta \in L^2(ds)$ に対し $g \in L^2(dm)$ が存在して次が成り立つとする．

$$\int_0^r \frac{df}{ds}\theta\, ds = \int_0^r fg\, dm, \quad \forall f \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \cap C_{00}. \tag{4.20}$$

このとき θ は m-微分可能で，$\frac{d\theta}{dm} = -g$ が成り立つ．

証明 $\eta \in L^2_{\mathrm{loc}}(ds)$ を次で定める．

$$\eta = \int_0^x g(y)\, dm(y). \tag{4.21}$$

η は m-微分可能で

$$\frac{d\eta}{dm} = g \tag{4.22}$$

が成り立つ．よって

$$\int_0^r \frac{df}{ds}\theta\, ds = \int_0^r fg\, dm = \int_0^r f\frac{d\eta}{dm}\, dm = -\int_0^r \frac{df}{ds}\eta\, ds. \qquad (\because\ \text{命題 } 4.4)$$

これから

$$\int_0^r \frac{df}{ds}(\theta + \eta)\, ds = 0$$

が成り立つ．よって 命題 4.5 から $\theta + \eta$ は定数となる．従って，m で微分して

$$\frac{d\theta}{dm} = -\frac{d\eta}{dm} = -g. \qquad (\because\ (4.22))$$

これが示すべきことである． □

正則でない境界の場合の部分積分の公式

命題 4.4 は言ってみれば両端 x, y が正則境界の場合である．境界が正則でない場合は境界の影響は消える．そのことを次に示す．そのためには次の命題が必要である．

命題 4.7. $s(r-) + m(r-) = \infty$ を仮定する．この時 $\mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \cap C_0$ は $\mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ で稠密である．また $\mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \cap C_{00}$ は $\mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \cap \{f : f(0) = 0\}$ で稠密である．

この命題の証明は Fukushima-Oshima-Takeda [8] p. 8, Example 1.2.2 にある．そちらを参照して欲しい．調和関数の r の近傍での可積分性の解析が必要となる．この命題を認めて，部分積分の公式を一般化する．

命題 4.8. $s(r-)+m(r-)=\infty$ を仮定する．$f\in \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$, $\theta\in\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ に対して

$$\int_0^r \frac{df}{ds}\theta\,ds = -f(0)\theta(0) - \int_0^r f\frac{d\theta}{dm}\,dm \tag{4.23}$$

が成り立つ．さらに $(f\theta)(r-)=\lim_{x\to r} f(x)\theta(x)=0$ が成り立つ．

証明 これは形式的には単なる部分積分の公式である．(4.23) のそれぞれの項に意味があるのは明らかである．さて，f,θ が上の条件を満たすとき，有限区間 $[0,t]$ での 部分積分の公式 (4.15) から

$$\int_0^t \frac{df}{ds}\theta\,ds = f(t)\theta(t) - f(0)\theta(0) - \int_0^t f\frac{d\theta}{dm}\,dm \tag{4.24}$$

が成り立つ．いま $f\in\mathrm{Dom}(\mathscr{E})\cap C_0$ を仮定すると t が十分大きいとき $f(t)\theta(t)=0$ である．よって $f\in\mathrm{Dom}(\mathscr{E})\cap C_0$ のときは $t\to r$ として

$$\int_0^r \frac{df}{ds}\theta\,ds = -f(0)\theta(0) - \int_0^r f\frac{d\theta}{dm}\,dm$$

が成り立つ．

さて $s(r-)+m(r-)=\infty$ を仮定しているから命題 4.7 が使え，$\mathrm{Dom}(\mathscr{E})\cap C_0$ は $\mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ で稠密である．よって極限を取ることにより，(4.23) が従う．また，(4.24) から $t\to r$ として

$$\lim_{t\to r} f(t)\theta(t) = f(0)\theta(0) + \int_0^r \frac{df}{ds}\theta\,ds + \int_0^r f\frac{d\theta}{dm}\,dm$$

となるので，ここで (4.23) が成り立つことを使えば右辺は 0 である．即ち $(f\theta)(r-)=0$ が得られた． □

以下では $m(r-)+s(r-)=\infty$ として r は正則ではないとする．即ち境界 0 が正則な場合を代表し，r が非正則な場合を代表する．その他の場合も部分的な修正で議論が進むことはほぼ明らかであろう．Dirichlet 形式 $\mathscr{E}$ を定義したが，境界条件を加味したものを考える．ここで考える境界条件は 0 での Dirichlet 境界条件と，Neumann 境界条件である．Dirichlet 境界条件を付けた Dirichlet 形式は

$$\mathscr{E}^{\mathrm{D}}=\mathscr{E},\quad \mathrm{Dom}(\mathscr{E}^{\mathrm{D}})=\mathrm{Dom}(\mathscr{E})\cap\{f;\, f(0)=0\} \tag{4.25}$$

で定め，Neumann 境界条件を付けた Dirichlet 形式は

$$\mathscr{E}^{\mathrm{N}}=\mathscr{E},\quad \mathrm{Dom}(\mathscr{E}^{\mathrm{N}})=\mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \tag{4.26}$$

で定める．これらを一般的に $\mathscr{E}^\sharp$ で表す．すなわち $\sharp = \mathrm{D}$ か $\sharp = \mathrm{N}$ である．対応して作用素 $T\colon L^2(dm) \to L^2(ds)$ を次のように定める．Dirichlet 境界条件の場合は

$$(4.27) \qquad Tf = \frac{df}{ds}, \quad f \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \cap \{f;\, f(0) = 0\}$$

であり，Neumann 境界条件の場合は

$$(4.28) \qquad Tf = \frac{df}{ds}, \quad f \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$$

である．ともに定義域が異なるだけである．これらは当然

$$(4.29) \qquad \mathscr{E}^\sharp(f, g) = (Tf, Tg)_{L^2(ds)}$$

を満たす．また対応する生成作用素は $-T^*T$ で表される．

従って T^* が分かれば生成作用素のこともわかることになる．

双対作用素

さて，この節の主題である双対作用素についてその特徴づけを述べる．

定理 4.9. $s(r-) + m(r-) = \infty$ を仮定する．共役作用素が次のように与えられる．

(I) Dirichlet 境界条件の場合．

双対写像 $T^*\colon L^2(ds) \to L^2(dm)$ は次で与えられる．

$$(4.30) \qquad T^* = -\frac{d}{dm}, \quad \mathrm{Dom}(T^*) = \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}}).$$

(II) Neumann 境界条件の場合．

双対写像 $T^*\colon L^2(ds) \to L^2(dm)$ は次で与えられる．

$$(4.31) \qquad T^* = -\frac{d}{dm}, \quad \mathrm{Dom}(T^*) = \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}}) \cap \{\theta;\, \theta(0) = 0\}.$$

証明 まず Dirichlet 境界条件の場合から考えよう．$\theta \in \mathrm{Dom}(T^*)$ で $T^*\theta = g$ とする．任意の $h \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \cap \{f;\, f = 0\}$ に対し

$$\begin{aligned}\int_0^r hg\, dm &= (h, g)_{L^2(dm)} = (h, T^*\theta)_{L^2(dm)} \\ &= (Th, \theta)_{L^2(ds)} = (\frac{dh}{ds}, \theta)_{L^2(ds)} = \int_0^r \frac{dh}{ds}\theta\, ds.\end{aligned}$$

ここで h が $(0, r)$ でコンパクト台のものを考えれば，命題 4.6 から $\theta \in \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ で $g = -\frac{d\theta}{dm}$ on $(0, r)$ が成り立つ．

逆に $\theta \in \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ ならば

$$\begin{aligned}(Th,\theta)_{L^2(ds)} &= (\frac{dh}{ds},\theta)_{L^2(ds)} \\ &= \int_0^r \frac{dh}{ds}\theta\,ds \\ &= -\int_0^r h\frac{d\theta}{dm}\,dm - h(0)\theta(0) \quad (\because \text{命題 } 4.8) \\ &= -\int_0^r h\frac{d\theta}{dm}\,dm\end{aligned}$$

が成り立つので，これは $\theta \in \mathrm{Dom}(T^*)$ で $T^*\theta = -\frac{d\theta}{dm}$ を意味する．

次に Neumann 境界条件の場合を扱う．$\theta \in \mathrm{Dom}(T^*)$ で $T^*\theta = g$ とする．任意の $h \in \mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ に対し

$$\begin{aligned}\int_0^r hg\,dm &= (h,g)_{L^2(dm)} = (h,T^*\theta)_{L^2(dm)} \\ &= (Th,\theta)_{L^2(ds)} = (\frac{dh}{ds},\theta)_{L^2(ds)} = \int_0^r \frac{dh}{ds}\theta\,ds.\end{aligned}$$

ここで h が $(0,r)$ でコンパクト台のものを考えれば，命題 4.6 から $\theta \in \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ で $g = -\frac{d\theta}{dm}$ on $(0,r)$ が成り立つ．

逆に $\theta \in \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}}) \cap \{\eta;\, \eta(0) = 0\}$ とすると，$h \in \mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ に対し

$$\begin{aligned}(Th,\theta)_{L^2(dm)} &= (\frac{dh}{ds},\theta)_{L^2(ds)} \\ &= \int_0^r \frac{dh}{ds}\theta\,ds \\ &= -\int_0^r h\frac{d\theta}{dm}\,dm - h(0)\theta(0) \quad (\text{命題 } 4.8) \\ &= -\int_0^r h\frac{d\theta}{dm}\,dm.\end{aligned}$$

これは $\theta \in \mathrm{Dom}(T^*)$ で $T^*\theta = -\frac{d\theta}{dm}$ を意味している．これですべての場合が示せた． □

$0, r$ ともに正則の場合は，Dirichlet 境界条件を $f(0) = 0$, $f(r) = 0$ の形でつけた T の双対は $T^* = -\frac{d}{dm}$ で $\mathrm{Dom}(T^*) = \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ である．Neumann 境界条件の場合は $\mathrm{Dom}(T^*) = \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}}) \cap \{\theta;\, \theta(0) = 0\} \cap \{\theta;\, \theta(r) = 0\}$ に変わる．両端とも正則でない場合は，境界条件は出てこない．これらも証明は同様にできるので個別には与えない．

さて，第 3節 の 命題 3.4，命題 3.5 で T^*T と TT^* は 0 を除いて同じスペクトルを持つことを注意した．従って今の場合は $\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$ と $\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ が 0 以外で同じスペクトルを持つことが分かった．また境界条件は $\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$ に Dirichlet 境界条件を課すときは $\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ は Neumann 境界条件が対応し，逆に $\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$ に Neumann 境界条件を課すときは $\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ は Dirichlet 境界条件が対応する．正則な場合は Dirichlet $\leftrightarrow$ Neumann の対応であるが，正則でない場合は

non-entrance $\leftrightarrow$ non-exit の対応になる．m と s の入れ替えで，これらの概念がちょうど入れ替わっているのはよく知られたことである．m や s は独自に確率論的な意味を持つ概念であるが，作用素を考えるときは対等の立場で対称に考えることが有効である．ここで得られた対応

$$\frac{d}{dm}\frac{d}{ds} \ \leftrightarrow \ \frac{d}{ds}\frac{d}{dm} \tag{4.32}$$

を Feller's pair と呼ぶことにする．

この節では Feller の枠組みでの話をしたが，次節で Stein の場合を論じる．

5. Stein の定式化

生成作用素は Feller の表示にしようと，Stein の表示にしようと，見かけの違いだけで本質は同じである．しかし，見かけの違いは対応をきちんと見ないと混乱を招きかねない．もう少し注意深く見ていくことにする．空間は簡単のため $[0,r)$ とする．0 は正則境界と仮定している．拡散過程を記述するのに，第 3節 で見たように二つの正値関数 a, ρ を基本にする．標準測度を

$$dm = \rho\, dx \tag{5.1}$$

とし，尺度関数も測度と考えて

$$ds = \frac{1}{a\rho}\, dx \tag{5.2}$$

で定めた．a, ρ はともに C^2 級を仮定する．Markov 過程を記述するのに Dirichlet 形式は有効な概念である．Markov 過程が決まれば，対応する Dirichlet 形式は一つに決まるが，Dirichlet 形式の表現の仕方は必ずしも一つではない．物は同じであるので，表現の違いは表面的なものでしかないように思える．しかし，いくつかの作用素の相互関係を考えるときは，表面的な違いが意味を持つようになってくる．それがこの論文の観点の一つでもある．さて， Feller の枠組みでは Dirichlet 形式 $\mathscr{E}$ の定義域の元 f は s で微分可能な関数として特徴づけられた．それを別の観点から特徴づけてみよう．基礎の空間は $L^2(dm)$ であることは変わらない．$dm = \rho\, dx$ であるので，$L^2(dm)$ の代わりに $L^2(\rho)$ とかく．密度関数で測度の代用とする．この略記法は 他の場合も流用する．

さて，0 は正則境界としたから $0 < \varepsilon < r$ に対して次が成り立つ．

$$\int_0^\varepsilon \rho\, dx < \infty, \quad \int_0^\varepsilon \frac{1}{a\rho}\, dx < \infty. \tag{5.3}$$

このことに注意して $\mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ の別の特徴づけを与えることができる．復習しておくと

$$\mathrm{Dom}(\mathscr{E}) = \{f \in L^2(dm);\, \frac{df}{ds} \in L^2(ds)\} \tag{5.4}$$

で

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_0^r \frac{df}{ds}\frac{dg}{ds}\, ds \tag{5.5}$$

であった．

命題 5.1. Dom($\mathscr{E}$) は次の様に特徴づけられる．

$$\mathrm{Dom}(\mathscr{E}) = \{f \in L^2(\rho);\ \ f \text{ は } [0,r) \text{ で絶対連続で } f' \in L^2(a\rho)\}. \tag{5.6}$$

このとき

$$\frac{d}{ds} = a\rho\frac{d}{dx} \tag{5.7}$$

であり

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_0^r f'g'a\rho\,dx \tag{5.8}$$

が成り立つ．

証明 $f \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ とするとき

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{df}{ds}\,ds = \int_0^x \frac{df}{ds}\frac{1}{a\rho}\,dx.$$

ここで

$$\int_0^x \left|\frac{df}{ds}\right|\frac{1}{\sqrt{a\rho}}\,dx = \int_0^x \left|\frac{df}{ds}\right|\frac{1}{\sqrt{a\rho}}\frac{1}{\sqrt{a\rho}}\,dx \le \left\{\int_0^x \left(\frac{df}{ds}\right)^2\frac{1}{a\rho}\,dx\right\}^{1/2}\left\{\int_0^x \frac{1}{a\rho}\,dx\right\}^{1/2} < \infty$$

よって，f は絶対連続で

$$f' = \frac{1}{a\rho}\frac{df}{ds} \tag{5.9}$$

が成り立つ．さらに

$$\begin{aligned}\int_0^r (f')^2 a\rho\,dx &= \int_0^r \left(\frac{df}{ds}\frac{1}{a\rho}\right)^2 a\rho\,dx = \int_0^r \left(\frac{df}{ds}\right)^2\frac{1}{(a\rho)^2}a\rho\,dx\\ &= \int_0^r \left(\frac{df}{ds}\right)^2\frac{1}{a\rho}\,dx = \int_0^r \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds < \infty.\end{aligned}$$

即ち $f' \in L^2(a\rho)$ である．

逆に $f \in L^2(\rho)$ が $[0,r)$ で絶対連続で $f' \in L^2(a\rho)$ のとき

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'\,dy = \int_0^x f'a\rho\frac{1}{a\rho}\,dy = \int_0^x a\rho f'\,ds(y).$$

さらに

$$\int_0^r (a\rho f')^2\,ds(y) = \int_0^r (f')^2(a\rho)^2\frac{1}{a\rho}\,dy = \int_0^r (f')^2 a\rho\,dy < \infty.$$

これで $\frac{df}{ds} = a\rho f'$ で $\frac{df}{ds} \in L^2(ds)$ が成り立つ事が示せた．また (5.8) も (5.5) を使えば明らかである． □

同様に $\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ も特徴づけることができる．復習しておくと

$$\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}}) = \{\theta \in L^2(ds);\ \frac{d\theta}{dm} \in L^2(dm)\} \tag{5.10}$$

で

$$\hat{\mathscr{E}}(\theta, \eta) = \int_0^r \frac{d\theta}{dm}\frac{d\eta}{dm}\, dm \tag{5.11}$$

であった．

命題 5.2. $\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ は次の様に特徴づけられる．

$$\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}}) = \{\theta \in L^2(1/(a\rho));\ \theta \text{ は } [0,r) \text{ で絶対連続で } \frac{\theta'}{\rho} \in L^2(\rho)\}. \tag{5.12}$$

このとき

$$\frac{d}{dm} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx} \tag{5.13}$$

であり

$$\hat{\mathscr{E}}(\theta, \eta) = \int_0^r \theta'\eta'\frac{1}{\rho}\, dx \tag{5.14}$$

が成り立つ．

証明 $\theta \in \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ とするとき

$$\theta(x) - \theta(0) = \int_0^x \frac{d\theta}{dm}\, dm = \int_0^x \frac{d\theta}{dm}\rho\, dx.$$

ここで

$$\int_0^x \Big|\frac{d\theta}{dm}\Big|\rho\, dx = \int_0^x \Big|\frac{d\theta}{dm}\Big|\sqrt{\rho}\sqrt{\rho}\, dx \le \left\{\int_0^x \left(\frac{d\theta}{dm}\right)^2 \rho\, dx\right\}^{1/2} \left\{\int_0^x \rho\, dx\right\} < \infty.$$

よって，θ は絶対連続で

$$\theta' = \rho\frac{d\theta}{dm} \tag{5.15}$$

が成り立つ．よって

$$\frac{\theta'}{\rho} = \frac{d\theta}{dm} \in L^2(dm) = L^2(\rho).$$

逆に $\theta \in L^2(\frac{1}{a\rho})$ が $[0,r)$ で絶対連続で $\theta' \in L^2(\frac{1}{\rho})$ のとき

$$\theta(x) - \theta(0) = \int_0^x \theta'\, dy = \int_0^x \theta'\frac{1}{\rho}\rho\, dy = \int_0^x \frac{1}{\rho}\theta'\, dm(y).$$

さらに

$$\int_0^r \left(\frac{1}{\rho}\theta'\right)^2 dm(y) = \int_0^r (\theta')^2 \frac{1}{\rho^2}\rho\, dy = \int_0^r (\theta')^2 \frac{1}{\rho}\, dy < \infty.$$

これで $\frac{d\theta}{dm} = \frac{1}{\rho}f'$ で $\frac{d\theta}{dm} \in L^2(dm)$ が成り立つ事が示せた．また (5.14) も (5.11) を使えば明らかである． □

(5.11) も (5.14) も，Dirichlet 形式としては同じものを定義しているが，表面的には違って見える．

さて $\frac{d}{ds} = a\rho\frac{d}{dx}$ と $\frac{d}{dx}$ の関係を考えてみよう．但し二つの作用素は

$$\frac{d}{ds} \colon L^2(\rho) \to L^2(1/(a\rho))$$

および

$$\frac{d}{dx} \colon L^2(\rho) \to L^2(a\rho)$$

で考えている．以下簡単のために

$$D = \frac{d}{dx} \tag{5.16}$$

と表す．D は $L^2(\rho)$ から $L^2(a\rho)$ への作用素である．また最初は $\mathrm{Dom}(D) = \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ としておく．即ち 0 に Neumann 境界条件を与えておく．

これらは本質的に同じ作用素と考えられる．二つを結ぶのが次のユニタリー作用素である．

$$U\theta = a\rho\theta \tag{5.17}$$

但し $U \colon L^2(a\rho) \to L^2(1/(a\rho))$ と見ている．逆作用素は

$$U^{-1}\theta = \frac{\theta}{a\rho} \tag{5.18}$$

である．U がユニタリーであることは

$$\int_0^r (U\theta)^2 (a\rho)^{-1} dx = \int_0^r a^2\rho^2\theta^2 (a\rho)^{-1} dx = \int_0^r \theta^2 a\rho dx$$

から分かる．次の命題はこれらの定義からほぼ明らかであろう．

命題 5.3. $\mathrm{Dom}(D) = \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ とする．このとき $\frac{d}{ds} = UD$ が成り立つ．また共役に対して $(\frac{d}{ds})^* U = D^*$ が成り立ち

$$D^* = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho. \tag{5.19}$$

さらに次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(D^*) = \{\theta \in L^2(a\rho);\ & a\rho\theta \text{ は } [0,r) \text{ で絶対連続で} \\ & (a\rho\theta)(0+) = 0 \text{ かつ } \frac{1}{\rho}(a\rho\theta)' \in L^2(\rho)\}.\end{aligned} \tag{5.20}$$

証明 $\frac{d}{ds} = UD$ は (5.7) で示した．これは単に見方を変えているだけ．

$$f(x) - f(0) = \int_0^r f'(y)\, dy = \int_0^r a(y)\rho(y) f'(y)\, ds$$

最初の式が D を表し，2 番目のものが $\frac{d}{ds}$ を表す．

共役に関しては，例えば $\theta \in \mathrm{Dom}(D^*)$ のとき，$f \in \mathrm{Dom}(\frac{d}{ds})$ に対して

$$(f, D^*\theta) = (Df, \theta) = (UDf, U\theta) = (\frac{d}{ds}f, U\theta)$$

これは $U\theta \in \mathrm{Dom}((\frac{d}{ds})^*)$ で $(\frac{d}{ds})^* U\theta = D^*\theta$ であることを意味している．さらに $U\theta \in \mathrm{Dom}((\frac{d}{ds})^*)$ ならば，$f \in \mathrm{Dom}(\frac{d}{ds}) = \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ に対して

$$(f, (\frac{d}{ds})^* U\theta) = (\frac{d}{ds}f, U\theta) = (UDf, U\theta) = (Df, \theta).$$

これは $\theta \in \mathrm{Dom}(D^*)$ で $D^*\theta = (\frac{d}{ds})^* U\theta$ を意味している．ここで $\left(\dfrac{d}{ds}\right)^* = -\dfrac{d}{dm} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dx}$ は (5.13) で示した．従って

$$D^* = \left(\frac{d}{ds}\right)^* U = \left(\frac{d}{ds}\right)^* a\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx} a\rho.$$

これは (5.19) を示している．

上のことから $\theta \in \mathrm{Dom}(D^*)$ であるための必要十分条件は $a\rho\theta \in \mathrm{Dom}((\frac{d}{ds})^*)$ で，今は Neumann 境界条件を課しているから定理 4.9 から $\mathrm{Dom}((\frac{d}{ds})^*) = \mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}}) \cap \{\eta; \eta(0) = 0\}$ であるから $a\rho\theta(0+) = 0$ かつ $\frac{d}{dm}(a\rho\theta) = \frac{1}{\rho}(a\rho\theta)' \in L^2(dm) = L^2(\rho)$. これですべてが示せた． □

$(a\rho\theta)(0) = 0$ ではなく $(a\rho\theta)(0+) = 0$ と表記したのは，$a(0) = 0$ や $\rho(0) = 0$ の場合もありうるので，誤解を避けるためにこのような表記にした．$\theta(0+) = \infty$ の可能性もあり得る．

結局，上のことは次の図式が可換であることを示している．

$$\begin{tikzcd}
 & L^2(a\rho) \arrow[d, "U\theta = a\rho\,\theta"] \arrow[dr, "D^* = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho"] & \\
L^2(\rho) \arrow[ur, "D = \frac{d}{dx}"] \arrow[r, "\frac{d}{ds} = a\rho\frac{d}{dx}"'] & L^2(1/(a\rho)) \arrow[r, "\left(\frac{d}{ds}\right)^* = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{dx}"'] & L^2(\rho)
\end{tikzcd}$$

図 2: D と $\frac{d}{ds}$ の同値性

さて，今までは $\mathrm{Dom}(D) = \mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ と Neumann 境界条件で考えたが，Dirichlet の場合も全く同じで次のように書き換えられる．

命題 5.4. $\mathrm{Dom}(D) = \mathrm{Dom}(\mathscr{E}) \cap \{f;\ f(0) = 0\}$ とする．このとき $\frac{d}{ds} = UD$ が成り立つ．また共役に対して $(\frac{d}{ds})^* U = D^*$ が成り立ち

$$D^* = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx} a\rho. \tag{5.21}$$

さらに次が成り立つ．

$$\mathrm{Dom}(D^*) = \{\theta \in L^2(a\rho);\ a\rho\theta \text{ は } [0, r) \text{ で絶対連続でかつ } \frac{1}{\rho}(a\rho\theta)' \in L^2(\rho)\}. \tag{5.22}$$

以上のことから D を調べるには結局 $\frac{d}{ds}$ を調べ，U で戻してやればよいことが分かる．従ってことさらに D を詳しく調べる必要はない．

D の境界条件をどちらにするにしても，$\mathrm{Dom}(D^*)$ の元 θ に対しては，$a\rho\theta$ が絶対連続ということで，θ 自身の境界 0 での連続性や，微分可能性はよく分からない．0 を除いて $(0, r)$ で考えれば θ の絶対連続性が言えて

$$\begin{aligned} -D^*\theta &= \frac{1}{\rho}(a\rho\theta)' \\ &= \frac{1}{\rho}((a\rho)'\theta + a\rho\theta') \\ &= \frac{1}{\rho}(b\rho\theta + a\rho\theta') \quad (\because\ (3.10)) \\ &= a\theta' + b\theta. \end{aligned}$$

形式的には (3.17) の

$$D^* = \Big(\frac{d}{dx}\Big)^* = -\Big(a\frac{d}{dx} + b\Big) \tag{5.23}$$

が示せ，生成作用素 $\mathfrak{A}$ が

$$\mathfrak{A} = -\Big(\frac{d}{dx}\Big)^* \frac{d}{dx} = \Big(a\frac{d}{dx} + b\Big)\frac{d}{dx}$$

の形に分解できること，すなわち (3.12) が証明できたことになる．

さて，上のことに注意すると，実は D^* と $-\frac{d}{dm}$ が同値となり，これらを組み合わせれば DD^* と $-\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ が同値であることが分かる．定理として述べておこう．

定理 5.5. DD^* と $-\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ はユニタリー同値である．即ち次が成り立つ

$$DD^* = -U^{-1}\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}U, \quad -\frac{d}{ds}\frac{d}{dm} = UDD^*U^{-1}. \tag{5.24}$$

証明 これは，次の図式の可換性から明らかである．

□

命題 3.4 から D^*D と DD^* は 0 を除いて同じスペクトルを持つ．DD^* に対応する双線型形式は

$$(\theta, \eta) \mapsto (D^*\theta, D^*\eta)_{L^2(a\rho)}$$

である．数学的にはこれで充分であるが，対応する生成作用素の表現を見てみよう．

$$\begin{tikzcd}
L^2(a\rho) \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, "D^*"] & & L^2(a\rho) \arrow[d, "U"] \\
L^2(1/(a\rho)) \arrow[r, "-\frac{d}{dm}"'] & L^2(\rho) \arrow[ur, "D"] \arrow[r, "\frac{d}{ds}"'] & L^2(1/(a\rho))
\end{tikzcd}$$

図 3: Doob の h-変換

$-DD^*$ の表現

(5.23) から

$$\begin{aligned}
-DD^* &= \frac{d}{dx}(a\frac{d}{dx}+b) \\
&= a\frac{d^2}{dx^2} + a'\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dx} + b' \\
&= a\frac{d^2}{dx^2} + (a'+b)\frac{d}{dx} + b'
\end{aligned}$$

である．別の表現を与えるために，次のような計算をする．作用素として計算して

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a\rho}\frac{d}{dx}a^2\rho &= \frac{1}{a\rho}\frac{d}{dx}aa\rho \\
&= \frac{1}{a\rho}a'a\rho + \frac{1}{a\rho}a(a\rho)' + \frac{1}{a\rho}aa\rho\frac{d}{dx} \\
&= a' + \frac{1}{\rho}b\rho + a\frac{d}{dx} \quad (\because \ (3.10)) \\
&= a\frac{d}{dx} + a' + b \\
&= \frac{d}{dx}a + b.
\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}
-DD^* &= \frac{d}{dx}(a\frac{d}{dx}+b) \\
&= \frac{d}{dx}a\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}b \\
&= \frac{d}{dx}a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dx} + b' \\
&= (\frac{d}{dx}a+b)\frac{d}{dx} + b' \\
&= \frac{1}{a\rho}\frac{d}{dx}a^2\rho\frac{d}{dx} + b'
\end{aligned}$$

$$= \mathfrak{A}_{a\rho} + b'$$

ここで，(3.7) の表記に従って，$\mathfrak{A}_{a\rho}$ は $(a, a\rho)$ に対する生成作用素を表している．纏めると

$$-DD^* = a\frac{d^2}{dx^2} + (a' + b)\frac{d}{dx} + b' = \frac{1}{a\rho}\frac{d}{dx}a^2\rho\frac{d}{dx} + b'. \tag{5.25}$$

これで次の二つの作用素の組が構成できた．

$$-D^*D \ \leftrightarrow \ -DD^*. \tag{5.26}$$

この pair を **Stein's pair** と呼ぶことにする．Feller's pair と同じく，0 以外でスペクトルが同じという特徴を持っている．

さて，今まで Kolmogorov 拡散過程の枠を離れて，a, ρ には特に制約をつけてこなかった．ここで，a が 2 次式で，b が 1 次式の場合を考えてみよう．すると $a' + b$ は 1 次式で，b' は定数である．従って $-DD^*$ は Kolmogorov 拡散過程の生成作用素と定数差しか違わない．同じ範疇に入っていると言ってよいだろう．Kolmogorov 拡散過程のクラスは，Stein's pair で閉じていると言うことができる．命題 3.1 の後で述べたことは，Kolmogorov 拡散過程のクラスが Feller's pair で閉じているということを示している．Kolmogorov 拡散過程は，係数が多項式で単純な形をしているということもあるが，こうした不変性を持つという意味で自然なクラスでもある．もう一つ加えるなら，多項式を固有関数に持つ作用素を考えると，Kolmogorov 拡散過程は自然に思いつくクラスである．微分作用素が次数を下げ，多項式の掛け算が次数を上げる．そのバランスが取れているのが Kolmogorov 拡散過程の生成作用素なのである．これらの特性を利用して，スペクトルを完全に決定することができるというのも Kolmogorov 拡散過程の特徴で，それが後半の主題になる．

上の計算は同じことを計算しているにすぎないが，微分作用素としての形だけに注目して，定義域のことを無視している．境界条件のことを考えていない，と言ってもよい．もう少し説明すると，D も D^* も厳密に定義したのであるから $-DD^*$ の作用素としての定義に何の曖昧さもない．ただ，(5.25) の形で $\mathfrak{A}_{a\rho}$ を使って表すと，これはこれ自体で意味のあるものである．拡散作用素なので，境界が正則のときには境界条件を指定しないと作用素として定まらない．境界が非正則の場合はそのことは気にしなくてよくなるが．いずれにしても，生成作用素は直接的には扱いにくい．それは定義域をきちんと言い難いことによる．双線型形式で定式化する方が明快である．

Neumann 境界条件のある場合

さて，(5.25) を見ると，$\hat{\mathfrak{A}}$ は拡散作用素 $a\theta'' + (a' + b)\theta'$ にポテンシャル項 $b'\theta$ が加わったように思える．$\mathfrak{A}_{a\rho}$ を $L^2(a\rho)$ で考えるとき，それぞれ標準測度と尺度関数は

$$m^{(1)}(x) = \int_c^x a(y)\rho(y)\,dy \tag{5.27}$$

$$s^{(1)}(x) = \int_c^x \frac{1}{a^2(y)\rho(y)}\,dy. \tag{5.28}$$

を考えることになる．この場合は 0 はもはや正則であるという保証はない．また r も正則に変わる可能性もある．そこで積分の起点として $c\in(0,r)$ をとっている．(5.25) の形から次の双線型形式を考える．

$$\mathscr{E}^{(1)}(\theta,\eta)=\int_0^r\theta'\eta'a^2\rho\,dx+\int_0^r\theta\eta b'a\rho\,dx. \tag{5.29}$$

以下では D には Neumann 条件を課して考える．即ち $\mathrm{Dom}(D)=\mathrm{Dom}(\mathscr{E})$ を仮定する．このとき $L^2(1/a\rho)$ での $\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ は Dirichlet 条件を考えることになる．即ち $\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})\cap C_{00}$ が $\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})$ で稠密になる．これを U^{-1} で $L^2(a\rho)$ に移すと C_{00} の元であることは保存される．従って

$$U^{-1}(\mathrm{Dom}(\hat{\mathscr{E}})\cap C_{00})=\mathrm{Dom}(D^*)\cap C_{00}$$

が成立し， $\mathrm{Dom}(D^*)\cap C_{00}$ は $\mathrm{Dom}(D^*)$ で稠密になる．$\mathrm{Dom}(D^*)$ は 命題 5.3 で与えたので

$$\mathrm{Dom}(D^*)\cap C_{00}=\{\theta;\ \ \theta \text{ は } (0,r) \text{ で絶対連続で } \theta'\in L^2(a^2\rho)\}\cap C_{00}$$

の表示も可能である．以下では C_{00} の元に対して計算を進めたので十分であることを意味している．次の定理はこのことを利用する．

定理 5.6. $s(\infty)+m(\infty)=\infty$ と a, ρ が $(0,\infty)$ で C^2-級であることを仮定する．さらに D には Neuman 条件を課す．このとき $L^2(a\rho)$ において DD^* に対応する双線型形式は $\mathrm{Dom}(D^*)\cap C_{00}$ 上の $\mathscr{E}^{(1)}$ の閉包である．

証明 $-D^*D$ に対応する双線型形式は $(D^*\theta,D^*\eta)_\nu$ である．以下 θ, η は，support がコンパクトであると仮定する．すると，(5.23) から部分積分の公式を使って

$$\begin{aligned}
(D^*\theta,D^*\eta)_{dm}&=\int_0^r(a\theta'+b\theta)(a\theta'+b\theta)\rho\,dx\\
&=\int_0^r(a^2\theta'\eta'+ab(\theta'\eta+\theta\eta')+b^2\theta\eta)\rho\,dx\\
&=\int_0^r(a^2\theta'\eta'+ab(\theta\eta)'+b^2\theta\eta)\rho\,dx\\
&=\int_0^r\{(a^2\theta'\eta'+b^2\theta\eta)\rho+ab\rho(\theta\eta)'\}\,dx\\
&=\int_0^r\{(a^2\theta'\eta'+b^2\theta\eta)\rho-(ab\rho)'\theta\eta\}\,dx\quad\text{(integration by parts)}\\
&=\int_0^r\{(a^2\theta'\eta'+b^2\theta\eta)\rho-((a\rho)'b+a\rho b')\theta\eta\}\,dx\\
&=\int_0^r\{(a^2\theta'\eta'+b^2\theta\eta)\rho-(b\rho b+a\rho b')\theta\eta\}\,dx\quad(\because\ (3.10))\\
&=\int_0^r\{\theta'\eta'a^2\rho-\theta\eta b'a\rho\}\,dx\\
&=\mathscr{E}^{(1)}(\theta,\eta).
\end{aligned}$$

この等式は $\mathrm{Dom}(D^*)\cap C_{00}$ の元に対して成り立つが，$\mathrm{Dom}(D^*)\cap C_{00}$ は $\mathrm{Dom}(D^*)$ で稠密であるから $\mathrm{Dom}(D^*)$ の元に対して成り立つ． □

$\mathscr{E}^{(1)}$ の閉包を考えるとき，b' が有界ならば，この定義域は $\mathfrak{A}_{a\rho}$ に対応する Dirichlet 形式

$$(\theta,\eta)\mapsto\int_0^r\theta'\eta'a^2\rho\,dx \tag{5.30}$$

の定義域と一致する．ただし，境界が正則の場合は Dirichlet 境界条件を課す．

さて， DD^* と D^*D は 0 以外では同じスペクトルを持つ．このことを使えば次のことが得られる．

系 5.7. D に Neumann 境界条件を仮定する．このとき $-b'\geq\gamma>0$ ならば D^*D は $(0,\gamma)$ にスペクトルを持たない．

証明 これは $\mathscr{E}^{(1)}$ の形から，$-b'\geq\gamma>0$ の条件から DD^* が γ 以上のスペクトルを持つことが分かる．後は DD^* と D^*D は 0 以外では同じスペクトルを持つので明らかである． □

D^*D の固有値 0 の固有関数となりうるのは，定数関数だけであるので，dm が有限測度であることが必要十分条件である．このとき D^*D は 0 をスペクトルに持ち，従ってスペクトルギャップの存在を言っている．単純な判定条件であるが，最善の結果を与える場合もあるので，そう悪い評価ではないだろう．

Doob の h-変換

さて，定理 5.5 で DD^* と $-\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ が同値となることを示したが，この同値性は Doob の h-変換と呼ばれるものである．その理由を確認しておこう．次のことを示す．

- $\frac{1}{a\rho}$ は DD^*-調和である．
- $a\rho$ は $\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}-b'$ 調和である．

すると，正値調和関数で変換しているので，Doob の h-変換と呼ぶにふさわしいことが分かる．

まず $\frac{1}{a\rho}$ を考えよう．$D^*=-\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho$ なので

$$D^*\Big(\frac{1}{a\rho}\Big)=-\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(a\rho\frac{1}{a\rho})=0.$$

これから $\frac{1}{a\rho}$ は DD^*-調和になる．

また $\frac{d}{dm}=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}$ なので，(3.10) に注意して

$$\frac{d}{dm}(a\rho)=\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}(a\rho)=\frac{1}{\rho}(a\rho)'=\frac{1}{\rho}b\rho=b$$

さらに

$$\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}(a\rho)=\frac{d}{ds}b=a\rho\frac{d}{dx}b=b'a\rho$$

結局

$$\Big(\frac{d}{ds}\frac{d}{dm} - b'\Big)(a\rho) = 0$$

でこれが示すべきことであった．

また同値性は，次のようにしても容易にわかる．

$$-DD^* = \frac{d}{dx}\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho = \frac{1}{a\rho}(a\rho\frac{d}{dx})(\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx})a\rho = \frac{1}{a\rho}\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}a\rho$$

および

$$\frac{d}{ds}\frac{d}{dm} = a\rho\frac{d}{dx}\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx} = a\rho\frac{d}{dx}(\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}a\rho)\frac{1}{a\rho} = -a\rho DD^*\frac{1}{a\rho}.$$

$\frac{1}{a\rho}$ は DD^*-調和であることを述べたが，もう少し $\mathfrak{A}$ に直接関係する形で述べよう．$\mathfrak{A}u = au'' + bu'$ であった．このとき $\varphi = \rho^{-1}$ とおくと

$$\mathfrak{A}\varphi := a\varphi'' + b\varphi' = (a'' - b')\varphi \tag{5.31}$$

が成り立つ．このことを示そう．定義から $1 = \rho\varphi$ なので $a = a\rho\varphi$. 両辺微分して

$$\begin{aligned} a' &= (a\rho)'\varphi + a\rho\varphi' \\ &= b\rho\varphi + a\rho\varphi' \quad (\because\ (3.10)) \\ &= b + a\rho\varphi'. \quad (\because \rho\varphi = 1) \end{aligned}$$

よって両辺に φ をかけて $\rho\varphi = 1$ を使うと

$$a\varphi' = (a' - b)\varphi. \tag{5.32}$$

両辺を微分して

$$a'\varphi' + a\varphi'' = (a'' - b')\varphi + (a' - b)\varphi'.$$

これから

$$a\varphi'' + b\varphi' = (a'' - b')\varphi$$

が得られて，これが求める結果 (5.31) である．

$b = a' + a(\log\rho)'$ であったから

$$\begin{aligned} a' - b &= -a(\log\rho)' \\ a'' - b' &= -(a(\log\rho)')' \end{aligned}$$

から $a'' - b'$ の代わりに，$-(a(\log\rho)')'$ と表してもよい．これは a と ρ だけで直接的に表していることになる．

上の結果は ρ^{-1} が $\mathfrak{A}-(a''-b')$-調和であることを示しているから，これに対する Doob の h-変換が考えられる．スペクトルを求めるとき，ユニタリー同値なものは有用で，後の議論でもしばしば用いる．Doob の h-変換がどうなるか計算しておこう．

$L^2(\rho^{-1}\,dx)$ の作用素 $\tilde{\mathfrak{A}}$ を

$$\tilde{\mathfrak{A}} = a\frac{d^2}{dx^2} + (2a'-b)\frac{d}{dx} + (a''-b') \tag{5.33}$$

と定める．$\mathfrak{A}$ は 2 階の作用素なので，簡単な計算から

$$\mathfrak{A}(fg) = (\mathfrak{A}f)g + f\mathfrak{A}g + 2af'g' \tag{5.34}$$

が成り立つ．この関係は以後よく使う．(5.31) から

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(\varphi f) &= (\mathfrak{A}\varphi)f + \varphi\mathfrak{A}f + 2a\varphi' f' \\
&= (a''-b')\varphi f + \varphi\mathfrak{A}f + 2(a'-b)\varphi f' \quad (\because\ (5.32)) \\
&= (a''-b')\varphi f + \varphi(af'' + (b+2a'-2b)f') \\
&= (a''-b')\varphi f + \varphi(af'' + (2a'-b)f') \\
&= \varphi\{af'' + (2a'-b)f' + (a''-b')f\}.
\end{aligned}$$

よって $\tilde{\mathfrak{A}}$ を (5.33) で定めたから $\mathfrak{A}\varphi = \varphi\tilde{\mathfrak{A}}$ が成り立つ．$J\colon L^2(I;\rho^{-1}\,dx) \to L^2(I;\rho\,dx)$ を

$$Jf = \varphi f \tag{5.35}$$

と定めると

$$\int_I (Jf)^2\rho\,dx = \int_I f^2\rho^{-2}\rho\,dx = \int_I f^2\rho^{-1}\,dx$$

なので J はユニタリー作用素である．よって次の図式が可換になる．

$$\begin{array}{ccc}
L^2(I;\rho\,dx) & \xrightarrow{\ \mathfrak{A}\ } & L^2(I;\rho\,dx) \\
{\scriptstyle J}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle J} \\
L^2(I;\rho^{-1}\,dx) & \xrightarrow{\ \tilde{\mathfrak{A}}\ } & L^2(I;\rho^{-1}\,dx)
\end{array} \tag{5.36}$$

これから $\mathfrak{A}$ と $\tilde{\mathfrak{A}}$ は同じスペクトルを持つことが分かる．

上の計算は生成作用素の計算で，形式的なものである．直感的にはそのほうが分かりやすい面もあるが，生成作用素は定義域を明確に述べないと作用素として定まらないので，一般的には議論が複雑になる．そこで双線型形式を用いて，数学的に厳密な定式化を与えよう．

さて，我々の基本の $L^2(\rho)$ における Dirichlet 形式は

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_0^r f'g'a\rho\,dx \tag{5.37}$$

であった．更に $\tilde{\mathfrak{A}}$ に対応する双線型形式を

$$\mathscr{E}^{(1)}(f,g) = \int_0^r f'g'\frac{a}{\rho}\,dx + \int_0^r fg(b'-a'')\frac{1}{\rho}\,dx \tag{5.38}$$

で定める．これらが意味を持つために，定義域を

$$\mathscr{D} = \{f \in C_{00};\ f \text{ は絶対連続で } f' \in L^2((0,r);dx)\} \tag{5.39}$$

としておく．$\mathscr{D}$ は (5.35) で定まる J の作用で不変であることに注意しよう．このとき次を得る．$\mathscr{E}$ を $\mathscr{D}$ に制限したものの閉包は，Dirichlet 境界条件を与えたものになる．以上の準備で次を得る．

定理 5.8. $L^2(\rho^{-1}\,dx)$ の作用素 $\tilde{\mathfrak{A}}$ を $(\mathscr{E}^{(1)},\mathscr{D})$ の閉包に対応する作用素とする．このとき $\tilde{\mathfrak{A}}$ は $\mathfrak{A}$ と同じスペクトルを持つ．また f を $\mathfrak{A}$ の固有関数とすると (ただし固有値 0 の場合を除く) f' は $\tilde{\mathfrak{A}}$ の固有関数になる．逆に θ を $\tilde{\mathfrak{A}}$ の固有関数とすると (ただし固有値 0 の場合を除く) $D^*\theta$ は $\mathfrak{A}$ の固有関数である．

証明 $\mathscr{E}$ が J でどのように変換されるかが問題である．

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(Jf,Jg) &= \int_0^r (Jf)'(Jg)'a\rho\,dx \\
&= \int_0^r (\frac{f}{\rho})'(\frac{g}{\rho})'a\rho\,dx \\
&= \int_0^r \frac{f'\rho - f\rho'}{\rho^2}\frac{g'\rho - g\rho'}{\rho^2}a\rho\,dx \\
&= \int_0^r (f' - f(\log\rho)')(g' - g(\log\rho)')\frac{a}{\rho}\,dx \\
&= \int_0^r f'g'\frac{a}{\rho}\,dx - \int_0^r (f'g + fg')(\log\rho)'\frac{a}{\rho}\,dx + \int_0^r fg((\log\rho)')^2\frac{a}{\rho}\,dx \\
&= \int_0^r f'g'\frac{a}{\rho}\,dx - \int_0^r (fg)'a(\log\rho)'\frac{1}{\rho}\,dx + \int_0^r fg((\log\rho)')^2\frac{a}{\rho}\,dx \\
&= \int_0^r f'g'\frac{a}{\rho}\,dx - \int_0^r (fg)'(b-a')\frac{1}{\rho}\,dx + \int_0^r fg((\log\rho)')^2\frac{a}{\rho}\,dx \\
&= \int_0^r f'g'\frac{a}{\rho}\,dx - fg\frac{(b-a')}{\rho}\bigg|_0^r + \int_0^r fg(b-a')'\frac{1}{\rho}\,dx - \int_0^r fg(b-a')\frac{\rho'}{\rho^2}\,dx \\
&\quad + \int_0^r fg((\log\rho)')^2\frac{a}{\rho}\,dx \\
&= \int_0^r f'g'\frac{a}{\rho}\,dx - fg\frac{(b-a')}{\rho}\bigg|_0^r + \int_0^r fg(b-a')'\frac{1}{\rho}\,dx - \int_0^r fga(\log\rho)'(\log\rho)'\frac{1}{\rho}\,dx \\
&\quad + \int_0^r fg((\log\rho)')^2\frac{a}{\rho}\,dx \\
&= \int_0^r f'g'\frac{a}{\rho}\,dx + \int_0^r fg(b'-a'')\frac{1}{\rho}\,dx - fg\frac{(b-a')}{\rho}\bigg|_0^r.
\end{aligned}$$

境界の影響が見えるように残してあるが，f, g が C_{00} の元であれば，境界の影響は消える．従って少なくとも C_{00} 上では $\mathscr{E}$ と $\mathscr{E}^{(1)}$ は J で移りあう．C_{00} に制限したものの閉包の上で一致することになる．この同値性から二つの対応する生成作用素は同じスペクトルを持つことが示せたことになる． □

$\mathscr{E}^{(1)}$ の $\int_0^r f'g'\frac{a}{\rho}\,dx$ の部分は (a,ρ^{-1}) の場合の Dirichlet 形式である．特に $b'-a''$ が有界であれば，(a,ρ^{-1}) に対応する Dirichlet 形式 $\mathscr{E}_{1/\rho}$ と定義域は同じである．C_{00} で近似したので，境界条件が必要な場合は Dirichlet 境界条件で考えていることになる．

Notes

- 特になし．

6. ユニタリー同値な作用素

拡散作用素の生成作用素は，unitary 同値ないくつかの表現がある．変換した場合の方がスペクトルの情報が調べやすいものもある．そのための一般的な枠組みでの計算をここでしておく．ここでは双線型形式での表現を主に扱う．

拡散作用素を定義するのに，a と ρ を区間 I 上で与えた．Kolmogorov の表現では a, b を与えるなど，同じものの異なった表現も可能である．Feller の表示を使って，生成作用素 $\mathfrak{A}$ を

(6.1)
$$\mathfrak{A}f = \frac{1}{\rho}(a\rho f')'$$

と表すと，対応する Dirichlet 形式 $\mathscr{E}$ は

(6.2)
$$\mathscr{E}(f,g) = \int_I af'g'\rho\,dx = \int_I \frac{df}{ds}\frac{dg}{ds}\,ds$$

と表される．実際

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(f,g) &= -\int_I \frac{1}{\rho}(a\rho f')'g\rho\,dx \\ &= \int_I a\rho f'g'\,dx \quad \text{(部分積分の公式)} \\ &= \int_I af'g'\rho\,dx.\end{aligned}$$

ここで，部分積分を行ったとき，境界からのの寄与があるが，それらが 0 になるように，境界条件が与えられているものとする．また見方を変えると

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(f,g) &= \int_I a\rho f'g'\,dx \\ &= \int_I (a\rho f')(a\rho g')\frac{1}{a\rho}\,dx \\ &= \int_I \frac{df}{ds}\frac{dg}{ds}\,ds\end{aligned}$$

の表示も得られる．

空間の変換

空間 I の変換 $R\colon I \to J$ を

$$R(x) = \int^x \frac{1}{\sqrt{a}}\,dy \tag{6.3}$$

で定める．J は R の定義から bijective になるように自然に定まる．

$$R'(x) = \frac{1}{\sqrt{a(x)}} \tag{6.4}$$

が R の基本的な性質である．$y = R(x)$ の逆関数を $x = R^{-1}(y)$ とかく．R^{-1} で変数変換すると

$$dx = (R^{-1})'(y)\,dy = \frac{1}{R'(x)}\,dy = \sqrt{a(x)}\,dy \tag{6.5}$$

となる．ここで $R'(x) = R'(R^{-1}(y))$ のことであるが，混乱のない範囲で略記する．R を使って自然な unitary map R^* が次で定まる．

$$(R^*u)(x) = u(R(x)). \tag{6.6}$$

測度の対応を見ると

$$\int_I u(R(x))\rho(x)\,dx = \int_J u(y)\rho(x)\sqrt{a(x)}\,dy$$

となるので，R による像測度は

$$\rho(x)\sqrt{a(x)}\,dy = \rho(R^{-1}(y))\sqrt{a(R^{-1}(y))}\,dy \tag{6.7}$$

であることが分かる．

$$\phi(y)^2 = \rho(x)\sqrt{a(x)} = \rho(R^{-1}(y))\sqrt{a(R^{-1}(y))} \tag{6.8}$$

と定めると，R^* は $L^2(J;\phi(y)^2\,dy)$ から $L^2(I;\rho(x)\,dx)$ への unitary 作用素である．$\mathscr{E}$ が $L^2(J;\phi(y)^2\,dy)$ でどう表現されるかを見ると

$$\begin{aligned}
\hat{\mathscr{E}}(u,v) &= \mathscr{E}(R^*u, R^*v) \\
&= \int_I a(x)[u(R(x)]'[v(R(x))]'\rho(x)\,dx \\
&= \int_I a(x)u'(y)R'(x)v'(y)R'(x)\rho(x)\,dx \\
&= \int_I a(x)u'(y)\frac{1}{\sqrt{a(x)}}v'(y)\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\rho(x)\,dx \\
&= \int_I u'(y)v'(y)\rho(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_J u'(y)v'(y)\rho(x)\sqrt{a(x)}\,dy \quad ((6.5))\\
&= \int_J u'(y)v'(y)\phi(y)^2\,dy. \quad ((6.8))
\end{aligned}
$$

更に部分積分を使えば

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{E}}(u,v) &= \int_J u'(y)v'(y)\phi(y)^2\,dy\\
&= -\int_J (u'(y)\phi(y)^2)'v(y)\,dy\\
&= -\int_J \left\{ (u''(y) + 2\frac{\phi'(y)}{\phi(y)}u'(y) \right\} v(y)\phi(y)^2\,dy
\end{aligned}
$$

となるので，$L^2(J;\phi(y)^2\,dy)$ での生成作用素の表現として

$$
\hat{\mathfrak{A}}u = u''(y) + 2(\log\phi(y))'u'(y) \tag{6.9}
$$

が得られる．$(\log\phi)'$ をもう少し計算しておこう．

$$
\phi(y) = \rho(x)^{1/2}a(x)^{1/4}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\phi'(y) &= \frac{1}{2}\rho(x)^{-1/2}\rho'(x)x'a(x)^{1/4} + \frac{1}{4}\rho(x)^{1/2}a(x)^{-3/4}a'(x)x'\\
&= \frac{1}{2}\rho(x)^{-1/2}\rho'(x)a(x)^{3/4} + \frac{1}{4}\rho(x)^{1/2}a(x)^{-1/4}a'(x).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
(\log\phi(y))' &= \frac{\phi'(y)}{\phi(y)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}a(x)^{1/2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{a(x)}}a'(x)\\
&= \frac{1}{4\sqrt{a(x)}}(2a(x)(\log\rho(x))' + a'(x))\\
&= \frac{1}{4\sqrt{a(x)}}(2(b(x) - a'(x)) + a'(x)) \quad ((3.8))\\
&= \frac{2b(x) - a'(x)}{4\sqrt{a(x)}}.
\end{aligned}
$$

これから (6.9) は次のようにも表される．

$$
\hat{\mathfrak{A}}u = u''(y) + \frac{2b(x) - a'(x)}{2\sqrt{a(x)}}u'(y) \tag{6.10}
$$

もちろん $x = R^{-1}(y)$ で最後は y 変数に直す必要がある．

同値な Schrödinger 作用素

最後に Schrödinger 作用素と unitary 同値になることを見ておく．$U\colon L^2(J;\phi(y)^2\,dy)\to L^2(J;dy)$ を

$$Uu(y)=\phi(y)u(y) \tag{6.11}$$

で定義する．まず双線型形式の対応を見よう．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{E}}(u,v)&=\hat{\mathscr{E}}(U^{-1}u,U^{-1}v)\\
&=\int_J (u(y)/\phi(y))'(v(y)/\phi(y))'\phi(y)^2\,dy\\
&=\int_J \frac{u'(y)\phi(y)-u(y)\phi'(y)}{\phi(y)^2}\frac{v'(y)\phi(y)-v(y)\phi'(y)}{\phi(y)^2}\phi(y)^2\,dy\\
&=\int_J \frac{(u'(y)\phi(y)-u(y)\phi'(y))(v'(y)\phi(y)-v(y)\phi'(y)}{\phi(y)^2}\,dy\\
&=\int_J \frac{(u'(y)v'(y)\phi(y)^2-(u'(y)v(y)+u(y)v'(y))\phi(y)\phi'(y)+u(y)v(y)(\phi'(y)))^2}{\phi(y)^2}\,dy\\
&=\int_J\left\{u'(y)v'(y)-(u(y)v(y))'\frac{\phi'(y)}{\phi(y)}+u(y)v(y)\frac{(\phi'(y))^2}{\phi(y)^2}\right\}dy\\
&=\int_J u'(y)v'(y)\,dy+\int_J u(y)v(y)(\frac{\phi'(y)}{\phi(y)})'\,dy+\int_J u(y)v(y)\frac{(\phi'(y))^2}{\phi(y)^2}dy\\
&\qquad(\because\ \text{integration by parts})\\
&=\int_J u'(y)v'(y)\,dy+\int_J u(y)v(y)(\frac{\phi''(y)\phi(y)-\phi'(y)^2}{\phi(y)^2})\,dy+\int_J u(y)v(y)\frac{(\phi'(y))^2}{\phi(y)^2}\,dy\\
&=\int_J u'(y)v'(y)\,dy+\int_J u(y)v(y)\frac{\phi''(y)}{\phi(y)}\,dy.
\end{aligned}$$

これは potential V が

$$V(y)=\frac{\phi''(y)}{\phi(y)} \tag{6.12}$$

の Schrödinger 作用素に対応する双線型形式である．上の計算で部分積分を使ったので，境界の影響を考慮すべきである．例えば C_{00} への制限の閉包として双線型形式が定まっているのなら上の計算は合理化できる．この場合もその状況を仮定する．

V をもう少し計算しよう．$(\log\phi)'=\phi'/\phi$ なのでさらに微分すると

$$(\log\phi)''=(\phi'/\phi)'=\frac{\phi''}{\phi}-\frac{(\phi')^2}{\phi^2}.$$

よって

$$V(y)=\frac{\phi''(y)}{\phi(y)}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\log\phi)'' + \Big(\frac{\phi'}{\phi}\Big)^2 \\
&= \Big(\frac{2b(x)-a'(x)}{4\sqrt{a(x)}}\Big)' + \Big(\frac{2b(x)-a'(x)}{4\sqrt{a(x)}}\Big)^2 \\
&= \frac{1}{4}\frac{(2b'(x)-a''(x))x'\sqrt{a(x)} - (2b(x)-a'(x))\frac{1}{2}a(x)^{-1/2}a'(x)x'}{a(x)} + \frac{(2b(x)-a'(x))^2}{16a(x)} \\
&= \frac{1}{4}\frac{(2b'(x)-a''(x))a(x) - (2b(x)-a'(x))\frac{1}{2}a'(x)}{a(x)} + \frac{(2b(x)-a'(x))^2}{16a(x)} \\
&= \frac{2(2b'(x)-a''(x))a(x) - (2b(x)-a'(x))a'(x)}{8a(x)} + \frac{(2b(x)-a'(x))^2}{16a(x)} \\
&= \frac{8a(x)b'(x) - 4a(x)a''(x) - 4a'(x)b(x) + 2a'(x)^2 + 4b(x)^2 - 4a'(x)b(x) + a'(x)^2}{16a(x)} \\
&= \frac{8a(x)b'(x) - 4a(x)a''(x) - 8a'(x)b(x) + 3a'(x)^2 + 4b(x)^2}{16a(x)} \\
&= \frac{1}{2}b'(x) - \frac{1}{4}a''(x) + \frac{3a'(x)^2 - 8a'(x)b(x) + 4b(x)^2}{16a(x)} \\
&= \frac{1}{2}b'(x) - \frac{1}{4}a''(x) + \frac{4(b(x)^2 - 2b(x)a'(x) + a'(x)^2) - a'(x)^2}{16a(x)} \\
&= \frac{1}{2}b'(x) - \frac{1}{4}a''(x) + \frac{4(b(x) - a'(x))^2 - a'(x)^2}{16a(x)} \\
&= \frac{1}{2}b'(x) - \frac{1}{4}a''(x) + \frac{(2b(x) - 2a'(x) + a'(x))(2b(x) - 2a'(x) - a'(x))}{16a(x)} \\
&= \frac{1}{2}b'(x) - \frac{1}{4}a''(x) + \frac{(2b(x) - a'(x))(2b(x) - 3a'(x))}{16a(x)}.
\end{aligned}
$$

纏めると

$$
V(y) = \frac{\phi''(y)}{\phi(y)} = \frac{1}{2}b'(x) - \frac{1}{4}a''(x) + \frac{(2b(x) - a'(x))(2b(x) - 3a'(x))}{16a(x)}. \tag{6.13}
$$

以上で次の図式が可換になることが分かった.

$$
\begin{tikzcd}
L^2(I;\rho\,dx) \arrow[r, "\mathfrak{A}"] & L^2(I;\rho) \\
L^2(J;\phi^2\,dy) \arrow[u, "R^*"] \arrow[r, "\frac{d^2}{dy^2}+2(\log\phi)'\frac{d}{dy}"] \arrow[d, "U"] & L^2(J;\phi^2\,dy) \arrow[u, "R^*"'] \arrow[d, "U"'] \\
L^2(J;dy) \arrow[r, "\frac{d^2}{dy^2}-V"] & L^2(J;dy)
\end{tikzcd} \tag{6.14}
$$

今までは双線型形式を基準に考えていたが，生成作用素を使っての直接的な計算でも出せる. $\mathfrak{A}f = af'' + bf'$ であるから

$$
\mathfrak{A}R^*u = a(x)[u(R(x))]'' + b(x)[u(R(x))]'
$$

$$
\begin{aligned}
&= a(x)[u'(R(x))R'(x)]' + b(x)(u'(R(x))R'(x) \\
&= a(x)\left\{u'(R(x))\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\right\}' + \frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}}u'(R(x)) \\
&= a(x)\left\{u''(R(x))\frac{1}{a(x)} - \frac{1}{2}a(x)^{-3/2}a'(x)u'(R(x))\right\} + \frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}}u'(R(x)) \\
&= u''(R(x)) - \frac{1}{2}a(x)^{-1/2}a'(x)u'(R(x)) + \frac{b(x)}{\sqrt{a(x)}}u'(R(x)) \\
&= u''(R(x)) + \frac{2b(x) - a'(x)}{2\sqrt{a(x)}}u'(R(x))
\end{aligned}
$$

となり，(6.10) が得られた．drift 項は $2(\log\phi)'u'$ とも表すことが出来た．

(6.14) の 2 番目の可換性は，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{A}}(Uu) &= \tilde{\mathfrak{A}}(\phi u) \\
&= (\phi u)'' - \frac{\phi''}{\phi}\phi u \\
&= \phi'' u + 2\phi' u' + \phi u'' - \phi'' u \\
&= \phi u'' + 2\phi' u' \\
&= \phi\left(u'' + 2\frac{\phi'}{\phi}u'\right) \\
&= \phi\hat{\mathfrak{A}}u \\
&= U(\hat{\mathfrak{A}}u)
\end{aligned}
$$

から分かる．

Sturm-Liouville 作用素との対応

拡散作用素の生成作用素は，他にも unitary 同値な表現がある．ここでは Sturm-Liouville 作用素との対応を与える．この作用をはよく調べられているので，一般論としての結果を援用することができる．

さて我々が扱う作用素は a, ρ を I 上で与えて

$$\mathfrak{A}f = \frac{1}{\rho}(a\rho f')' \tag{6.15}$$

と表すことが出来た．この作用素と，次の $L^2(I;dx)$ での Sturm-Liouville 作用素との対応を与えよう．

$$(af')' - qf. \tag{6.16}$$

さてそのために unitary 作用素 $U\colon L^2(I;dx) \to L^2(I;\rho\,dx)$ を

$$Uf = \frac{f}{\sqrt{\rho}} \tag{6.17}$$

で定める．すると，次が成立する．I 上の連続関数 q を

$$q = \frac{a}{4}(\log\rho)'^2 + \frac{1}{2}(a(\log\rho)')' \tag{6.18}$$

と定めると，次の図式が可換になる

$$\begin{array}{ccc} L^2(I;\rho\,dx) & \xrightarrow{\quad\mathfrak{A}\quad} & L^2(I;\rho\,dx) \\ {\scriptstyle U}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle U} \\ L^2(I;dx) & \xrightarrow{(af')'-qf} & L^2(I;dx) \end{array} \tag{6.19}$$

実際 $\mathfrak{A}U$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}Uf &= \frac{1}{\rho}\Big(a\rho\Big(\frac{f}{\sqrt{\rho}}\Big)'\Big)' \\
&= \frac{1}{\rho}\Big(a\rho\Big(\frac{f'}{\sqrt{\rho}} - \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\rho' f\Big)\Big)' \\
&= \frac{1}{\rho}(\sqrt{\rho}af')' - \frac{1}{2\rho}(\sqrt{\rho}a\frac{\rho'}{\rho}f)' \\
&= \frac{1}{\rho}\sqrt{\rho}(af')' + \frac{1}{\rho}\frac{1}{2}\rho^{-1/2}\rho' af' - \frac{1}{2\rho}(\sqrt{\rho}a(\log\rho)'f)' \\
&= \frac{1}{\sqrt{\rho}}(af')' + \frac{1}{2\sqrt{\rho}}a(\log\rho)'f' \\
&\quad - \frac{1}{4\rho}\rho^{-1/2}\rho' a(\log\rho)'f - \frac{1}{2\rho}\sqrt{\rho}(a(\log\rho)')'f - \frac{1}{2\rho}\sqrt{\rho}a(\log\rho)'f' \\
&= \frac{1}{\sqrt{\rho}}(af')' - \frac{1}{4\sqrt{\rho}}\frac{\rho'}{\rho}a(\log\rho)'f - \frac{1}{2\sqrt{\rho}}(a(\log\rho)')'f \\
&= \frac{1}{\sqrt{\rho}}\Big\{(af')' - \frac{a}{4}(\log\rho)'^2 f - \frac{1}{2}(a(\log\rho)')'f\Big\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\rho}}\{(af')' - qf\} \\
&= U\{(af')' - qf\}.
\end{aligned}$$

これが示すべきことであった．上の計算は形式的なものであるので，双線型形式を使って，厳密に証明しよう．変換後の双線型形式は次の形になる．

$$\hat{\mathscr{E}}(f,g) = \int_I af'g'\,dx + \int_I qfg\,dx \tag{6.20}$$

命題 6.1. $\mathscr{E}$ の C_{00} への制限が稠密あること，および $\hat{\mathscr{E}}$ への C_{00} への制限が稠密であることを仮定する．このとき $\mathscr{E}$ と $\hat{\mathscr{E}}$ は U の下で同値である．

証明 $\mathscr{E}$ を U で変換すると

$$\mathscr{E}(Uf,Ug) = \int_I a\Big(\frac{f}{\sqrt{\rho}}\Big)'\Big(\frac{g}{\sqrt{\rho}}\Big)'\rho\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_I a \frac{f'\sqrt{\rho} - \frac{1}{2}\rho^{-1/2}\rho'}{\rho} \frac{g'\sqrt{\rho} - g\frac{1}{2}\rho^{-1/2}\rho'}{\rho} \rho\,dx \\
&= \int_I a\Big(f' - \frac{1}{2} f \frac{\rho'}{\rho}\Big)\Big(g' - \frac{1}{2} g \frac{\rho'}{\rho}\Big)\rho\,dx \\
&= \int_I a f' g'\,dx - f\frac{1}{2}\int_I (f'g + fg')(\log\rho)'\,dx + \frac{1}{4}\int_I a(\log\rho)'^2 fg\,dx \\
&= \int_I a f' g'\,dx - \frac{1}{2}\int_I (fg)'(\log\rho)'\,dx + \frac{1}{4}\int_I a(\log\rho)'^2 fg\,dx \\
&= \int_I a f' g'\,dx + \frac{1}{2}\int_I fg(a(\log\rho)')'\,dx - \frac{1}{2} fga(\log\rho)'|_0^r + \frac{1}{4}\int_I a(\log\rho)'^2 fg\,dx \\
&= \int_I a f' g'\,dx + \int_I \Big\{\frac{1}{2}(a(\log\rho)')' + \frac{1}{4} a(\log\rho)'^2\Big\} fg\,dx - \frac{1}{2} fga(\log\rho)'|_0^r \\
&= \int_I a f' g'\,dx + \int_I q fg\,dx - \frac{1}{2} fga(\log\rho)'|_0^r.
\end{aligned}
$$

境界の影響が残るので，それを消すために C_{00} への制限が稠密であることを仮定している． □

7.　超対称性とスペクトル

Stein の枠組みでは，系列を考えることができる．ここでも超対称性の構造が基本的な働きをする．以下それを述べる．

作用素の系列

拡散作用素を定義するのに，a と ρ を与えた．a は変えないで ρ を $\rho_0 = \rho$, $\rho_1 = a\rho, \dots$, $\rho_n = a^n\rho$ と変えていく．このとき a, ρ_k $(k = 0, 1, \dots, n)$ に対応する生成作用素を

(7.1)
$$\mathfrak{A}_k = a\frac{d^2}{dx^2} + b_k\frac{d}{dx}$$

とするとき $(a\rho_k)' = b_k\rho_k$ だから

$$
\begin{aligned}
b_k\rho_k &= (a\rho_k)' \\
&= (aa\rho_{k-1})' \\
&= a'a\rho_{k-1} + a(a\rho_{k-1})' \\
&= a'a\rho_{k-1} + ab_{k-1}\rho_{k-1} \\
&= a'\rho_k + b_{k-1}\rho_k \\
&= (a' + b_{k-1})\rho_k.
\end{aligned}
$$

これから

(7.2)
$$b_k = a' + b_{k-1} = ka' + b_0$$

が従う．Hilbert 空間を $H_k = L^2(\rho_k)$ と定義し，作用素

(7.3)
$$D_k\colon H_k \to H_{k+1}$$

を $D_k = \frac{d}{dx}$ で定義する．

$$H_0 \xrightarrow{D_0} H_1 \xrightarrow{D_1} H_2 \xrightarrow{D_2} \dots \xrightarrow{D_{n-1}} H_n \tag{7.4}$$

するとその双対作用素

$$D_k^*\colon H_{k+1} \to H_k \tag{7.5}$$

は

$$D_k^* = -\frac{1}{\rho_k}\frac{d}{dx}a\rho_k = -\frac{1}{\rho_k}\frac{d}{dx}\rho_{k+1} \tag{7.6}$$

と表される．これから

$$H_n \xrightarrow{D_{n-1}^*} H_{n-1} \xrightarrow{D_{n-2}^*} H_{n-2} \xrightarrow{D_{n-3}^*} \dots \xrightarrow{D_0^*} H_0 \tag{7.7}$$

で

$$D_{n-1}D_{n-2}\dots D_0 = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \tag{7.8}$$

である．この双対は次で与えられる．

命題 7.1. 次が成立する．

$$D_0^*D_1^*\cdots D_{n-2}^*D_{n-1}^* = (-1)^n\frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{dx}\right)^n a^n\rho. \tag{7.9}$$

証明 (7.6) より

$$\begin{aligned} D_0^*D_1^*\cdots D_{n-2}^*D_{n-1}^* &= \left(-\frac{1}{\rho_0}\frac{d}{dx}\rho_1\right)\left(-\frac{1}{\rho_1}\frac{d}{dx}\rho_2\right)\left(-\frac{1}{\rho_2}\frac{d}{dx}\rho_3\right)\cdots\left(-\frac{1}{\rho_{n-1}}\frac{d}{dx}\rho_n\right) \\ &= (-1)^n\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\rho_n \end{aligned}$$

が従う． □

上の計算は形式的な計算で，作用素の合成は定義域の情報も考慮しなければならない．そのことも陰に含まれていると理解されたい．

$\mathfrak{A}_k = -D_k^*D_k$ とする．$\hat{\mathfrak{A}}_k = -D_kD_k^*$ と定義した．$\hat{\mathfrak{A}}_k$ は (5.25) から次のように表される．

$$\hat{\mathfrak{A}}_k = a\frac{d^2}{dx^2} + (a' + b_k)\frac{d}{dx} + b_k'. \tag{7.10}$$

ここで (7.2) を使えば，

$$\hat{\mathfrak{A}}_k = a\frac{d^2}{dx^2} + b_{k+1}\frac{d}{dx} + b_k' = \mathfrak{A}_{k+1} + b_k' = \mathfrak{A}_{k+1} + ka'' + b_0' \tag{7.11}$$

が得られる．

これで $\hat{\mathfrak{A}}_k$ と $\mathfrak{A}_{k+1}$ の関係が付いたわけである．

境界条件が必要なときは Dirichlet 境界条件が課されている．特に a が 2 次式で b が 1 次式の場合は $ka'' + b_0'$ が定数となり，$\hat{\mathfrak{A}}_k$ と $\mathfrak{A}_{k+1}$ のスペクトルは定数差しかない．さらに $\hat{\mathfrak{A}}_k$ と $\mathfrak{A}_k$ は 0 を除いて同じスペクトルを持つ．これらを用いて，スペクトルや固有関数についての更に詳しい情報が得られる．

$\boldsymbol{a}$ が 2 次式で $\boldsymbol{b}$ が 1 次式の場合

a が 2 次式で b が 1 次式の場合は a'', b' は定数関数となる．従って (7.11) は $\hat{\mathfrak{A}}_k$ と $\mathfrak{A}_{k+1}$ は定数差しかなく，本質的な違いはない．但し，繰り返しになるが (7.11) の等式は，厳密には 定理 5.8 で述べたように双線型形式で定式化する必要があることを想起しよう．従って，D_k は境界条件が必要な場合は Neumann 境界条件が必要であり，値の方の空間 H_{k+1} での作用素 $\mathfrak{A}_{k+1}$ は，境界条件が必要な場合はDirichlet 境界条件でなければならない．これらが成り立つには，$\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_{n-1}$ に対しては境界は非正則でなければならない．この系列の始点の $\mathfrak{A}_0$ は，もし境界に正則なものが存在する場合はNeumann 境界条件を課し，終点の $\mathfrak{A}_n$ では，もし境界に正則なものが存在する場合は Dirichlet 境界条件を課す必要がある．以後この状況を仮定する．これからしばらく a'', b' は定数関数ではなく，定数として扱う．さて，超対称性から $\mathfrak{A}_k=-D_k^*D_k$ と $\hat{\mathfrak{A}}_k=-D_kD_k^*$ は 0 以外では同じスペクトルを持ち，固有関数は D_k, D_k^* で移り合う．更に $\hat{\mathfrak{A}}_k=\mathfrak{A}_{k+1}+ka''+b'$ と $\hat{\mathfrak{A}}_k$ と $\mathfrak{A}_{k+1}$ は定数差しかない．従ってスペクトル構造は単なるシフトの違いだけである．これらの事実を使うと，次のことが証明される．

命題 7.2. $\lambda>0$ が $\mathfrak{A}_0$ の固有値で，固有関数を φ とする．このとき $D_{k-1}D_{k-2}\cdots D_0\varphi$ は $\mathfrak{A}_k$ の固有値 $\lambda-kb'-\frac{1}{2}k(k-1)a''$ に対する固有関数である．ただし，k は $\lambda-kb'-\frac{1}{2}k(k-1)a''$ が 0 になるまで動く．どこかで 0 になると，それ以後は成りたつ保証はなくなる．

証明 φ が $\mathfrak{A}_0$ の固有関数であるから，$D_0\varphi$ は $\hat{\mathfrak{A}}_0$ の固有値 λ の固有関数となる．$\hat{\mathfrak{A}}_0=\mathfrak{A}_1+b'$ だから

$$\mathfrak{A}_1D_0\varphi=(\hat{\mathfrak{A}}_0-b')D_0\varphi=(\lambda-b')D_0\varphi.$$

よって $D_0\varphi$ は $\mathfrak{A}_1$ の固有値 $\lambda-b'$ の固有関数になることがわかった．以下これを繰り返していけばよい．帰納法できちんと証明しよう．

k まで成り立っているとして，$k+1$ のときを示す．$D_{k-1}D_{k-2}\cdots D_0\varphi$ は $\mathfrak{A}_k$ の固有値 $\lambda-\frac{1}{2}k(k-1)a''-kb'$ に対する固有値であるとする．$\mathfrak{A}_k$ と $\hat{\mathfrak{A}}_k$ は 0 以外は同じ固有値を持つから，$D_k(D_{k-1}D_{k-2}\cdots D_0\varphi)$ は 固有値 $\lambda-\frac{1}{2}k(k-1)a''-kb'$ に対する固有関数となる．ところで $\hat{\mathfrak{A}}_k=\mathfrak{A}_{k+1}+ka''+b'$ なので $D_k(D_{k-1}D_{k-2}\cdots D_0\varphi)$ は $\mathfrak{A}_{k+1}$ の固有関数となり，固有値は

$$\begin{aligned}\lambda-\frac{1}{2}k(k-1)a''-kb'-ka''-b'&=\lambda-\frac{1}{2}k(k+1)a''-(k+1)b'\\&=\lambda-\frac{1}{2}(k+1)((k+1)-1)a''-(k+1)b'\end{aligned}$$

となる．これで $k+1$ のときが示せた． □

次に逆の方向を示そう．

命題 7.3. φ が $\mathfrak{A}_k$ の固有値 $\lambda\geq 0$ に対する固有関数であるとき，$D_0^*D_1^*\cdots D_{k-1}^*\varphi$ は $\mathfrak{A}$ の固有値 $\lambda+\frac{1}{2}k(k-1)a''+kb'$ に対する固有関数となる．ただし，k は $\lambda+kb'+\frac{1}{2}k(k-1)a''$ が 0 になるまで動く．どこかで 0 になると，それ以後は成りたつ保証はなくなる．

証明 帰納法で示す．φ が $\mathfrak{A}_{k+1}$ の固有値 λ に対する固有関数とする．$\mathfrak{A}_k$ と $\hat{\mathfrak{A}}_k$ は 0 を除いて同じ固有値を持つ．

$$\hat{\mathfrak{A}}_k = \mathfrak{A}_{k+1} + ka'' + b'$$

であるから φ は $\hat{\mathfrak{A}}_k$ の固有値 $\lambda + ka'' + b'$ に対する固有値である．ここで帰納法の仮定を使うと，

$$D_0^* D_1^* \cdots D_{k-1}^* (D_k^* \varphi)$$

は $\mathfrak{A}$ の固有関数で, 固有値は

$$\lambda + ka'' + b' + \frac{1}{2}k(k-1)a'' + kb' = \lambda + \frac{1}{2}k(k+1)a'' + (k+1)b'$$

で与えられる．これで $k+1$ の場合が証明された． □

$\mathfrak{A}_k$ の固有値 $\lambda \geq 0$ が仮定されているが，$\hat{\mathfrak{A}}_{k-1} = \mathfrak{A}_k + (k-1)a'' + b'$ なので，$(k-1)a'' + b' > 0$ であればこれは $\hat{\mathfrak{A}}_{k-1}$ の負の固有値を考えていることになり，超対称性の使える固有値となる．そのような状況が仮定されているわけである．

特に定数関数 1 が固有値 0 に対する固有関数であることが容易に分かるときがある．これは ρ の積分が有限で，境界条件が必要な場合は Neumann 境界条件が付いている場合である．上のことを使うと $\mathfrak{A}_k$ が固有値 0， 固有関数 1 を持つと，$\mathfrak{A}$ は固有値 $\frac{1}{2}k(k+1)a'' + (k+1)b'$ を持ち，固有関数は

$$D_0^* D_1^* \cdots D_{k-1}^* 1 = (-1)^k \frac{1}{\rho} \left(\frac{d}{dx} \right)^k [a^k \rho] \tag{7.12}$$

であることが分かる．これは言うまでもないが Rodrigues の公式に他ならない．

Kolmogorov diffusions の分類

a を 2 次式，b を 1 次式として $\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}$ で生成される拡散過程を Kolmogorov diffusions といった．これから分類を行う．a の次数でまず分類できる．即ち 0 次，1 次，2 次の 3 つに分類できる．

(I) $a = 1$ on $(-\infty, \infty)$

(II) $a = x$ on $[0, \infty)$

(III) a は 2 次式

affine 変換で移り合うものは，本質的な違いではないので，(I), (II) は一番簡単な形にしてある．さらに (III) は細分されて，

(III-1) $a = 0$ は重根を持つ

(III-2) $a = 0$ は 2 実根をもつ

(III-3) $a = 0$ は 2 虚根をもつ

の 3 つの場合に分けられる．具体的に書くと

(III-1) $a = x^2$ on $[0, \infty)$

(III-3) $a = x^2 + 1$ on $(-\infty, \infty)$

(III-2) はさらに 2 つの場合に分けられる．

(III-2-a) $a = x(1 - x)$ on $[0, 1]$

(III-2-b) $a = x(x + 1)$ on $[0, \infty)$

もう一度まとめると

(I) $a = 1$ on $(-\infty, \infty)$

(II) $a = x$ on $(0, \infty)$

(III-1) $a = x^2$ on $(0, \infty)$

(III-2-a) $a = x(1 - x)$ on $(0, 1)$

(III-2-b) $a = x(x + 1)$ on $(0, \infty)$

(III-3) $a = x^2 + 1$ on $(-\infty, \infty)$

この分類に従って以後スペクトルを整理していく．

8. ドリフトのある 1 次元ブラウン運動

さてまず (I) $a = 1$ on $(-\infty, \infty)$ の場合を扱う．自由度は b の方だけかから，2 パラメーターの自由度がある．この二つのパラメーターを別々に扱う形にする．その方が自然なグループ分けのように思えるから．$b = \beta \in \mathbb{R}$ で，β をパラメーターとして，実数全体を動かす．次の形の生成作用素を考えることになる．

(8.1)
$$\mathfrak{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \beta \frac{d}{dx}$$

スピード測度密度は

(8.2)
$$\rho(x) = \exp\{\int \beta dx\} = e^{\beta x}$$

である．(3.8) から

$$b = \frac{(a\rho)'}{\rho} = \frac{\beta e^{\beta x}}{e^{\beta x}} = \beta$$

で (8.1) の生成作用素の表現を得る．
尺度関数 s は

$$s' = \frac{1}{a\rho} = e^{-\beta x}$$

より

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta x}), & \beta \neq 0, \\ x, & \beta = 0. \end{cases}$$

同様に

$$m(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}(e^{\beta x} - 1), & \beta \neq 0, \\ x, & \beta = 0. \end{cases}$$

よって $\beta \neq 0$ のとき

$$M(\infty) = \int_0^\infty s(x)\, dm(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta x})e^{\beta x}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{\beta}(e^{\beta x} - 1)\, dx = \infty.$$

また

$$S(\infty) = \int_0^\infty m(x)\, ds(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\beta}(e^{\beta x} - 1)e^{-\beta x}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta x})\, dx = \infty.$$

$\beta = 0$ のときも具体的に $M(x) = S(x) = \frac{x^2}{2}$ となるからいずれの場合も $M(\infty) = S(\infty) = \infty$ なので $x = \infty$ は，non-entrance, non-exit である．
また $x = -\infty$ も同様で（上と同じ計算で，符号を逆にする）non-entrance, non-exit である．
また $D = \frac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(\rho)$ とすると，その双対は

$$(\frac{d}{dx})^* = -\frac{d}{dx} - \beta \tag{8.3}$$

となる．
スペクトルを求めよう．次のような変換 $I\colon L^2(\rho) \longrightarrow L^2(dx)$ を考える．

$$If(x) = e^{\beta x/2} f(x). \tag{8.4}$$

ここで

$$\begin{aligned} I \circ \mathfrak{A} \circ I^{-1} f &= e^{\beta x/2}(\frac{d^2}{dx^2} + \beta\frac{d}{dx})(e^{-\beta c x/2} f) \\ &= e^{\beta x/2}(\frac{\beta^2}{4}e^{-\beta x/2} f - \beta e^{-\beta x/2}\frac{df}{dx} + e^{-\beta x/2}\frac{d^2 f}{dx^2} - \beta\frac{1}{2}\beta e^{-\beta x/2} f + \beta e^{-\beta x/2}\frac{df}{dx}) \\ &= -\frac{\beta^2}{4} f + \frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned}$$

であるから次の図式が可換となる:

$$
\begin{array}{ccc}
L^2(\rho) & \xrightarrow{\mathfrak{A}} & L^2(\rho) \\
{\scriptstyle I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I} \\
L^2(dx) & \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\beta^2}{4}} & L^2(dx)
\end{array}
\tag{8.5}
$$

従ってこの場合のスペクトル集合は

$$
\sigma(\mathfrak{A}) = (-\infty, -\frac{\beta^2}{4}]
\tag{8.6}
$$

となる．$\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数は分かっているから $\mathfrak{A}$ の固有関数は $e^{(i\lambda-\beta/2)x}$ が固有値 $-\lambda-\beta^2/4$ に対する固有関数である．さらに

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{(i\lambda-\beta/2)x} &= (i\lambda-\beta/2)e^{(i\lambda-\beta/2)x} \\
(\frac{d}{dx}+\beta)e^{(i\lambda-\beta/2)x} &= (i\lambda+\beta/2)e^{(i\lambda-\beta/2)x}
\end{aligned}
$$

が成り立っている．即ち D, D^* がともに固有関数を固有関数に移していることが分かる．これが Stein 双対から導かれることである．

Feller の双対は今の場合丁度 β の符号の反転である．従って，y 軸に関する対称性として表れている．

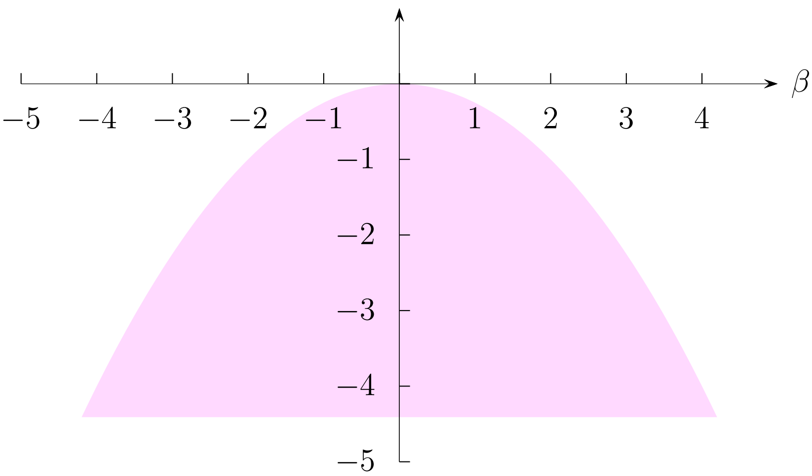
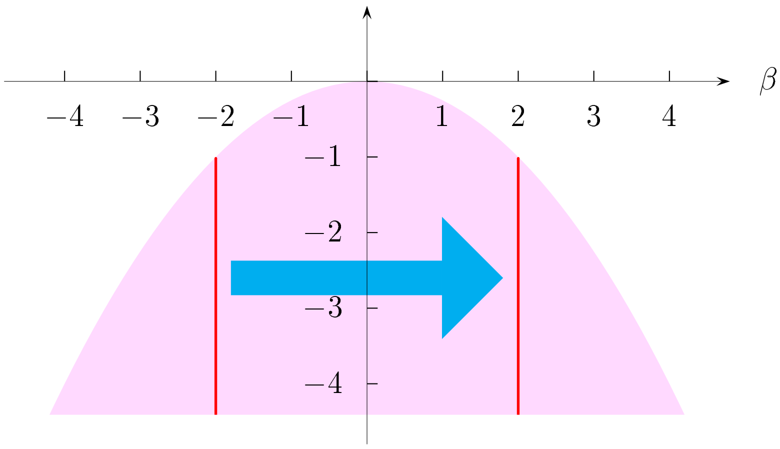


図 4: スペクトルの β への依存性

特に，Feller dual を図で示すと



Feller dual

9. ブラウン族

続いて (I) $a=1$ の場合で $b(x)=\beta x,\ \beta\in\mathbb{R}$ の場合を調べよう．$\beta=0$ のとき，ブラウン運動なので，この族をブラウン族と呼ぶことにする．生成作用素は

$$\mathfrak{A}=\frac{d^2}{dx^2}+\beta x\frac{d}{dx} \tag{9.1}$$

標準測度密度は (3.9) から

$$\rho(x)=\exp\{\int\beta xdx\}=e^{\beta x^2/2} \tag{9.2}$$

である．

(3.8) から

$$b=\frac{(a\rho)'}{\rho}=\frac{\beta xe^{\beta x^2/2}}{e^{\beta x^2/2}}=\beta x$$

で (9.1) の生成作用素の表現を得る．

尺度関数 s は

$$s'=\frac{1}{a\rho}=e^{-\beta x^2/2}$$

より

$$s(x)=\int_0^x e^{-\beta x^2/2}.$$

ここで $\beta<0$ のとき

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\beta x^2/2}/x}{s(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(e^{-\beta x^2/2}/x)'}{s'(x)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-\beta e^{-\beta x^2/2} - (e^{-\beta x^2/2}/x^2)}{e^{-\beta x^2/2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} -\beta - (1/x^2) \\
&= -\beta.
\end{aligned}
$$

よって

$$
s(x) \begin{cases} \to \int_0^\infty e^{-\beta x^2/2}, & \beta > 0, \\ = x, & \beta = 0, \\ \sim -\dfrac{e^{-\beta x^2/2}}{\beta x} & \beta < 0. \end{cases}
$$

m に対しても同様で

$$
m(x) \begin{cases} \sim \dfrac{e^{\beta x^2/2}}{\beta x} & \beta > 0, \\ = x, & \beta = 0, \\ \to \int_0^\infty e^{\beta x^2/2}, & \beta < 0. \end{cases}
$$

次に境界の分類に進もう．まず $\beta > 0$ のとき

$$
M(\infty) = \int_0^x s(x)\, dm(x) = \int_0^x s(x) e^{\beta x^2/2}\, dx = \infty.
$$

また

$$
S(\infty) = \int_1^x m(x)\, ds(x) = \int_1^x m(x) e^{-\beta x^2/2}\, dx \sim \int_0^x \frac{1}{\beta x} e^{\beta x^2/2} e^{-\beta x^2/2}\, dx = \int_0^x \frac{1}{\beta x}\, dx = \infty.
$$

まず $\beta < 0$ のときは

$$
M(\infty) = \int_1^x s(x)\, dm(x) = \int_1^x s(x) e^{\beta x^2/2}\, dx \sim \int_1^x -\frac{1}{\beta x} e^{-\beta x^2/2} e^{\beta x^2/2}\, dx = \int_0^x -\frac{1}{\beta x}\, dx = \infty.
$$

また

$$
S(\infty) = \int_0^x m(x)\, ds(x) = \int_0^x m(x) e^{-\beta x^2/2}\, dx = \infty.
$$

$\beta = 0$ のときは $m(x) = s(x) = x$ なので $M(\infty) = S(\infty) = \infty$ が成立する．よって $x = \infty$ はどの場合も non-exit, non-entrance である．$x = -\infty$ のときも全く同様で non-exit, non-entrance である．

また $D = \frac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(\rho)$ の双対は

$$
(\frac{d}{dx})^* = -\frac{d}{dx} - \beta x \tag{9.3}
$$

となる．よって

$$\mathfrak{A}u = -D^*Du = u'' + \beta x u',$$
$$\hat{\mathfrak{A}}u = -DD^* = u'' + \beta x u' + \beta u$$

である．

次にスペクトルを求めよう．$\beta < 0$ のときは，よく知られているように Hermite 多項式が固有関数である．その定義を復習しておこう．

Hermite 多項式

まず Hermite 多項式 $H_n(x)$ $(n \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R})$ を次で定める．

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}. \tag{9.4}$$

通常の定義と定数が異なっていることに注意しておく．ここではこの方が以下の定数が簡単になるので，

このとき，次の性質は基本的である．

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x) = e^{tx - t^2/2}, \tag{9.5}$$

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = H_{n-1}(x), \tag{9.6}$$

$$(n+1)H_{n+1}(x) - xH_n(x) + H_{n-1}(x) = 0, \tag{9.7}$$

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \delta_{n,m} \frac{1}{n!}, \tag{9.8}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\eta} H_n(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = e^{-\eta^2/2} \frac{\sqrt{-1}^n}{n!} \eta^n. \tag{9.9}$$

ここで，$H_{-1}(x) = 0$ としている．始めのいくつかは，$H_0(x) = 1$，$H_1(x) = x$，$H_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$，$H_3(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x)$ などである．

Ornstein-Uhlenbeck 過程

$\beta < 0$ の場合は，Ornstein-Uhlenbeck 過程である．(9.7) は (9.6) と組み合わせれば

$$(\frac{d}{dx} - x)H_n = -(n+1)H_{n+1}$$

を意味する．従って

$$(\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx})H_n = -nH_n$$

となって，H_n は固有関数であることが分かる．これは $\beta = -1$ の場合で固有関数の対応関係を図示すると次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
\text{eigenvalue} & & 0 \\
0 & H_0(x) \arrow[ur, "\frac{d}{dx}"] & H_0(x) \\
-1 & H_1(x) \arrow[ur] & H_1(x) \\
-2 & H_2(x) \arrow[ur] & H_2(x) \\
-3 & H_3(x) \arrow[ur] & H_3(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

図 5: Hermite 多項式の微分

以上は $\beta = -1$ の場合で，一般の $\beta < 0$ の場合は $H_n(\sqrt{|\beta|}x)$ が固有関数になる．これは

$$\frac{d}{dx}H_n(\sqrt{|\beta|}x) = \sqrt{|\beta|}H_n'(\sqrt{|\beta|}x)$$

および

$$
\begin{aligned}
(\frac{d}{dx} + \beta x)H_n(\sqrt{|\beta|}x) &= \sqrt{|\beta|}H_n'(\sqrt{|\beta|}x) + \beta x H_n(\sqrt{|\beta|}x) \\
&= \sqrt{|\beta|}(H_n'(\sqrt{|\beta|}x) - \sqrt{|\beta|}xH_n(\sqrt{|\beta|}x)) \\
&= -\sqrt{|\beta|}(n+1)H_{n+1}(\sqrt{|\beta|}x)
\end{aligned}
$$

に注意すればよい．固有値は $\{0, -\sqrt{|\beta|}, -2\sqrt{|\beta|}, -3\sqrt{|\beta|}, \dots\}$ となる．

双対 Ornstein-Uhlenbeck 過程

次に $\beta > 0$ の場合を考えよう．この場合に対応する確率過程には，名前がないように思う．ここでは双対 Ornstein-Uhlenbeck 過程と仮に呼んでおく．この場合は

$$\frac{d}{ds}\colon L^2(e^{-\beta x^2/2}) \to L^2(e^{\beta x^2/2}) \tag{9.10}$$

が固有関数の対応を与える，というのが Feller 双対である．何度も言うようにこれは，unitary ではない．

以下簡単のために $\beta = 1$ のときの計算だけする．$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$\frac{d}{ds}H_{n+1} = e^{-x^2/2}H_{n+1}' = e^{-x^2/2}H_n$$

である．これが固有関数になっていることを見よう．Stein dual を使って計算していく．まず微分して

$$\frac{d}{dx}[e^{-x^2/2}H_n] = -xe^{-x^2/2}H_n + e^{-x^2/2}H_n = e^{-x^2/2}(-xH_n + H_n) = -(n+1)e^{-x^2/2}H_{n+1}.$$

これは，いつもの微分すると再び固有関数，のパターンである．さらに Stein dual を計算すると

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)[e^{-x^2/2}H_{n+1}] = -xe^{-x^2/2}H_{n+1} + e^{-x^2/2}H_{n+1}' + xe^{-x^2/2}H_{n+1}$$

$$= e^{-x^2/2}H'_{n+1} = e^{-x^2/2}H_n.$$

これで $e^{-x^2/2}H_n$ が固有値 $-(n+1)$ に対する固有関数であることが分かる．

Doob の h-変換

最後に h-変換の対応を見よう．

(9.11) $$I\colon L^2(e^{-x^2/2}) \to L^2(e^{x^2/2})$$

を

(9.12) $$If = e^{-x^2/2}f$$

で定義する．このとき次の図式が可換となる．

(9.13) $$\begin{array}{ccc} L^2(e^{-x^2/2}) & \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}-x\frac{d}{dx}} & L^2(e^{-x^2/2}) \\ {\scriptstyle I}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I} \\ L^2(e^{x^2/2}) & \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}+x\frac{d}{dx}+1} & L^2(e^{x^2/2}) \end{array}$$

実際

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}\Big)e^{x^2/2} = e^{x^2/2}$$

であるから

$$\Big(\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}\Big)[e^{x^2/2}f] = e^{x^2/2}f + 2xe^{x^2/2}f' + e^{x^2/2}(f'' - xf') = e^{x^2/2}f + e^{x^2/2}(f'' + xf').$$

よって

$$e^{-x^2/2}\Big(\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}\Big)[e^{x^2/2}f] = e^{x^2/2}f + 2xe^{x^2/2}f' + e^{x^2/2}(f'' - xf') = f'' + xf' + f.$$

これで $e^{-x^2/2}H_n$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ が 固有値 $-(n+1)$ に対する固有関数であることが分かる．

まとめ

それでは $\mathfrak{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \beta x \frac{d}{dx}$ のスペクトルについてまとめておく．β に関する依存性は次のようにグラフで表される．

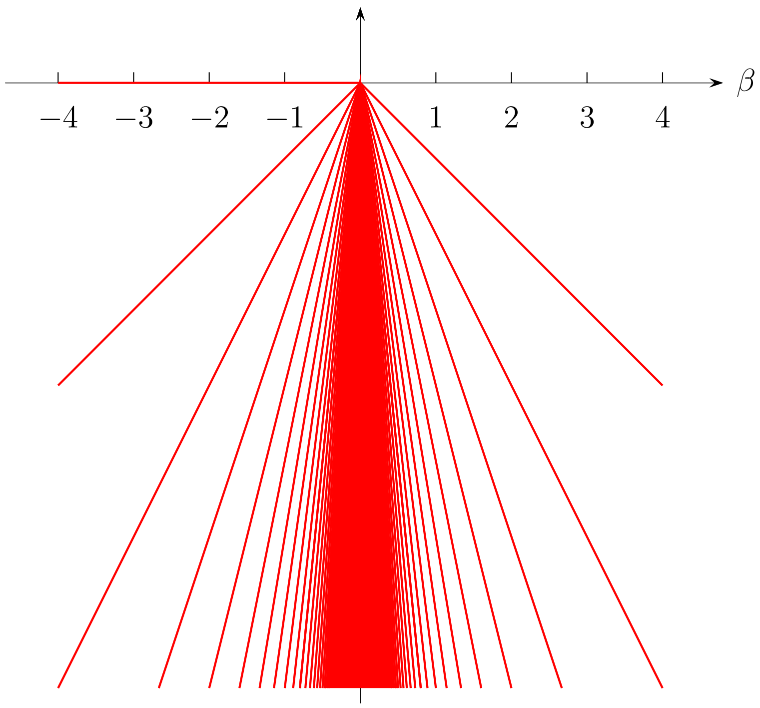


図 6: スペクトルの β への依存性

上の図で，すぐに対称性を見て取れるが，それは Feller dual の部分である．式で再記すれば $\beta > 0$ として

$$e^{-\beta x^2/2}\frac{d}{dx}\colon L^2(e^{-\beta x^2}) \to L^2(e^{\beta x^2}) \tag{9.14}$$

固有関数は $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対し

$$\frac{d}{ds}H_{n+1}(\sqrt{|\beta|}x) = e^{-\beta x^2/2}H_n(\sqrt{|\beta|}x).$$

図示すると

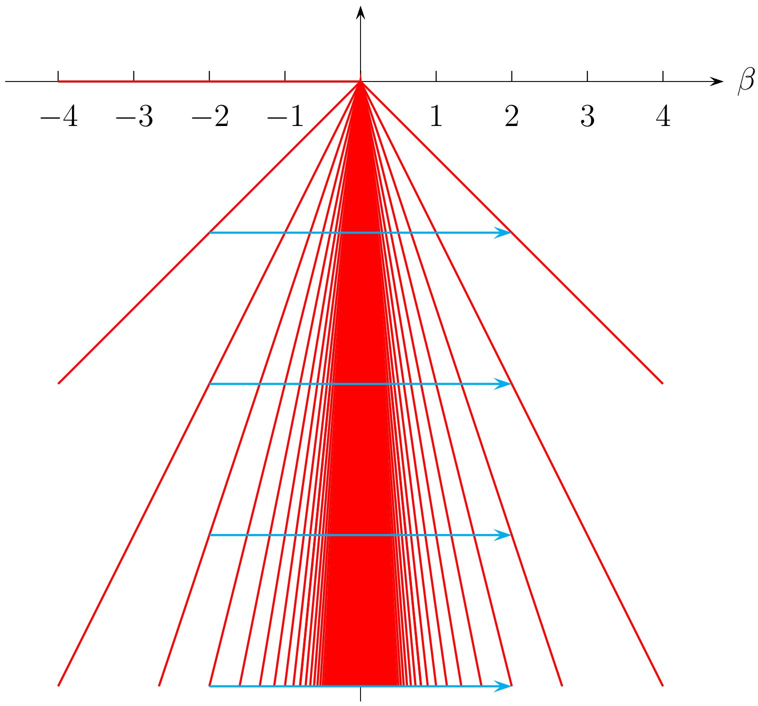


図 7: Feller dual

Stein dual は 微分すると，再び固有関数が得られるということであった．$\beta < 0$ のときが

$$\frac{d}{dx} H_n(\sqrt{|\beta|}x) = \sqrt{|\beta|} H_{n-1}(\sqrt{|\beta|}x)$$

で，$\beta > 0$ のときが

$$\frac{d}{dx}(e^{-\beta x^2/2} H_n(\sqrt{|\beta|}x)) = -(n+1)e^{-\beta x^2/2} H_{n+1}(\sqrt{|\beta|}x)).$$

図示すると

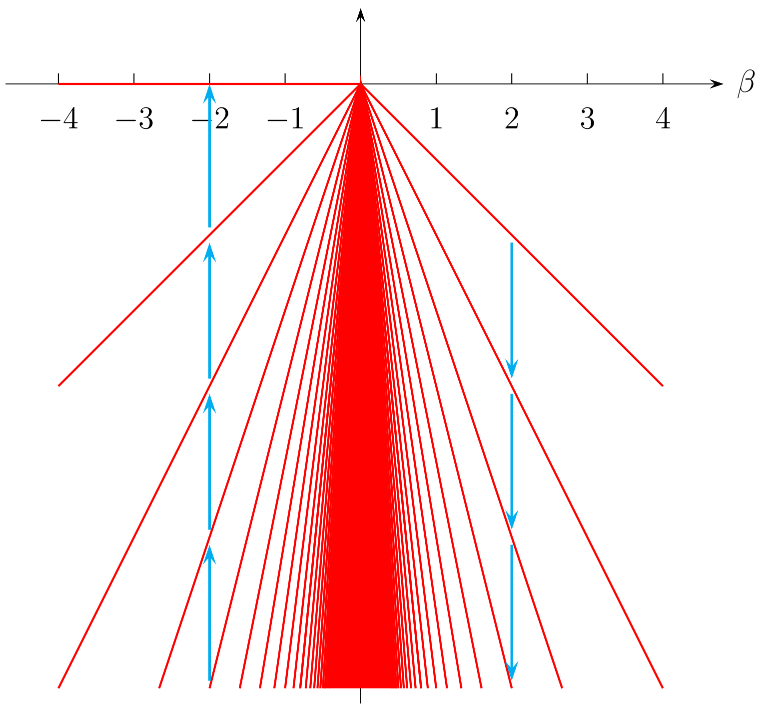
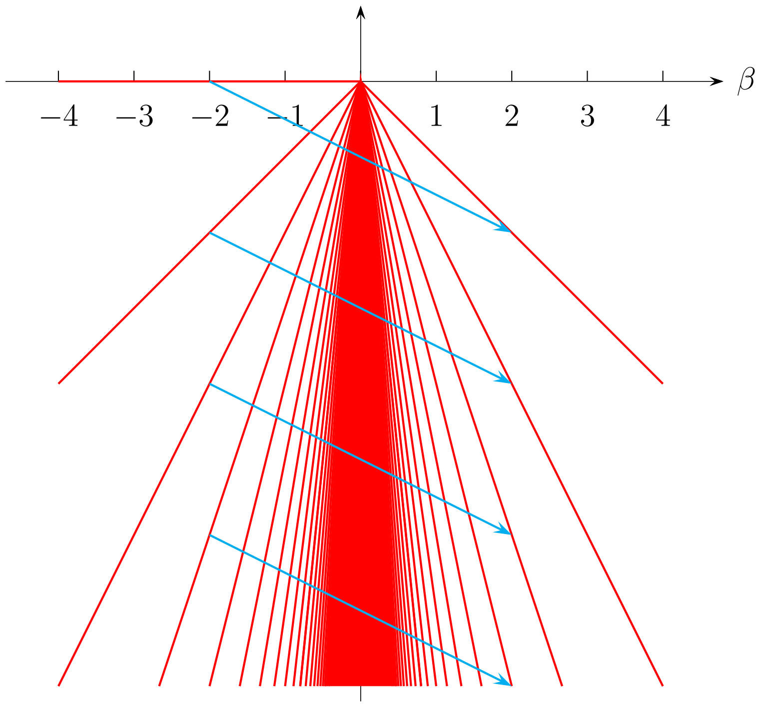


図 8: Stein dual

最後に，Doob の h-変換は次で与えられる．



Doob h-変換

10. Bessel 族

ここから (II) の $a = x$ on $[0, \infty)$ の場合を扱う．生成作用素は

$$\mathfrak{A} = x\frac{d}{dx^2} + (\alpha + 1 + \beta x)\frac{d}{dx} \tag{10.1}$$

である．これらは，ある種の共通な性質を持つので，ひとまとめで考えたほうが良い．生成作用素は二つのパラメーター α, β を持つので，$\mathfrak{A} = L_{(\alpha,\beta)}$ と表すことにする．

さて，$a = x$ であるが，標準測度の密度 ρ は

$$\rho = x^{\alpha} e^{\beta x} \tag{10.2}$$

で与えられる．実際 (3.8) から

$$b = a' + a(\log \rho)' = 1 + x(\alpha \log x + \beta x)' = 1 + x(\frac{\alpha}{x} + \beta) = \alpha + 1 + \beta x$$

で確かめられる．従って尺度関数 s の密度は

$$s' = \frac{1}{a\rho} = \frac{1}{x x^{\alpha} e^{\beta x}} = x^{-\alpha-1} e^{-\beta x} \tag{10.3}$$

となる．

<u>調和関数</u>

まず，次が成立する．

命題 10.1. $x^{-\alpha}$ は $L_{(\alpha,\beta)} + \alpha\beta$-調和である．すなわち

$$(L_{(\alpha,\beta)} + \alpha\beta)x^{-\alpha} = 0 \tag{10.4}$$

証明 定義から

$$\begin{aligned}(x\frac{d}{dx^2} + (\alpha+1+\beta x)\frac{d}{dx})x^{-\alpha} &= x(x^{-\alpha})'' + (\alpha+1+\beta x)(x^{-\alpha})' \\ &= x(-\alpha)(-\alpha-1)x^{-\alpha-2} + (\alpha+1+\beta x)(-\alpha)x^{-\alpha-1} \\ &= \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-1} - (\alpha+1)\alpha x^{-\alpha-1} - \alpha\beta x^{-\alpha} \\ &= -\alpha\beta x^{-\alpha}.\end{aligned}$$

これが示すべきことである． □

これから Doob の h-変換が使える．きちんとした話は後ですることにして，ここでは次の形式的な計算だけしておく．$\varphi = x^{-\alpha}$ とおくと，

$$\begin{aligned}L_{(\alpha,\beta)}(\varphi f) &= (L_{(\alpha,\beta)}\varphi)f + \varphi(L_{(\alpha,\beta)}f) + 2x\varphi' f' \\ &= -\alpha\beta\varphi f + \varphi(xf'' + (\alpha+1+\beta x)f') - 2\alpha\varphi f' \\ &= -\alpha\beta\varphi f + \varphi(xf'' + (-\alpha+1+\beta x)f') \\ &= -\alpha\beta\varphi f + \varphi L_{(-\alpha,\beta)}f\end{aligned}$$

これから

$$\varphi^{-1}(L_{(\alpha,\beta)} + \alpha\beta)(\varphi f) = L_{(-\alpha,\beta)}f$$

これを利用して，$L_{(\alpha,\beta)} + \alpha\beta$ と $L_{(-\alpha,\beta)}$ が同じスペクトルを持つことをのちに示す．上の計算が形式的なのは，生成作用素の定義域をはっきり述べていないことによる．

$\beta \neq 0$ のときは，さらに別の調和関数が存在する．

命題 10.2. $e^{-\beta x}$ は $L_{(\alpha,\beta)} + (\alpha+1)\beta$-調和であり，$x^{-\alpha}e^{-\beta x}$ は $L_{(\alpha,\beta)} + \beta$-調和である．すなわち次が成立する

$$(L_{(\alpha,\beta)} + (\alpha+1)\beta)e^{-\beta x} = 0, \tag{10.5}$$

$$(L_{(\alpha,\beta)} + \beta)[x^{-\alpha}e^{-\beta x}] = 0. \tag{10.6}$$

証明 定義から

$$\begin{aligned}L_{(\alpha,\beta)}e^{-\beta x} &= (x\frac{d}{dx^2} + (\alpha+1+\beta x)\frac{d}{dx})e^{-\beta x} \\ &= x(e^{-\beta x})'' + (\alpha+1+\beta x)(e^{-\beta x})'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta^2 x e^{-\beta x} + (\alpha + 1 + \beta x)(-\beta) e^{-\beta x} \\
&= -(\alpha + 1)\beta e^{-\beta x}.
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}(x^{-\alpha} e^{-\beta x}) &= (x\frac{d}{dx^2} + (\alpha + 1 + \beta x)\frac{d}{dx})(x^{-\alpha} e^{-\beta x}) \\
&= x(x^{-\alpha} e^{-\beta x})'' + (\alpha + 1 + \beta x)(x^{-\alpha} e^{-\beta x})' \\
&= x(\alpha(\alpha + 1)x^{-\alpha-2} e^{-\beta x} + 2\alpha\beta x^{-\alpha-1} e^{-\beta x} + \beta^2 x^{-\alpha} e^{-\beta x}) \\
&\quad - (\alpha + 1 + \beta x)(\alpha x^{-\alpha-1} e^{-\beta x} + \beta x^{-\alpha-1} e^{-\beta x} \\
&= \alpha(\alpha + 1)x^{-\alpha-1} e^{-\beta x} + 2\alpha\beta x^{-\alpha} e^{-\beta x} + \beta^2 x^{-\alpha+1} e^{-\beta x}) \\
&\quad - (\alpha + 1)\alpha x^{-\alpha-1} e^{-\beta x} - (\alpha + 1)\beta x^{-\alpha} e^{-\beta x} - \alpha\beta x^{-\alpha} e^{-\beta x} - \beta^2 x^{-\alpha+1} e^{-\beta x} \\
&= (2\alpha\beta - (\alpha + 1)\beta - \alpha\beta)x^{-\alpha} e^{-\beta x} \\
&= -\beta x^{-\alpha} e^{-\beta x}.
\end{aligned}
$$

これが示すべきことである. □

これらを使ってスペクトルの同値性が示せる.

$\beta = 0$ の場合に, もう一つ空間的な変換で同値なものが得られることを注意しておく. 実際 β は $\beta = \pm 1$ のときだけ調べればよいのである.

$T\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を次で定める:

$$
Tx = |\beta|\, x. \tag{10.7}
$$

これから自然に写像

$$
T^*\colon L^2(x^\alpha e^{(\operatorname{sgn}\beta)x}) \longrightarrow L^2(|\beta|^{\alpha+1} x^\alpha e^{\beta x})
$$

が $T^* f(x) = f(Tx) = f(|\beta| x)$ として定まる. このとき次の図式が可換となる.

$$
\begin{tikzcd}
L^2(x^\alpha e^{(\operatorname{sgn}\beta)x}) \arrow[r, "T^*"] \arrow[d, "|\beta| L_{(\alpha,\operatorname{sgn}\beta)}"'] & L^2(|\beta|^{\alpha+1} x^\alpha e^{\beta x}) \arrow[d, "L_{(\alpha,\beta)}"] \\
L^2(x^\alpha e^{(\operatorname{sgn}\beta)x}) \arrow[r, "T^*"'] & L^2(|\beta|^{\alpha+1} x^\alpha e^{\beta x})
\end{tikzcd} \tag{10.8}
$$

実際

$$
\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)} T^* f &= (x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 + \beta x)\frac{d}{dx}) f(|\beta| x) \\
&= \beta^2 x f''(|\beta| x) + (\alpha + 1 + \beta x)|\beta| f'(|\beta| x) \\
&= |\beta|\{|\beta| x f''(|\beta| x) + (\alpha + 1 + \operatorname{sgn}(\beta)|\beta| x) f'(|\beta| x) \\
&= |\beta| (L_{(\alpha,\operatorname{sgn}(\beta))} f)(|\beta| x)
\end{aligned}
$$

$$= |\beta| T^*(L_{(\alpha, \mathrm{sgn}(\beta))} f).$$

これで，$L_{(\alpha,\beta)}$ と $|\beta| L_{(\alpha,\mathrm{sgn}(\beta))}$ が unitary 同値であることが分かった．従って $\beta = \pm 1$ の場合を調べれば十分であることが分かった．

いずれにしても，こうした事実から，Bessel 族は似た性質を持つことは予想できるだろう．

11.　超幾何関数 ${}_0F_1$

(II) の $a = x$ on $[0, \infty)$ の場合を考えているのであった．生成作用素は

$$\mathfrak{A} = x \frac{d}{dx^2} + (\alpha + 1 + \beta x) \frac{d}{dx} \tag{11.1}$$

である．最初に $\beta = 0$ の場合を考察するが，対応する確率過程は平方 Bessel 過程である．従って Bessel 族の確率過程と呼ぶことにする．平方 Bessel 過程の固有関数を考えたいので，Bessel 関数が基本となるが，ここでは超幾何関数を用いることにする．それは結局同値なものであるので，どちらでもよい訳である．固有関数は

$$x \frac{d^2}{dx^2} u + (\alpha + 1) \frac{d}{dx} u = \lambda u \tag{11.2}$$

をみたす関数である．そこで次の形の微分方程式を考える．

$$x u'' + c u' = a u. \tag{11.3}$$

a, c は任意に固定された定数である．実は a は $a = 1$ の場合が求まればよい．$a = 1$ の場合の解は次の超幾何関数で与えられる．

$$ {}_0F_1(c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_n n!} x^n. \tag{11.4}$$

ここで $(c)_n = c(c+1) \cdots (c+n-1)$ で Pochhammer symbol と呼ばれる．但し ${}_0F_1(c; x)$ は $c = 0, -1, -2, \ldots$ では定義されていない．以後この関数を中心に議論を進めていく．表記を簡単にするため次の記号を導入する．

$$B(c; x) = \frac{1}{\Gamma(c)} {}_0F_1(c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(c+n) n!} x^n. \tag{11.5}$$

ここで，定数 $\frac{1}{\Gamma(c)}$ を付け加えたのは後の計算で表記が簡単になることと，Bessel 関数との対応が簡単になることによる．$B(c; x)$ は c も x も複素数でもよいが，使うときは実数だけである．以下に述べる B の性質は，すべて複素数に対して成立している．

隣接関数

$B(c; x)$ の隣接関数を調べよう．次のような略記法を用いる．

$$B(c\pm) = B(c \pm 1; x).$$

このとき次が成立する．

命題 11.1. 次の関係式が成り立つ.

$$B' = B(c+) \tag{11.6}$$

$$xB' + (c-1)B = B(c-) \tag{11.7}$$

証明 (11.5) から，微分すると

$$B'(c;x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(c+n)(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(c+n+1)n!} x^n = B(c+1;x).$$

B を展開したときの x^n の係数を

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\Gamma(c+n)n!}$$

とおくと，xB', $B(c-)$ の係数は

$$n\varepsilon_n, \quad \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c-1+n)}\varepsilon_n = (c+n-1)\varepsilon_n = n\varepsilon_n + (c-1)\varepsilon_n$$

となる．実際 xB' は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(c+n)n!} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_n x^n.$$

さらに $B(c-)$ は

$$\frac{1}{\Gamma(c-1+n)n!}x^n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c-1+n)} \frac{1}{\Gamma(c+n)n!} x^n = (c+n-1)\varepsilon_n x^n = n\varepsilon_n x^n + (c-1)\varepsilon_n x^n.$$

このことから容易に

$$B(c-) = xB' + (c-1)B$$

が従い，(11.7) が示せた． □

上の 命題 11.1を使うと

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + c\frac{1}{dx}\right)B = \left(x\frac{d}{dx} + c\right)\frac{d}{dx}B = \left(x\frac{d}{dx} + c\right)B(c+) = B.$$

よって B は微分方程式

$$xu'' + cu' = u \tag{11.8}$$

をみたしている．また u が (11.8) をみたしているとき

$$v(x) = u(ax) \tag{11.9}$$

とおくと

$$xv'' + cv' = xu''(ax)a^2 + cau'(ax) = a\{(ax)u''(ax) + cu'(ax)\} = au(ax) = av(x)$$

となり，v は微分方程式

$$xv'' + cv' = av \tag{11.10}$$

をみたしている．従って (11.8) をみたしている解から，いつでも (11.10) の解が構成できる．よって $B(c; ax)$ は (11.10) の解になっていることが確かめられる．定理としておこう．

定理 11.2. $B(c; ax)$ は次の微分方程式を満たす．

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + c\frac{d}{dx}\right)B(c; ax) = aB(c; ax) \tag{11.11}$$

特に a は固有値であるから，負のものだけ考える．従って $B(c; ax)$ は，B の負の部分だけが関係していることを注意しておく．

さて，微分方程式 (11.3) の解が $B(c; x)$ であったが，もう一つの独立な解が $x^{1-c}B(2-c; x)$ で与えられることを見ておこう．まず

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^{1-c}B(2-c; x)] &= (1-c)x^{-c}B(2-c; x) + x^{1-c}B'(2-c; x)\\ &= x^{-c}\{(1-c)B(2-c; x) + xB'(2-c; x)\}\\ &= x^{-c}B(1-c; x). \quad (\because\ (11.4))\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\left(x\frac{d}{dx} + c\right)[x^{-c}B(1-c; x)] &= x[x^{-c}B(1-c; x)]' + cx^{-c}B(1-c; x)\\ &= x(-c)x^{-c-1}B(1-c; x) + xx^{-c}B'(1-c; x) + cx^{-c}B(1-c; x)\\ &= x^{1-c}B'(1-c; x)\\ &= x^{1-c}B(2-c; x). \quad (\because\ (11.6))\end{aligned}$$

これらから $x^{1-c}B(2-c; x)$ が方程式 (11.8) をみたしていることが確かめられた．

最後に，後の応用のために Laplace 変換を計算しておこう

命題 11.3. $\lambda > 0$ として次の等式が成立する．

$$\int_0^\infty B(c; x)x^{c-1}e^{-\lambda x} = \lambda^{-c}e^{1/\lambda} \tag{11.12}$$

$$\int_0^\infty B(c; -x)x^{c-1}e^{-\lambda x} = \lambda^{-c}e^{-1/\lambda} \tag{11.13}$$

証明 定義 (11.5) に帰れば

$$\begin{aligned}\int_0^\infty B(c;x)x^{c-1}e^{-\lambda x} &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(c+n)n!}x^n x^{c-1}e^{-\lambda x} \quad (u=\lambda x,\ du=\lambda dx)\\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(c+n)n!}x^{c+n-1}\lambda^{-c-n+1}e^{-u}\frac{du}{\lambda}\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(c+n)n!}\Gamma(c+n)\lambda^{-c-n}\\ &= \lambda^{-c}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\lambda^{-n}\\ &= \lambda^{-c}e^{1/\lambda}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\int_0^\infty B(c;x)x^{c-1}e^{-\lambda x} &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(c+n)n!}(-1)^n x^n x^{c-1}e^{-\lambda x} \quad (u=\lambda x,\ du=\lambda dx)\\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(c+n)n!}(-1)^n x^{c+n-1}\lambda^{-c-n+1}e^{-u}\frac{du}{\lambda}\\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\Gamma(c+n)n!}(-1)^n\Gamma(c+n)\lambda^{-c-n}\\ &= \lambda^{-c}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(-\lambda)^{-n}\\ &= \lambda^{-c}e^{-1/\lambda}.\end{aligned}$$

□

Bessel 関数

ここからは Bessel 関数の性質をまとめておく．Bessel 関数に関しては，詳細な研究があるが，ここでは後の議論に関連するもののみを述べる．Bessel 関数は，次の微分方程式に関連して定義された．

$$\frac{d^2}{dx^2}y+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}y+\left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)y=0. \tag{11.14}$$

この方程式は α 次の Bessel の微分方程式とよばれている．さて y を (11.15) の解とし $u(x)=y(\xi x)$ とおくと

$$\begin{aligned}u''+\frac{1}{x}u' &= \xi^2 y''(\xi x)+\frac{1}{x}\xi y'(\xi x)\\ &= \xi^2\{y''(\xi x)+\frac{1}{\xi x}y'(\xi x)\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\xi^2\left(1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2 x^2}\right) y(\xi x) \\
&= \frac{\alpha^2}{x^2} y(\xi x) - \xi^2 y(\xi x) \\
&= \frac{\alpha^2}{x^2} u - \xi^2 u.
\end{aligned}
$$

従って

$$u'' + \frac{1}{x} u' - \frac{\alpha^2}{x^2} u = -\xi^2 u.$$

これは u が作用素

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\alpha^2}{x^2} \tag{11.15}$$

の固有値 $-\xi^2$ の (形式的な) 固有関数になっていることを示している．また u, v を $(0,\infty)$ で台がコンパクトであるとすると

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty (u'' + \frac{1}{x} u') v x \, dx &= -\int_0^\infty u'(xv)' \, dx + \int_0^\infty u' v \, dx \\
&= -\int_0^\infty u'(v + xv') \, dx + \int_0^\infty u' v \, dx \\
&= -\int_0^\infty u' v' x \, dx
\end{aligned}
$$

であるから，作用素 (11.15) は $L^2(x\,dx)$ の対称作用素となっている．従ってスペクトル解析が可能となるが，後で空間を替えて議論することにする．

さて，微分方程式 (11.14) の解の一つが次の第一種の Bessel 関数である．

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{n!\Gamma(\alpha+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}. \tag{11.16}$$

次数 α は ν と書かれることが多いが，Laguerre 多項式と合わせるために α という記号を用いる．次数 α はすべての実数をとることが出来るが，整数の場合は

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{11.17}$$

となる．非整数の場合は独立な解を表している．第二種の Bessel 関数も定義されているが，ここでは用いないので以後第一種の Bessel 関数を単に Bessel 関数とよぶ．J_α は次の関係をみたす．

命題 11.4. 次の関係式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}[x^\alpha J_\alpha(x)] = x^\alpha J_{\alpha-1}(x) \tag{11.18}$$

(11.19) $$\frac{d}{dx}[x^{-\alpha}J_\alpha(x)] = -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$$

(11.20) $$J'_\alpha(x) + \frac{\alpha}{x}J_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x)$$

(11.21) $$J'_\alpha(x) - \frac{\alpha}{x}J_\alpha(x) = J_{\alpha+1}(x)$$

証明 定義から

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^\alpha J_\alpha(x)] &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\Gamma(\alpha+n+1)}\frac{1}{2^{2n+\alpha}}x^{2n+2\alpha} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\Gamma(\alpha+n+1)2^{2n+\alpha}}(2n+2\alpha)x^{2n+2\alpha-1} \\
&= x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)2^{2n+\alpha}}2(n+\alpha)x^{2n+\alpha-1} \\
&= x^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\Gamma(\alpha+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha-1} \\
&= x^\alpha J_{\alpha-1}(x).
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^{-\alpha}J_\alpha(x)] &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\Gamma(\alpha+n+1)}\frac{1}{2^{2n+\alpha}}x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\Gamma(\alpha+n+1)2^{2n+\alpha}}2nx^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n+1)2^{2n+\alpha-1}}nx^{2n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!\Gamma(\alpha+n+2)}\frac{1}{2^{2(n+1)+\alpha-1}}(n+1)x^{2(n+1)-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!\Gamma(\alpha+n+2)}\frac{1}{2^{2n+\alpha+1}}x^{2n+1} \\
&= x^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!\Gamma(\alpha+n+2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\alpha+1} \\
&= -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x).
\end{aligned}$$

次に (11.18) から

$$\alpha x^{\alpha-1}J_\alpha(x) + x^\alpha J'_\alpha(x) = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$$

よって，両辺を x^α で割って

$$\frac{\alpha}{x}J_\alpha(x) + J'_\alpha(x) = J_{\alpha-1}(x).$$

同じく (11.19) から

$$-\alpha x^{-\alpha-1}J_\alpha(x)+x^{-\alpha}J'_\alpha(x)=-x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$$

よって，両辺を x^α を掛けて

$$-\frac{\alpha}{x}J_\alpha(x)+J'_\alpha(x)=-J_{\alpha+1}(x).$$

以上ですべてが示せた． □

超幾何関数との関係

一方で Bessel 関数 J_α は (11.16) で定められていた．

$$\begin{aligned}
J_\alpha(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!\Gamma(\alpha+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}\\
&=\frac{x^\alpha}{2^\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+1)n!}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n\\
&=\frac{x^\alpha}{2^\alpha}B\left(\alpha+1;-\frac{x^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

である．これは級数展開で定義されているので，$x\in\mathbb{C}$ で意味がある．但し x^α の値は分岐に依るので $-\pi<\arg x<\pi$ としておく．結局 Bessel 関数は B で表せたわけだが，このことはよく知られた事実である（例えば [1] § 8.1.1 を見よ）．また上の式で $y=(\frac{x}{2})^2$ とおくと $x=2\sqrt{y}$ だから

$$J_\alpha(2\sqrt{y})=y^{\alpha/2}B(\alpha+1;-y).$$

以上纏めて

$$J_\alpha(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha B\left(\alpha+1;-\frac{x^2}{4}\right), \tag{11.22}$$

$$B(\alpha+1;-y)=y^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{y}) \tag{11.23}$$

である．Bessel 関数の方がよく知られているのであるから，上で $B(\alpha+1;-y)$ を定義すればよいわけであるが，ここでは超幾何関数を基本にする立場をとる．J_α の性質 (11.18), (11.19) は命題 11.1から従う．実際

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^{-\alpha}J_\alpha(x)]&=\frac{1}{2^\alpha}\frac{d}{dx}\left[B\left(\alpha+1;-\frac{x^2}{4}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2^\alpha}B'\left(\alpha+1;-\frac{x^2}{4}\right)(-\frac{x}{2})\\
&=-\frac{x}{2^{\alpha+1}}B\left(\alpha+2;-\frac{x^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -x^{-\alpha}\frac{x^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}}B\left(\alpha+2;-\frac{x^2}{4}\right)\\
&= -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x).
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^\alpha J_\alpha(x)] &= \frac{1}{2^\alpha}\frac{d}{dx}\left[x^{2\alpha}B\left(\alpha+1;-\frac{x^2}{4}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2^\alpha}\left[2\alpha x^{2\alpha-1}B\left(\alpha+1;-\frac{x^2}{4}\right)+x^{2\alpha}B'\left(\alpha+1;-\frac{x^2}{4}\right)(-\frac{x}{2})\right]\\
&= \frac{2x^{2\alpha-1}}{2^\alpha}\left[\alpha B\left(\alpha+1;-\frac{x^2}{4}\right)-\frac{x^2}{4}B'\left(\alpha+1;-\frac{x^2}{4}\right)\right]\\
&= \frac{x^{2\alpha-1}}{2^{\alpha-1}}B\left(\alpha;-\frac{x^2}{4}\right) \quad (\because\ (11.4))\\
&= x^\alpha\frac{x^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}}B\left(\alpha;-\frac{x^2}{4}\right)\\
&= x^\alpha J_{\alpha-1}(x).
\end{aligned}
$$

命題 11.1 の証明と命題 11.4 の証明は本質的に同じことであるが，多少こちらの方が見通しがよいように思える．

変形 Bessel 関数

本質的に Bessel 関数と同じだが，変形 Bessel 関数 I_α を次で定義する．

(11.24)
$$
I_\alpha(z) = e^{-i\alpha\pi/2}J_\alpha(iz).
$$

もちろんこの関数は $B(\alpha+1,y)$ と関係する．(11.22) で y の代わりに $-y$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
B(\alpha+1;y) &= (-y)^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{-y})\\
&= (e^{\pi i}y)^{-\alpha/2}J_\alpha(2i\sqrt{y})\\
&= y^{-\alpha/2}e^{-i\alpha\pi/2}J_\alpha(2i\sqrt{y})\\
&= y^{-\alpha/2}I_\alpha 2(\sqrt{y})
\end{aligned}
$$

が得られる．$x = 2\sqrt{y}$ とすれば逆に解くこともできるので纏めると

(11.25)
$$
B(\alpha+1;y) = y^{-\alpha/2}I_\alpha(2\sqrt{y}),
$$

(11.26)
$$
I_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha B(\alpha+1;\frac{x^2}{4}).
$$

以上で $B(\alpha+1;y)$ の y の符号が，変形かそうでないかに対応することが分かる．

漸近挙動

Bessel 関数 J_α の $x \to 0$ および $x \to \infty$ のときの漸近挙動は重要である．そのことを纏めておこう．以下，複素平面で考え，変数は z で表す．また $-\pi < \arg z < \pi$ とする．次のことが成り立つ．$z \to 0$ のとき

$$J_\alpha(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)2^\alpha} z^\alpha, \quad \alpha \neq -n, n \in \mathbb{N} \tag{11.27}$$

$$J_{-n}(z) \sim \frac{(-1)^n}{n!2^n} z^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{11.28}$$

また $z \to \infty$ のとき

$$J_\alpha(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\Bigl(z - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Bigr) \quad (z \to \infty) \tag{11.29}$$

が成り立つ．

これらを利用すれば，$B(\alpha+1; y)$ の漸近挙動が次のように分かる．

命題 11.5. 次の漸近挙動が成り立つ．$y \to \infty$ のとき

$$B(\alpha+1; -y) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} y^{-\frac{1+2\alpha}{4}} \cos\Bigl(2\sqrt{y} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Bigr), \tag{11.30}$$

$$B(\alpha+1; y) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} y^{-(1+2\alpha)/4} e^{2\sqrt{y}}. \tag{11.31}$$

証明 以下 $y \geq 0$ として，$y \to \infty$ での漸近挙動を見ると，

$$\begin{aligned}
B(\alpha+1; -y) &= y^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{y}) \\
&\sim y^{-\alpha/2} \sqrt{\frac{2}{\pi 2\sqrt{y}}} \cos\Bigl(2\sqrt{y} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Bigr) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} y^{-\frac{1+2\alpha}{4}} \cos\Bigl(2\sqrt{y} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Bigr)
\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}
B(\alpha+1; y) &= y^{-\alpha/2} e^{-\alpha\pi i/2} J_\alpha(2i\sqrt{y}) \\
&= y^{-\alpha/2} e^{-\alpha\pi i/2} \sqrt{\frac{2}{2\pi i\sqrt{y}}} \cos\Bigl(2i\sqrt{y} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Bigr) \\
&= y^{-\alpha/2} e^{-\alpha\pi i/2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\pi i/4} y^{-1/4} \frac{e^{i(2i\sqrt{y} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(2i\sqrt{y} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}}{2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} y^{-(1+2\alpha)/4} e^{-(2\alpha+1)\pi i/4} \bigl\{e^{-2\sqrt{y} - \frac{\alpha\pi i}{2} - \frac{\pi i}{4})} + e^{2\sqrt{y} + \frac{\alpha\pi i}{2} + \frac{\pi i}{4})}\bigr\} \\
&\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} y^{-(1+2\alpha)/4} e^{2\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

が得られて証明が終わる． □

12. 平方 Bessel 過程と固有関数

この節では平方 Bessel 過程とその固有関数について関係を述べる．この確率過程は $[0,\infty)$ で定義され，生成作用素は

$$x\frac{d^2}{dx^2}+(\alpha+1)\frac{d}{dx} \tag{12.1}$$

である．$a=x$, $\rho=x^\alpha$ ととったことになる．実際 (3.8) から

$$b=a'+a(\log\rho)'=1+x(\alpha\log x)'=1+x\frac{\alpha}{x}=1+\alpha$$

であるから

$$\mathfrak{A}u=xu''+(\alpha+1)u', \tag{12.2}$$

$$\hat{\mathfrak{A}}u=xu''+(\alpha+2)u'. \tag{12.3}$$

境界の分類

さて，Feller の分類に従って境界条件を調べよう．尺度関数 s は

$$\int_1^x\frac{1}{a(y)\rho(y)}\,dy=\int_1^x x^{-\alpha-1}\,dy=\begin{cases}-\frac{x^{-\alpha}}{\alpha}+\frac{1}{\alpha} & \alpha\neq 0\\ \log x & \alpha=0\end{cases}$$

から

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{x^{-\alpha}}{\alpha}, & \alpha\neq 0,\\ \log x, & \alpha=0\end{cases} \tag{12.4}$$

と定めればよい．標準測度は

$$\int_1^x\rho(y)\,dy=\int_1^x x^\alpha\,dy=\begin{cases}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1} & \alpha\neq -1\\ \log x & \alpha=-1\end{cases}$$

であるから

$$m(x)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha\neq -1,\\ \log x, & \alpha=-1\end{cases} \tag{12.5}$$

とすればよい．これで 0 および ∞ での挙動がわかる．

さてこれらを使って

$$S(x)=\int_1^x(m(x)-m(1))ds(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_1^x(\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1})y^{-\alpha-1}\,dy, & \alpha\neq -1\\ \displaystyle\int_1^x(\log y)\,dy, & \alpha=-1\end{cases}$$

および

$$M(x) = \int_1^x (s(y) - s(1))dm(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_1^x (-\frac{y^{-\alpha}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha})y^{\alpha}\, dy, & \alpha \neq 0 \\ \displaystyle\int_1^x (\log y)\, dy, & \alpha = 0 \end{cases}$$

と定める．Feller に従って $S(x)$, $M(x)$ を使って境界を分類しよう．

∞ では $S(\infty) = \infty$, $M(\infty) = \infty$ であることが容易に分かるから ∞ は non-exit, non-entrance である．

次に 0 を考えよう．$M(0)$ について考えると，明らかに $\alpha > -1$ と $M(0) < \infty$ が同値である．$S(0)$ も同様の考察で $-\alpha - 1 > -1$ と $S(0) < \infty$ が同値である．すなわち $\alpha < 0$ である．

また，0 が，極限円か極限点かも重要な性質である．$\alpha > 0$ のとき

$$\int_0^1 s(x)^2\, dm(x) = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^1 x^{-2\alpha}x^{\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^1 x^{-\alpha}\, dx$$

より $\alpha \geq 1$ のとき積分は発散し，極限点の場合になる．以上をまとめて次のように分類される．

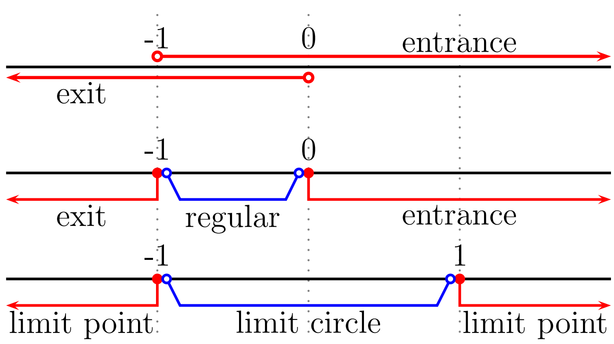
	$s(0)$	$m(0)$	$S(0)$	$M(0)$	boundary 0
$\alpha \geq 0$	$= -\infty$	$> -\infty$	$= \infty$	$< \infty$	non-exit, entrance
$-1 < \alpha < 0$	$> -\infty$	$> -\infty$	$< \infty$	$< \infty$	exit, entrance
$\alpha \leq -1$	$> -\infty$	$= -\infty$	$< \infty$	$= \infty$	exit, non-entrance

また，極限円，極限点の分類では

	boundary 0
$\alpha \geq 1$	limit point
$-1 < \alpha < 1$	limit circle
$\alpha \leq -1$	limit point

となる．

まとめると次のようになる．



α による境界の分類

$L^2([0,\infty), x^\alpha dx)$ における $\mathfrak{A}$ のスペクトルは $(-\infty, 0]$ であり，連続スペクトルのみをもつ．点スペクトルは持たないので，固有関数は存在しないが，一般化された意味では存在する．定理 11.2 から固有値 $-\xi$ $(\xi > 0)$ の固有関数は

$$B(\alpha+1; -\xi x) \tag{12.6}$$

である．但し B は

$$B(c; x) = \frac{1}{\Gamma(c)}\,{}_0F_1(c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(c+n)n!} x^n. \tag{12.7}$$

で定義される超幾何関数である．定理 11.2 で述べた微分方程式を今の形に書き直せば

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1)\frac{d}{dx}\right) B(c; -\xi x) = -\xi B(c; -\xi x) \tag{12.8}$$

となる．

$\alpha > -1$ の exit 系列の場合

まず，$\alpha > -1$ の exit 系列の固有関数を考えよう．この固有関数は $B(\alpha+1; \lambda x)$ で与えられる．境界条件が必要な場合は Neumann 条件を課していることになる．Neumann 条件は

$$a\rho u'(0+) = 0$$

であったが，今の場合は

$$a\rho u'(0+) = x x^\alpha u'|_{x=0+} = x^{\alpha+1} u'|_{x=0+} = 0$$

で確かに成り立っている．ここで $\alpha > -1$ を使った．

これが固有関数であることの意味は，後で正確に述べるが，これらの関数がスペクトル分解を与えていることである．そこで，微分すると再び固有関数が得られることを見よう．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[B(\alpha+1; \lambda x)] &= B'(\alpha+1; \lambda x)\lambda \\ &= \lambda B(\alpha+2; \lambda x). \quad (\because\ (11.6))\end{aligned}$$

となり，確かに固有関数になっている．さらに，$D = \frac{d}{dx}$ の双対作用素は

$$-D^* u = x u' + (\alpha+1) u$$

である．この作用もみておくと

$$\begin{aligned}-D^*[\lambda B(\alpha+2; \lambda x)] &= \lambda x \frac{d}{dx}[B(\alpha+2; \lambda x)] + (\alpha+1)\lambda B(\alpha+2; \lambda x) \\ &= \lambda\{\lambda x B'(\alpha+2; \lambda x) + (\alpha+1) B(\alpha+2; \lambda x)\} \\ &= \lambda B(\alpha+1; \lambda x). \quad (\because\ (11.7))\end{aligned}$$

となって逆の対応が得られる．

最後に Bessel 関数との関係を復習しておく．$\xi > 0$ のとき (11.23) で見たように

$$B(\alpha+1; -\xi x) = (\xi x)^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{\xi x}) \tag{12.9}$$

と表された．Bessel 関数に J_α については $x \to 0$ のときの漸近挙動が知られている．(Lebedev [20] p. 134 (5.16.1) あるいは 犬井 [14] p. 285 に書いてある．）

$$J_\alpha(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)2^\alpha} x^\alpha, \quad \alpha \neq -n, n \in \mathbb{N} \tag{12.10}$$

$$J_{-n} \sim \frac{(-1)^n}{n!2^n} x^n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{12.11}$$

これから (12.9) を使うと $\alpha+1 \neq -n$ のとき $x \to 0$ で

$$B(\alpha+1; -x) = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) \sim x^{-\alpha/2} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)2^\alpha} (2\sqrt{x})^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{12.12}$$

もちろん $B(\alpha+1; -x)$ は解析的なので，(12.12) は $B(\alpha+1; 0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ という自明な関係式を表しているに過ぎない．

<u>$\alpha < 0$ の entrance 系列の場合</u>

次に $\alpha < 0$ の場合に entrance 系列の固有関数を考えよう．この場合はもう一つの独立解 $x^{-\alpha}B(1-\alpha; \lambda x)$ が固有関数になる．実際このことは次のようにしてわかる．作用素 $L_{(\alpha)}$ を

$$L_{(\alpha)} = x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1)\frac{d}{dx} \tag{12.13}$$

で定めると $x^{-\alpha}$ は $L_{(\alpha)}$ 調和になる．実際

$$L_{(\alpha)}x^{-\alpha} = x\frac{d^2}{dx^2}x^{-\alpha} + (\alpha+1)\frac{d}{dx}x^{-\alpha} = x(-\alpha)(-\alpha-1)x^{-\alpha-2} + (\alpha+1)(-\alpha)x^{-\alpha-1} = 0.$$

これから $x^{-\alpha}$ で h-変換を行って次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccc} L^2((0,\infty); x^\alpha\, dx) & \xrightarrow{L_{(\alpha)}} & L^2((0,\infty); x^\alpha\, dx) \\ R\big\uparrow & & \big\uparrow R \\ L^2((0,\infty); x^{-\alpha}\, dx) & \xrightarrow{L_{(-\alpha)}} & L^2((0,\infty); x^{-\alpha}\, dx) \end{array} \tag{12.14}$$

ここで

$$Rf = x^{-\alpha} f. \tag{12.15}$$

この可換性を見るには $\varphi = x^{-\alpha}$ とおいて

$$L_{(\alpha)}(\varphi f) = (L_{(\alpha)}\varphi)f + \varphi L_{(\alpha)} f + 2x\varphi' f'$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi L_{(\alpha)} f - 2x\alpha x^{-\alpha-1} f' \\
&= \varphi(xf'' + (\alpha+1)f') - 2\alpha\varphi f' \\
&= \varphi(xf'' + (-\alpha+1)f') \\
&= \varphi L_{(-\alpha)} f.
\end{aligned}
$$

よって $x^{-\alpha}B(1-\alpha;\lambda x)$ が固有関数であることが分かる．Dirichlet 条件を満たしていることは $\alpha < 0$ を仮定しているから明らかだろう．但し，作用素の対応では境界条件は判然としない．実際 $L_{()}-\alpha$ は境界は非正則なので境界条件が要らない形だが，$L_{()}\alpha$ は $-1 < \alpha < 0$ のとき，境界 0 が正則なので，Dirichlet 境界条件が対応することが判然としない．正確な議論は Dirichlet 形式を用いて行う．対応する Dirichlet 形式を $\mathscr{E}^{(\alpha)}$ などとかくことにする．$f, g \in \mathrm{Dom}(\mathscr{E}^{(\alpha)}) \cap C_{00}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}^{(-\alpha)}(R^{-1}f, R^{-1}g) &= \int_0^\infty x(x^\alpha f)'(x^\alpha g)' x^{-\alpha}\,dx \\
&= \int_0^\infty (\alpha x^{al-1} f + x^\alpha f')(\alpha x^{\alpha-1} g + x^\alpha g') x^{1-\alpha}\,dx \\
&= \int_0^\infty f'g'x^{\alpha+1}\,dx + \int_0^\infty (f'g+fg')\alpha x^\alpha\,dx + \int_0^\infty fg\alpha^2 x^{\alpha-1}\,dx \\
&= \int_0^\infty f'g'x^{\alpha+1}\,dx + \int_0^\infty (fg)'\alpha x^\alpha\,dx + \int_0^\infty fg\alpha^2 x^{\alpha-1}\,dx \\
&= \int_0^\infty f'g'x^{\alpha+1}\,dx - \int_0^\infty fg\alpha^2 x^{\alpha-1}\,dx + [fg\alpha x^\alpha]_0^\infty + \int_0^\infty fg\alpha^2 x^{\alpha-1}\,dx \\
&= \int_0^\infty f'g'x^{\alpha+1}\,dx + [fg\alpha x^\alpha]_0^\infty \\
&= \mathscr{E}^{(\alpha)}(f,g) + [fg\alpha x^\alpha]_0^\infty.
\end{aligned}
$$

境界の影響が分かるように書いているが，C_{00} の条件から境界の影響は消える．閉包を取って $\mathscr{E}^{(-\alpha)}$ と $\mathscr{E}^{(\alpha)}$ が R の下で同型であることが分かる．但し $\mathscr{E}^{(\alpha)}$ は境界条件が必要なときは C_{00} の極限であることから Dirichlet 境界条件が対応することが分かるのである．この種の議論はこの後も実際には必要であるが，生成作用素を使った形式的な計算の方が簡便で直感的に分かりやすいのでそちらの計算だけ行う．

微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^{-\alpha}B(1-\alpha;\lambda x)] &= -\alpha x^{-\alpha-1}B(1-\alpha;\lambda x) + x^{-\alpha}B'(1-\alpha;\lambda x)\lambda \\
&= x^{-\alpha-1}\{-\alpha B(1-\alpha;\lambda x) + \lambda x B'(1-\alpha;\lambda x)\} \\
&= x^{-\alpha-1}B(-\alpha;\lambda x)
\end{aligned}
$$

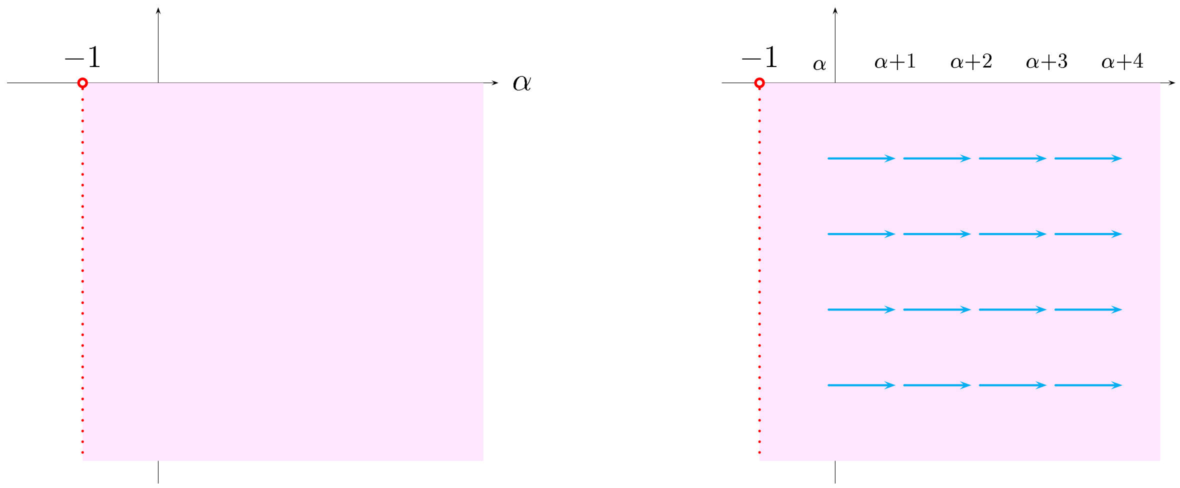
となり，α を $\alpha+1$ としたときの固有関数になっている．双対作用素は

$$
\begin{aligned}
&-D^*[x^{-\alpha-1}B(-\alpha;\lambda x)] \\
&\quad = x\frac{d}{dx}[x^{-\alpha-1}B(-\alpha;\lambda x)] + (\alpha+1)x^{-\alpha-1}B(-\alpha;\lambda x)
\end{aligned}
$$

$$= -(\alpha+1)xx^{-\alpha-2}B(-\alpha;\lambda x) + xx^{-\alpha-1}B'(-\alpha;\lambda x)\lambda + (\alpha+1)x^{-\alpha-1}B(-\alpha;\lambda x)$$
$$= \lambda x^{-\alpha}B'(-\alpha;\lambda x)$$
$$= \lambda x^{-\alpha}B(1-\alpha;\lambda x) \quad (\because \ (11.6))$$

となって逆の対応が得られる．

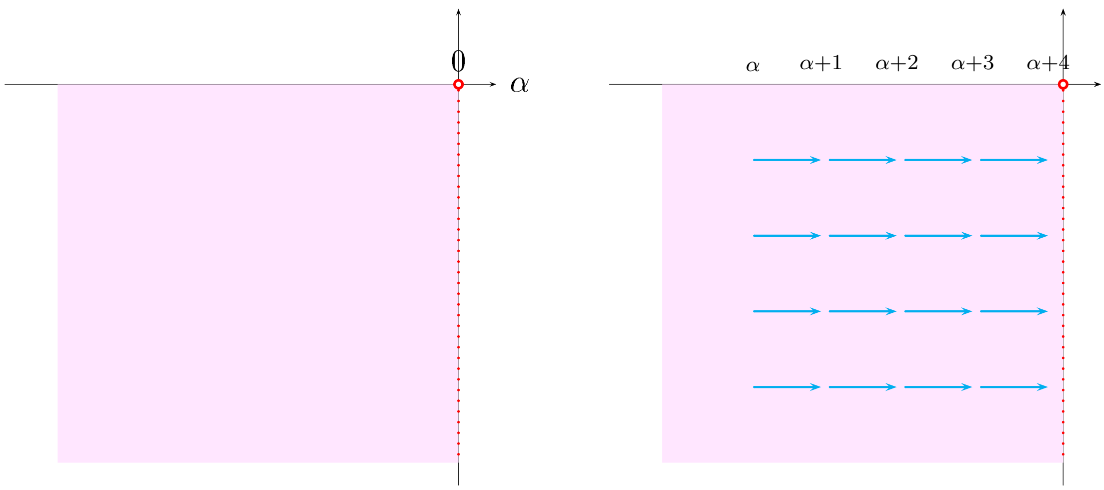
最後に固有値の配置を図示しておこう．$\alpha > -1$ のときの entrance 系列の固有値を見よう．



the spectrum of $\mathfrak{A}$　　微分による固有関数の対応関係

Bessel 拡散過程のスペクトル: entrance family

$\alpha < 0$ の exit 系列の場合は



the spectrum of $\mathfrak{A}$　　微分による固有関数の対応関係

Bessel 拡散過程のスペクトル: exit family

13. 平方 Bessel 過程とスペクトル分解

第 12節 で平方 Bessel 過程の固有関数として超幾何関数について議論した．平方 Bessel 過程の生成作用素は連続スペクトルしか持たないので，固有関数は一般化された意味である．このことを数学的に厳密に見ようとすれば，スペクトル分解を求めればよい．ここでは，本質的に Hankel 変換がスペクトル分解を与えていることを示す．

この節では，パラメーター α は $\alpha > -1$ の制約のもとでのみ考える．(12.1) で次の作用素を導入した．

$$x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1)\frac{d}{dx}. \tag{13.1}$$

Hilbert 空間は $L^2([0,\infty), x^\alpha\, dx)$ で考える．空間は $[0,\infty)$ に固定されているので，$L^2(x^\alpha\, dx)$ のように測度だけ記すことにする．作用素 $x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1)\frac{d}{dx}$ と unitarily equivalent な作用素をいくつか求めておく．まず次の図式の可換性を証明しよう．

$$\begin{tikzcd}
L^2(x^\alpha\, dx) \arrow[r, "4(x\frac{d^2}{dx^2}+(\alpha+1)\frac{d}{dx})"] \arrow[d, "I"'] & L^2(x^\alpha\, dx) \arrow[d, "I"] & x^{-\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{4\xi x}),\quad -4\xi \\
L^2(x^{2\alpha+1}\, dx) \arrow[r, "\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\alpha+1}{x}\frac{d}{dx}"] \arrow[d, "J"'] & L^2(x^{2\alpha+1}\, dx) \arrow[d, "J"] & x^{-\alpha}J_\alpha(\xi x),\quad -\xi^2 \\
L^2(dx) \arrow[r, "\frac{d^2}{dx^2}-(\alpha^2-\frac{1}{4})\frac{1}{x^2}"] & L^2(dx) & \sqrt{x}J_\alpha(\xi x),\quad -\xi^2 \\
L^2(x\, dx) \arrow[r, "\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{\alpha^2}{x^2}"] \arrow[u, "K"] & L^2(x\, dx) \arrow[u, "K"'] & J_\alpha(\xi x),\quad -\xi^2
\end{tikzcd} \tag{13.2}$$

ここで

$$If(x) = \sqrt{2}f(x^2), \quad Jf(x) = x^{\alpha+\frac{1}{2}}f(x), \quad Kf(x) = \sqrt{x}f(x)$$

である．I が unitary であることは

$$\int_0^\infty If(x)^2\, x^{2\alpha+1}\, dx = \int_0^\infty 2f(x^2)^2 x^{2\alpha+1}\, dx = \int_0^\infty f(y)^2\, y^\alpha\, dy \quad (y = x^2,\ dy = 2xdx)$$

から分かる．J, K が unitary であることは明らかである．

図式の可換性を示そう．

$$(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\alpha+1}{x}\frac{d}{dx})[f(x^2)] = \frac{d^2}{dx^2}[f(x^2)] + \frac{2\alpha+1}{x}\frac{d}{dx}[f(x^2)]$$

$$
\begin{aligned}
&= (f'(x^2)2x)' + \frac{2\alpha+1}{x} f'(x^2)2x \\
&= f''(x^2)4x^2 + 2f'(x^2) + 2(2\alpha+1)f'(x^2) \\
&= 4x^2 f''(x^2) + 4(\alpha+1)f'(x^2) \\
&= 4(yf''(y) + (\alpha+1)f'(y)). \quad (y = x^2)
\end{aligned}
$$

これで上側の可換性が示せた．次に下側の可換性を見よう．

$$
\begin{aligned}
&\Big(\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha^2 - \frac{1}{4})\frac{1}{x^2}\Big)[x^{\alpha+\frac{1}{2}} f(x)] \\
&\quad = \frac{d^2}{dx^2}[x^{\alpha+\frac{1}{2}} f(x)] - (\alpha^2 - \frac{1}{4})x^{\alpha-\frac{3}{2}} f(x) \\
&\quad = \frac{d}{dx}[(\alpha+\frac{1}{2})x^{\alpha-\frac{1}{2}} f(x) + x^{\alpha+\frac{1}{2}} f'(x)] - (\alpha^2 - \frac{1}{4})x^{\alpha-\frac{3}{2}} f(x) \\
&\quad = (\alpha+\frac{1}{2})(\alpha-\frac{1}{2})x^{\alpha-\frac{3}{2}} f(x) + (\alpha+\frac{1}{2})x^{\alpha-\frac{1}{2}} f'(x) \\
&\qquad + (\alpha+\frac{1}{2})x^{\alpha-\frac{1}{2}} f'(x) + x^{\alpha+\frac{1}{2}} f''(x) - (\alpha^2 - \frac{1}{4})x^{\alpha-\frac{3}{2}} f(x) \\
&\quad = (\alpha^2 - \frac{1}{4})x^{\alpha-\frac{3}{2}} f(x) + (2\alpha+1)x^{\alpha-\frac{1}{2}} f'(x) + x^{\alpha+\frac{1}{2}} f''(x) - (\alpha^2 - \frac{1}{4})x^{\alpha-\frac{3}{2}} f(x) \\
&\quad = (2\alpha+1)x^{\alpha-\frac{1}{2}} f'(x) + x^{\alpha+\frac{1}{2}} f''(x) \\
&\quad = x^{\alpha+\frac{1}{2}}(f''(x) + \frac{2\alpha+1}{x} f'(x)).
\end{aligned}
$$

これで下側の可換性が示せた．また右端に書いているのは，固有値と固有関数である．

我々の興味は，$L^2(x^\alpha)$ での作用であるが，通常の Bessel 関数は $L^2(xdx)$ で考えるのが一番自然である．これを基本に考えていくことにする．従って必要なのは，次の図式の可換性である．

(13.3)
$$
\begin{array}{ccccc}
L^2(x^\alpha\,dx) & \xrightarrow{\;x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1)\frac{d}{dx}\;} & L^2(x^\alpha\,dx) & \qquad & x^{-\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{4\xi x}), \quad -\xi \\
\Phi \uparrow & & \uparrow \Phi & & \\
L^2(x\,dx) & \xrightarrow{\;\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\alpha^2}{x^2}\;} & L^2(x\,dx) & \qquad & J_\alpha(\sqrt{\xi} x), \quad -\xi
\end{array}
$$

ここで

$$
\Phi f(x) = \sqrt{2} x^{-\alpha/2} f(\sqrt{4x}), \quad \Phi^{-1} g(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\frac{y}{2}\Big)^\alpha g\Big(\frac{y^2}{4}\Big)
$$

である．この可換性を見るには

$$
\Big(x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1)\frac{d}{dx}\Big)[x^{-\alpha/2} f(\sqrt{4x})]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(x\frac{d}{dx} + (\alpha+1)\right)\left(-\frac{\alpha}{2}x^{-(\alpha/2)-1}f(\sqrt{4x}) + x^{-\alpha/2}f'(\sqrt{4x})\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\
&= x\Big\{\frac{\alpha}{2}(\frac{\alpha}{2}+1)x^{-(\alpha/2)-2}f(\sqrt{4x}) - 2\frac{\alpha}{2}x^{-(\alpha/2)-1}f'(\sqrt{4x})\frac{1}{\sqrt{x}} \\
&\qquad + x^{-\alpha/2}f''(\sqrt{4x})\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} + x^{-\alpha/2}f'(\sqrt{4x})(-\frac{1}{2x\sqrt{x}})\Big\} \\
&\quad - \frac{\alpha}{2}(\alpha+1)x^{-(\alpha/2)-1}f(\sqrt{4x}) + (\alpha+1)x^{-\alpha/2}f'(\sqrt{4x})\frac{1}{\sqrt{x}} \\
&= x^{-\alpha/2}\Big\{\frac{\alpha}{2}(\frac{\alpha}{2}+1)x^{-1}f(\sqrt{4x}) - \alpha x^{-1/2}f'(\sqrt{4x}) + f''(\sqrt{4x}) \\
&\qquad - \frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{4x}) - \frac{\alpha}{2}(\alpha+1)x^{-1}f(\sqrt{4x}) + (\alpha+1)x^{-1/2}f'(\sqrt{4x})\Big\} \\
&= x^{-\alpha/2}\Big\{f''(\sqrt{4x}) + (\alpha+1-\alpha-\frac{1}{2})x^{-1/2}f'(\sqrt{4x}) + \frac{\alpha}{2}(\frac{\alpha}{2}+1-1-\alpha)x^{-1}f(\sqrt{4x})\Big\} \\
&= x^{-\alpha/2}\Big\{f''(\sqrt{4x}) + \frac{1}{\sqrt{4x}}f'(\sqrt{4x}) - \frac{\alpha^2}{4x}f(\sqrt{4x})\Big\}.
\end{aligned}
$$

これで可換性が示せた．Φ が unitary であることは

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \Phi f(x)^2 x^\alpha\,dx &= \int_0^\infty 2x^{-\alpha}f(\sqrt{4x})^2 x^\alpha\,dx \\
&= 2\int_0^\infty f(\sqrt{4x})^2\,dx \\
&= 2\int_0^\infty f(\sqrt{4x})^2\,dx \quad (y^2=4x,\ 2ydy=4dx) \\
&= \int_0^\infty f(y)^2 y\,dy
\end{aligned}
$$

から確かめられる．

さて，それぞれの作用素のスペクトル分解を求めよう．そのために Hankel 変換を用いる．Hankel 変換は，作用素 $\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha^2 - \frac{1}{4})\frac{1}{x^2}$ のスペクトル分解を与えるものである．Hankel 変換 $\mathscr{H}_\alpha$ は次で与えられる．

$$
\mathscr{H}_\alpha[f](\xi) = \int_0^\infty f(x)\sqrt{\xi x}J_\alpha(\xi x)\,dx. \tag{13.4}
$$

これを使うと f が次のように表される．

$$
f(x) = \int_0^\infty \mathscr{H}_\alpha[f](\xi)\sqrt{\xi x}J_\alpha(\xi x)\,d\xi. \tag{13.5}
$$

さらに次の Perseval の等式が成立する．

$$
\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(x)\sqrt{\xi x}J_\alpha(\xi x)\,dx\right\}^2 d\xi = \int_0^\infty f(x)^2\,dx \tag{13.6}
$$

Hnakel 変換は $L^2(x\,dx)$ での変換として定義されることも多い．この場合は f を $\sqrt{x}f(x)$ に替えるだけでよい．従って

$$H_\alpha[f](\xi) = \int_0^\infty f(x)J_\alpha(\xi x)x\,dx \tag{13.7}$$

と定義すれば (13.5) から

$$\begin{aligned}\sqrt{x}f(x) &= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \sqrt{y}f(y)\sqrt{\xi y}J_\alpha(\xi y)\,dy\right\}\sqrt{\xi x}J_\alpha(\xi x)\,d\xi \\ &= \sqrt{x}\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(y)J_\alpha(\xi y)y\,dy\right\}J_\alpha(\xi x)\xi\,d\xi.\end{aligned}$$

よって

$$f(x) = \int_0^\infty H_\alpha[f](\xi)J_\alpha(\xi x)\xi\,d\xi \tag{13.8}$$

が成り立つ．Perseval の等式も (13.6) で f の代わりに $\sqrt{x}f(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)^2 x\,dx &= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty \sqrt{x}f(x)\sqrt{\xi x}J_\alpha(\xi x)\,dx\right\}^2 d\xi \\ &= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(x)J_\alpha(\xi x)x\,dx\right\}^2 \xi\,d\xi\end{aligned}$$

が得られる．

これらを使って次を示す．

命題 13.1. $L^2(x^{2\alpha+1}\,dx)$ において Hankel 変換を

$$H_\alpha[f](\xi) = \int_0^\infty f(x)(\xi x)^{-\alpha}J_\alpha(\xi x)x^{2\alpha+1}\,dx \tag{13.9}$$

で定義すると

$$f(x) = \int_0^\infty H_\alpha[f](\xi)(\xi x)^{-\alpha}J_\alpha(\xi x)\xi^{2\alpha+1}\,d\xi \tag{13.10}$$

および次の Perseval の等式が成立する．

$$\int_0^\infty f(x)^2 x^{2\alpha+1}\,dx = \int_0^\infty H_\alpha[f](\xi)^2\xi^{2\alpha+1}\,d\xi. \tag{13.11}$$

証明 (13.5) を書き直すと

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{\xi x}J_\alpha(\xi x)\,d\xi\int_0^\infty f(y)\sqrt{\xi y}J_\alpha(\xi y)\,dy.$$

f の代わりに $x^{\alpha+\frac{1}{2}}f$ を代入して

$$x^{\alpha+\frac{1}{2}}f(x) = \int_0^\infty \sqrt{\xi x}J_\alpha(\xi x)\,d\xi \int_0^\infty y^{\alpha+\frac{1}{2}}f(y)\sqrt{\xi y}J_\alpha(\xi y)\,dy.$$

整理すると

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^\infty x^{-\alpha}\sqrt{\xi}J_\alpha(\xi x)\,d\xi \int_0^\infty y^{\alpha+1}f(y)\sqrt{\xi}J_\alpha(\xi y)\,dy \\
&= \int_0^\infty x^{-\alpha}\xi J_\alpha(\xi x)\,d\xi \int_0^\infty f(y)y^{-\alpha}J_\alpha(\xi y)y^{2\alpha+1}\,dy \\
&= \int_0^\infty x^{-\alpha}\xi J_\alpha(\xi x)\,d\xi \int_0^\infty f(y)\xi^{\alpha}(\xi y)^{-\alpha}J_\alpha(\xi y)y^{2\alpha+1}\,dy \\
&= \int_0^\infty (\xi x)^{-\alpha}J_\alpha(\xi x)\xi^{2\alpha+1}\,d\xi \int_0^\infty f(y)(\xi y)^{-\alpha}J_\alpha(\xi y)y^{2\alpha+1}\,dy.
\end{aligned}$$

よって Hankel 変換 H_α を (13.9) で定義すると

$$f(x) = \int_0^\infty H_\alpha[f](\xi)(\xi x)^{-\alpha}J_\alpha(\xi x)\xi^{2\alpha+1}\,d\xi$$

が成立していることが分かる.

また Perseval の等式は (13.6) に f の代わりに $x^{\alpha+\frac{1}{2}}f$ を代入して

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)^2x^{2\alpha+1}\,dx &= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty x^{\alpha+1}f(x)\sqrt{\xi}J_\alpha(\xi x)\,dx\right\}^2 d\xi \\
&= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(x)(\xi x)^{-\alpha}\xi^{\alpha}\sqrt{\xi}J_\alpha(\xi x)x^{2\alpha+1}\,dx\right\}^2 d\xi \\
&= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(x)(\xi x)^{-\alpha}J_\alpha(\xi x)x^{2\alpha+1}\,dx\right\}^2 \xi^{2\alpha+1}\,d\xi \\
&= \int_0^\infty H_\alpha[f](\xi)^2\xi^{2\alpha+1}\,d\xi.
\end{aligned}$$

これは (13.11) を意味している. □

同様の操作をすると $L^2(x^\alpha\,dx)$ におけるスペクトル分解も求まる.

定理 13.2. $L^2(x^\alpha\,dx)$ において Hankel 変換を

$$\hat{H}_\alpha[f](\xi) = \int_0^\infty f(x)(\xi x)^{-\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{4\xi x})x^\alpha\,dx \tag{13.12}$$

で定義すると

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{H}_\alpha[f](\xi)(\xi x)^{-\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{4\xi x})\xi^\alpha\,d\xi \tag{13.13}$$

および次の Perseval の等式が成立する.

$$\int_0^\infty f(x)^2x^\alpha\,dx = \int_0^\infty \hat{H}_\alpha[f](\xi)^2\xi^\alpha\,d\xi. \tag{13.14}$$

証明 命題 13.1 から

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^\infty H_\alpha[f](\xi)(\xi x)^{-\alpha} J_\alpha(\xi x)\xi^{2\alpha+1}\,d\xi \\
&= \int_0^\infty (\xi x)^{-\alpha} J_\alpha(\xi x)\xi^{2\alpha+1}\,d\xi \int_0^\infty f(y)(\xi y)^{-\alpha} J_\alpha(\xi y) y^{2\alpha+1}\,dy.
\end{aligned}
$$

ここで $f(x)$ の代わりに $f(x^2)$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
f(x^2) &= \int_0^\infty (\xi x)^{-\alpha} J_\alpha(\xi x)\xi^{2\alpha+1}\,d\xi \int_0^\infty f(y^2)(\xi y)^{-\alpha} J_\alpha(\xi y) y^{2\alpha+1}\,dy \\
&= \int_0^\infty x^{-\alpha} J_\alpha(\xi x)\xi\,d\xi \int_0^\infty f(y^2) y^\alpha J_\alpha(\xi y) y\,dy \\
&= \int_0^\infty (x^2)^{-\alpha/2} J_\alpha(\xi x)\xi\,d\xi \int_0^\infty f(z) z^{\alpha/2} J_\alpha(\xi\sqrt{z})\,\frac{dz}{2} \quad \left(z = y^2,\ \frac{dz}{2} = y\,dy\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2)^{-\alpha/2} J_\alpha(\xi x)\xi\,d\xi \int_0^\infty f(z) z^{\alpha/2} J_\alpha(\xi\sqrt{z}) z^\alpha\,dz.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-\alpha/2} J_\alpha(\xi\sqrt{x})\xi\,d\xi \int_0^\infty f(z) z^{-\alpha/2} J_\alpha(\xi\sqrt{z}) z^\alpha\,dz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{4\eta x})2\,d\eta \int_0^\infty f(z) z^{-\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{4\eta z}) z^\alpha\,dz \quad (\xi^2 = 4\eta, \quad \xi d\xi = 2d\eta) \\
&= \int_0^\infty (\eta x)^{-\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{4\eta x})\eta^\alpha\,d\eta \int_0^\infty f(z)(\eta z)^{-\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{4\eta z}) z^\alpha\,dz.
\end{aligned}
$$

これで (13.13) が示せた．Perseval の公式は (13.11) から

$$
\int_0^\infty f(x)^2 x^{2\alpha+1}\,dx = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(x)(\xi x)^{-\alpha} J_\alpha(\xi x) x^{2\alpha+1}\,dx\right\}^2 \xi^{2\alpha+1}\,d\xi.
$$

ここで $f(x)$ の代わりに $f(x)^2$ を代入して

$$
\int_0^\infty f(x^2)^2 x^{2\alpha+1}\,dx = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(x^2)(\xi x)^{-\alpha} J_\alpha(\xi x) x^{2\alpha+1}\,dx\right\}^2 \xi^{2\alpha+1}\,d\xi.
$$

$y = x^2$ と変数変換すると $\frac{dy}{2} = xdx$ であるから

$$
\int_0^\infty f(y)^2 y^\alpha\,\frac{dy}{2} = \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(y)\xi^{-\alpha} y^{-\alpha/2} J_\alpha(\xi x) y^\alpha\,\frac{dy}{2}\right\}^2 \xi^{2\alpha+1}\,d\xi.
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(y)^2 y^\alpha\,dy &= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(y) y^{-\alpha/2} J_\alpha(\xi\sqrt{y}) y^\alpha\,dy\right\}^2 \xi\,\frac{d\xi}{2} \\
&= \int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(y) y^{-\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{4\eta y}) y^\alpha\,dy\right\}^2 d\eta
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(y)(\eta y)^{-\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{4\eta y}) y^\alpha \, dy \right\}^2 \eta^\alpha \, d\eta$$
$$= \int_0^\infty \hat{H}_\alpha[f](\eta)^2 \eta^\alpha \, d\eta.$$

これで (13.14) が示せた． □

さて，(11.22) を使えば Hankel 変換 $\hat{H}_\alpha$ は次のように書き換えることが出来る．

$$\hat{H}_\alpha[f](\xi) = \int_0^\infty f(x) B(\alpha+1; -\xi x) x^\alpha \, dx. \tag{13.15}$$

以上で $\alpha > -1$ の場合に，$B(\alpha+1; -\xi x)$ を固有関数とみなしてよいことが証明できた．

14. Hankel 変換の解析

Hankel 変換

Hankel 変換は $\alpha > -1$ で定義されている．きちんとした証明が載っていないので，それの助けになるようにいくつか公式を準備しておく．ここで扱う Hankel 変換は次の形のものである．

$$\hat{H}_\alpha f(\xi) = \int_0^\infty f(x) B(\alpha+1; -\xi x) x^\alpha \, dx. \tag{14.1}$$

この形で Hankel 変換を定義したものを見つけられないので，直接証明を付けて行く．$\hat{H}_\alpha$ の定義域をはっきりさせておこう．(12.12) で見たように $B(\alpha+1; -x)$ は $x \to \infty$ のとき $O(x^{-(1+2\alpha)/4})$ であった．よって $\alpha \geq -1/2$ のとき有界であるが，$-1 < \alpha < -1/2$ のときは有界でなくなる．解析性はあるから連続関数ではある．$\hat{H}_\alpha$ の定義域として (14.1) の積分が意味があるというのが一つの条件にはなるであろう．そこで次のような関数 μ_α を用意する．

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \text{ or } \alpha \geq -\frac{1}{2}, \\ x^{(2\alpha-1)/4}, & \text{if } x > 1 \text{ snd } -1 < \alpha < -\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{14.2}$$

そこで $\hat{H}_\alpha$ の定義域として $L^1(\mu_\alpha \, dx)$ を取る．即ち $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ のとき，x が大きいところでの可積分条件を強くする．実際このとき $x^{(2\alpha-1)/4}$ の $x \geq 1$ での挙動は

$$x^\alpha \leq x^{(2\alpha-1)/4} \tag{14.3}$$

となって $L^1(\mu_\alpha \, dx) \subset L^1(x^\alpha \, dx)$ となり，定義域が狭まる．これで B が増大しても，(14.1) の積分が有限で確定することが示せる．$B(\alpha+1; -\xi x)$ の評価を考えれば，$f \in L^1(\mu_\alpha \, dx)$ に対し $\hat{H}_\alpha f(\xi)$ が すべての点 $\xi \in [0, \infty)$ に対して有限確定で定まり，ξ の連続関数であることが分かる．$\hat{H}_\alpha f(\xi)$ の評価をきちんとすると次が得られる．

命題 14.1. $\alpha > -1$ とする．このとき適当な定数 C_α が存在し

$$|\hat{H}_\alpha f(\xi)| \leq C_\alpha \{1 \vee (\xi \vee 1)^{-(2\alpha+1)/4}\} \|f\|_{L^1(\mu_\alpha\, dx)}. \tag{14.4}$$

が成立する．右辺の意味は

$$1 \vee (\xi \vee 1)^{-(2\alpha+1)/4} = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq \xi \leq 1 \text{ or } \alpha \geq -\frac{1}{2} \\ \xi^{-(2\alpha+1)/4}, & \text{if } \xi > 1 \text{ and } -1 < \alpha < -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{14.5}$$

である．

証明 場合分けをして示す.
(I) $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ のとき.
このときは $B(\alpha+1; -x)$ は有界であるから $|B(\alpha+1; -x)| \leq C_\alpha$ となる．

$$|\hat{H}_\alpha f(\xi)| \leq \int_0^\infty |f(x)||B(\alpha+1; -\xi x)| x^\alpha\, dx \leq C_\alpha \int_0^\infty |f(x)| x^\alpha\, dx = C_\alpha \|f\|_{L^1(\mu_\alpha\, dx)}.$$

(II) $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ のとき.
$B(\alpha+1; -x)$ の評価は

$$|B(\alpha+1; -x)| \leq C_\alpha (1 \vee x)^{-(2\alpha+1)/4}$$

である．よって

$$\begin{aligned}
|\hat{H}_\alpha f(\xi)| &\leq \int_0^1 |f(x)||B(\alpha+1; -\xi x)| x^\alpha\, dx + \int_1^\infty |f(x)||B(\alpha+1; -\xi x)| x^\alpha\, dx \\
&\leq \int_0^1 1_{\{\xi x \leq 1\}} |f(x)||B(\alpha+1; -\xi x)| x^\alpha\, dx + \int_0^1 1_{\{\xi x > 1\}} |f(x)||B(\alpha+1; -\xi x)| x^\alpha\, dx \\
&\quad + \int_1^\infty 1_{\{\xi x \leq 1\}} |f(x)||B(\alpha+1; -\xi x)| x^\alpha\, dx \\
&\quad + \int_1^\infty 1_{\{\xi x > 1\}} |f(x)||B(\alpha+1; -\xi x)| x^\alpha\, dx \\
&\leq C_\alpha \biggl\{ \int_0^1 1_{\{\xi x \leq 1\}} |f(x)| x^\alpha\, dx + \int_0^1 1_{\{\xi x > 1\}} |f(x)| (\xi x)^{-(2\alpha+1)/4} x^\alpha\, dx \\
&\qquad + \int_1^\infty 1_{\{\xi x \leq 1\}} |f(x)| x^\alpha\, dx + \int_1^\infty 1_{\{\xi x > 1\}} |f(x)| (\xi x)^{-(2\alpha+1)/4} x^\alpha\, dx \biggr\} \\
&\leq C_\alpha \biggl\{ \int_0^1 1_{\{\xi x \leq 1\}} |f(x)| x^\alpha\, dx + \xi^{-(2\alpha+1)/4} \int_0^1 1_{\{\xi x > 1\}} |f(x)| x^{-(2\alpha+1)/4} x^\alpha\, dx \\
&\qquad + \int_1^\infty 1_{\{\xi x \leq 1\}} |f(x)| x^\alpha\, dx + \xi^{-(2\alpha+1)/4} \int_1^\infty 1_{\{\xi x > 1\}} |f(x)| x^{-(2\alpha+1)/4} x^\alpha\, dx \biggr\} \\
&\leq C_\alpha \biggl\{ \int_0^1 1_{\{\xi x \leq 1\}} |f(x)| x^\alpha\, dx + \xi^{-(2\alpha+1)/4} \int_0^1 1_{\{\xi x > 1\}} |f(x)| x^\alpha\, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \int_1^\infty 1_{\{\xi x \le 1\}} |f(x)| x^{(2\alpha-1)/4}\, dx + \xi^{-(2\alpha+1)/4} \int_1^\infty 1_{\{\xi x > 1\}} |f(x)| x^{(2\alpha-1)/4}\, dx \Big\} \\
&\le C_\alpha (\xi \vee 1)^{-(2\alpha+1)/4} \Big\{ \int_0^1 |f(x)| x^\alpha\, dx + \int_1^\infty |f(x)| x^{(2\alpha-1)/4}\, dx \Big\} \\
&= C_\alpha (\xi \vee 1)^{-(2\alpha+1)/4} \|f\|_{L^1(\mu_\alpha dx)}.
\end{aligned}
$$

以上で示せた. □

命題 14.2. $\alpha > -1$ とする. このとき $f, g \in L^1(\mu_\alpha\, dx)$ に対し, $f\hat{H}_\alpha g \in L^1(x^\alpha\, dx)$ で次が成立する.

$$
\|f\hat{H}_\alpha g\|_{L^1(x^\alpha)} \le C_\alpha \|f\|_{L^1(\mu_\alpha\, dx)} \|g\|_{L^1(\mu_\alpha\, dx)}. \tag{14.6}
$$

ここで C_α は 命題 14.1 で現れた定数である. さらに次が成り立つ.

$$
\int_0^\infty \hat{H}_\alpha f(x) g(x) x^\alpha\, dx = \int_0^\infty f(\xi) \hat{H}_\alpha g(\xi) \xi^\alpha\, d\xi \tag{14.7}
$$

証明 まず $\alpha \ge -\frac{1}{2}$ のときを示す. このとき $B(\alpha+1; -x)$ は有界で C_α で抑えられる. 従って

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty |f(\xi)||\hat{H}_\alpha g(\xi)| \xi^\alpha\, d\xi &\le \int_0^\infty |f(\xi)| \{ \int_0^\infty |B(\alpha+1; -\xi x) g(x)| x^\alpha\, dx \} \xi^\alpha\, d\xi \\
&\le \int_0^\infty |f(\xi)| C_\alpha \|g\|_{L^1(x^\alpha\, dx)} \xi^\alpha\, d\xi \\
&= C_\alpha \|f\|_{L^1(\xi^\alpha\, d\xi)} \|g\|_{L^1(x^\alpha\, dx)}
\end{aligned}
$$

である. この可積分性の条件から Fubini の定理が使えて,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(\xi) \hat{H}_\alpha g(\xi) \xi^\alpha\, d\xi &= \int_0^\infty f(\xi) \{ \int_0^\infty B(\alpha+1; -\xi x) g(x) x^\alpha\, dx \} \xi^\alpha\, d\xi \\
&= \int_0^\infty g(x) \{ \int_0^\infty B(\alpha+1; -\xi x) f(\xi) \xi^\alpha\, d\xi \} x^\alpha\, dx \\
&= \int_0^\infty g(x) \hat{H}_\alpha f(x) x^\alpha\, dx.
\end{aligned}
$$

これで示せた.

次に $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ のとき. このときも同様で, 可積分条件を確かめればよい. 命題 14.1 の証明中の結果を使って

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \Big\{ \int_0^\infty |g(x)||B(\alpha+1; -\xi x)| x^\alpha\, dx \Big\} |f(\xi)| \xi^\alpha\, d\xi \\
&\le \int_0^\infty C_\alpha (1 \vee \xi)^{-(2\alpha+1)/4} \|g\|_{L^1(\mu_\alpha\, dx)} |f(\xi)| \xi^\alpha\, d\xi \\
&\le C_\alpha \|g\|_{L^1(\mu_\alpha\, dx)} \Big\{ \int_0^1 |f(\xi)| \xi^\alpha\, d\xi + \int_1^\infty |f(\xi)| \xi^{(2\alpha-1)/4}\, d\xi \Big\} \\
&= C_\alpha \|g\|_{L^1(\mu_\alpha\, dx)} \|f\|_{L^1(\mu_\alpha\, d\xi)} < \infty.
\end{aligned}
$$

あとは Fubini の定理を使って同様に示せる. □

Plancherel の等式

具体的に Hankel 変換が計算できる例を与えておこう．

命題 14.3. $\lambda>0$ に対し，$f(x)=e^{-\lambda x}$ と定めるとき，

$$\hat{H}_\alpha f(\xi)=\lambda^{-\alpha-1}e^{-\xi/\lambda} \tag{14.8}$$

が成立する．

証明 計算には命題 11.3 の (11.13) を使えばよい．

$$\begin{aligned}
\hat{H}_\alpha f(\xi)&=\int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi x)e^{-\lambda x}x^\alpha\,dx\\
&=\int_0^\infty B(\alpha+1;-u)e^{-u(\lambda/\xi)}\Big(\frac{u}{\xi}\Big)^\alpha\frac{du}{\xi}\quad(u=\xi x,\ du=\xi dx)\\
&=\xi^{-\alpha-1}\int_0^\infty B(\alpha+1;-u)u^\alpha e^{-u(\lambda/\xi)}\,du\\
&=\xi^{-\alpha-1}(\frac{\lambda}{\xi})^{-\alpha-1}e^{-\xi/\lambda}\\
&=\lambda^{-\alpha-1}e^{-\xi/\lambda}.
\end{aligned}$$

□

上の命題はいくつかのことを示唆する．$\lambda^{-\alpha-1}e^{-x/\lambda}$ に $\hat{H}_\alpha$ を作用させてみよう．これもやはり指数関数であるから上の計算が再び使えて

$$\begin{aligned}
\hat{H}_\alpha\lambda^{-\alpha-1}e^{-x/\lambda}&=\lambda^{-\alpha-1}\hat{H}_\alpha e^{-x/\lambda}\\
&=\lambda^{-\alpha-1}(\frac{1}{\lambda})^{-\alpha-1}e^{-\lambda x/\lambda}\\
&=e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

となって元の関数に戻っている．このことから

$$\hat{H}_\alpha^2=I$$

が成り立っていることが予想できる．このことを正確に定式化しよう．$f\in L^1(\mu_\alpha)$ であれば $\hat{H}_\alpha f$ が定義できるから $\hat{H}_\alpha f\in L^1(\mu_\alpha)$ をさらに仮定すれば $\hat{H}_\alpha^2$ が定義できる．このことに注意して上のことを示す．

ここで基本の測度は $x^\alpha\,dx$ であったことを思い出しておこう．L^2 内積を

$$(f,g)_2=\int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha\,dx \tag{14.9}$$

で定め，右辺の積分が意味があれば， pairing の記号として (,) を混用する．

命題 14.4. $f\in L^1(\mu_\alpha)$ がさらに $\hat{H}_\alpha f\in L^1(\mu_\alpha)$ を満たせば

$$\hat{H}_\alpha^2 f=f \tag{14.10}$$

が成立する．

証明 (14.7) を使って

$$\begin{aligned}(\hat{H}_\alpha^2 f, e^{-\lambda x})_2 &= (\hat{H}_\alpha f, \hat{H}_\alpha(e^{-\lambda x}))_2\\ &= (f, \hat{H}_\alpha^2(e^{-\lambda x}))_2 \quad (\because \hat{H}_\alpha(e^{-\lambda x}) \in L^1(\mu_\alpha))\\ &= (f, e^{-\lambda x})_2.\end{aligned}$$

これから

$$(\hat{H}_\alpha^2 f - f, e^{-\lambda x})_2 = 0.$$

$\lambda > 0$ は任意に動かせるから $\hat{H}_\alpha^2 f - f = 0$ が従う．あるいは Laplace 変換の一意性からと言ってもよい． □

さて $f \in L^1(\mu_\alpha)$ で $\hat{H}_\alpha f \in L^1(\mu_\alpha)$ も満たす関数全体を $\mathbf{M}$ と表す．このとき

$$\mathbf{M} \subset L^2(x^\alpha\, dx) \tag{14.11}$$

が成り立つ．実際 $f \in \mathbf{M}$ のとき，$g = \hat{H} f$ とおくと，命題 14.4 から $\hat{H} g = f$ が成り立つ．よって命題 14.2 から

$$f^2 = f \hat{H} g \in L^1(x^\alpha, dx)$$

が成立する．

$\mathbf{M}$ は指数関数 $e^{-\lambda x}$ を含むから $\mathbf{M}$ は $L^1(\mu_\alpha)$ でも $L^2(x^\alpha dx)$ でも稠密である．さらに次の補題が成り立つ．

命題 14.5. (Riemann-Lebesgue) $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ のとき $f \in L^1(\mu_\alpha)$ に対し

$$\lim_{\xi\to\infty} \hat{H}_\alpha f(\xi) = 0 \tag{14.12}$$

が成立する．$-1 < \alpha \leq -\frac{1}{2}$ のときは，$f \in L^1(\mu_\alpha)$ に対し

$$\lim_{\xi\to\infty} \xi^{(2\alpha+1)/4} \hat{H}_\alpha f(\xi) = 0 \tag{14.13}$$

が成立する．

証明 (I) $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ のとき．

$f \in L^1(\mu_\alpha)$ として任意に $\varepsilon > 0$ をとる．また C_α を命題 14.1 のようにとる．すると指数関数 $e^{-\lambda x}$ の 1 次結合 φ で $\|f - \varphi\|_{L^1(\mu_\alpha)} \leq \varepsilon / C_\alpha$ となるものが取れる．よって

$$\|\hat{H}_\alpha f - \hat{H}_\alpha \varphi\|_\infty \leq C_\alpha \|f - \varphi\|_{L^1(\mu_\alpha)} \leq \varepsilon$$

となる．さらに $\hat{H}_\alpha \varphi$ はやはり指数関数の 1 次結合だから，ある $N > 0$ が存在して $\xi \geq N$ ならば $|\hat{H}_\alpha \varphi(\xi)| \leq \varepsilon$ とできる．よってこのとき

$$|\hat{H}_\alpha f(\xi)| \leq |\hat{H}_\alpha f(\xi) - \hat{H}_\alpha \varphi(\xi)| + |\hat{H}_\alpha \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

これから主張が従う．

(II) $-1 < \alpha \le -\frac{1}{2}$ のとき．

$f \in L^1(\mu_\alpha)$ として任意に $\varepsilon > 0$ をとる．また C_α を命題 14.1 のようにとる．すると指数関数 $e^{-\lambda x}$ の 1 次結合 φ で $\|f-\varphi\|_{L^1(\mu_\alpha)} \le \varepsilon/C_\alpha$ となるものが取れる．よって

$$\xi^{(2\alpha+1)/4}\|\hat{H}_\alpha f - \hat{H}_\alpha \varphi\|_\infty \le C_\alpha \|f-\varphi\|_{L^1(\mu_\alpha)} \le \varepsilon$$

となる．さらに $\hat{H}_\alpha \varphi$ はやはり指数関数の 1 次結合だから，ある $N > 0$ が存在して $\xi \ge N$ ならば $\xi^{(2\alpha+1)/4}|\hat{H}_\alpha\varphi(\xi)| \le \varepsilon$ とできる．よってこのとき

$$\xi^{(2\alpha+1)/4}|\hat{H}_\alpha f(\xi)| \le \xi^{(2\alpha+1)/4}|\hat{H}_\alpha f(\xi) - \hat{H}_\alpha\varphi(\xi)| + \xi^{(2\alpha+1)/4}|\hat{H}_\alpha\varphi(\xi)| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

これから主張が従う． □

これから $\alpha > -\frac{1}{2}$ のときは $\mathbf{M} \subset C_\infty([0,\infty))$ も分る．さらに $\hat{H}_\alpha$ は $\mathbf{M}$ から $\mathbf{M}$ への全単射であることが分かる．次のことも成り立つ．

命題 14.6. $f,\, g \in \mathbf{M}$ に対し

$$(\hat{H}_\alpha f, \hat{H}_\alpha g)_2 = (f,g)_2 \tag{14.14}$$

が成立する．

証明 $\hat{H}_\alpha^2 = I$ を使って

$$(\hat{H}_\alpha f, \hat{H}_\alpha g)_2 = (f, \hat{H}_\alpha\hat{H}_\alpha g)_2 = (f,g)_2.$$ □

さて，これから $\hat{H}_\alpha$ は $\mathbf{M}$ で $L^2(x^\alpha\, dx)$ の距離に関し等距離写像であることが分かる．$\mathbf{M}$ は $L^2(x^\alpha\, dx)$ で稠密であるから，一意的に等距離に拡張できる．像は $\mathbf{M}$ を含み，結局 unitary であることまでわかる．$L^2(x^\alpha\, dx)$ への拡張もやはり $\hat{H}_\alpha$ で表すことにする．$f \in L^1(\mu_\alpha) \cap L^2(x^\alpha\, dx)$ のときは，$L^1(\mu_\alpha)$ での定義と，$L^2(x^\alpha\, dx)$ での極限による定義で違ってくる可能性がある．もちろんそういうことはないが，一応証明を与えておく．$f \in L^1(\mu_\alpha) \cap L^2(x^\alpha\, dx)$ をとる．列 $\{\varphi_n\} \subset \mathbf{M}$ で f に L^2 収束するものが取れる．$\hat{H}_\alpha\varphi_n$ の極限を g とすると，$h \in \mathbf{M}$ に対し

$$(g,h)_2 = \lim_{n\to\infty}(\hat{H}_\alpha\varphi_n, h)_2 = \lim_{n\to\infty}(\varphi_n, \hat{H}_\alpha h)_2 = (f, \hat{H}_\alpha h)_2 = (\hat{H}_\alpha f, h)_2.$$

最後の $\hat{H}_\alpha f$ は $f \in L^1(\mu_\alpha)$ としての意味である．h は任意で $\mathbf{M}$ は $L^2(x^\alpha\, dx)$ で稠密だから $g = \hat{H}_\alpha f$ となる．このことに注意すれば $f \in L^2(x^\alpha\, dx)$ に対し

$$\hat{H}_\alpha h = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^n f(x)B(\alpha+1; -\xi x)x^\alpha\, dx \tag{14.15}$$

がなり立つ．ここで l.i.m. は $L^2(x^\alpha\, dx)$ での極限を表す．以上を定理としてまとめておく．

定理 14.7. $\hat{H}_\alpha$ を (14.15) で定めると，$\hat{H}_\alpha$ は自己共役で，$\hat{H}_\alpha^2 = I$ が成立する．従って unitary でもある．

上の結果 $\hat{H}_\alpha^2 = I$ は $f \in L^2(x^\alpha\,dx)$ に対して

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{H}f(\xi)B(\alpha+1; -\xi x)\xi^\alpha\,d\xi \tag{14.16}$$

が成立することを意味する．積分は l.i.m. の意味である．これはスペクトル分解に他ならない．実際 $\frac{d}{dm}\frac{d}{ds} = x\frac{d}{dx^2} + (\alpha+1)\frac{d}{dx}$ の固有値 $-\xi$ に対する固有関数は $B(\alpha+1; -\xi x)$ であった．s 微分を $\frac{df}{ds}$ を f^+ とかく．これは右微分の記号であるが，s 微分のことにする．通常の微分 $\frac{df}{dx}$ は f' と書いて区別することにする．

$$\frac{d}{dx}B(\alpha+1; -\xi x) = -\xi B'(\alpha+1; -\xi x) = -\xi B(\alpha+2; -\xi x)$$

であった．よって

$$\frac{d}{ds}B(\alpha+1; -\xi x) = x^{\alpha+1}\frac{d}{dx}B(\alpha+1; -\xi x) = -\xi x^{\alpha+1}B(\alpha+2; -\xi x)$$

である．これから $\left.\frac{d}{ds}B(\alpha+1; -\xi x)\right|_{x=0} = 0$ が成立していることが分かる．境界条件が必要なのは $-1 < \alpha < 0$ のときのみで，このとき Neumann 境界条件が満たされていることが分かる．$\alpha \geq 0$ のときは境界条件は必要ないが，形式的に Neumann 境界条件が成立している．

$-1 < \alpha < 0$ のときの Green 関数

ここから $-1 < \alpha < 0$ の場合に限定する．このとき 0 は正則境界なので，境界条件が必要である．そこで Neumann 境界条件を仮定する．以下 $\lambda > 0$ とする．

$$\phi_\lambda(x) = B(\alpha+1; \lambda x) \tag{14.17}$$

とおくと ϕ_λ は固有値 λ に対する固有関数になる．実際 $\frac{d}{dm}\frac{d\phi_\lambda}{ds} = \lambda\phi_\lambda$ が成立し，

$$\frac{d}{dx}\phi_\lambda(x) = \frac{d}{dx}B(\alpha+1; \lambda x) = \lambda B'(\alpha+1; \lambda x) = \lambda B(\alpha+2; \lambda x)$$

であった．よって

$$\frac{d}{ds}\phi_\lambda(x) = \frac{d}{ds}B(\alpha+1; \lambda x) = x^{\alpha+1}\frac{d}{dx}B(\alpha+1; \lambda x) = \lambda x^{\alpha+1}B(\alpha+2; \lambda x)$$

これから $B(\alpha+1; x)$ の定義 (12.7) を思い起こせば

$$\phi_\lambda(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad \phi_\lambda^+(0) = 0 \tag{14.18}$$

が成立する．

さて，ϕ_λ とは独立な解を

$$\psi_\lambda(x) = x^{-\alpha} B(1-\alpha; \lambda x) \tag{14.19}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda'(x) &= \frac{d}{dx} x^{-\alpha} B(1-\alpha; \lambda x) \\
&= -\alpha x^{-\alpha-1} B(1-\alpha; \lambda x) + \lambda x^{-\alpha} B'(1-\alpha; \lambda x) \\
&= -\alpha x^{-\alpha-1} B(1-\alpha; \lambda x) + \lambda x^{-\alpha} B(2-\alpha; \lambda x)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda^+(x) &= \frac{d}{ds} x^{-\alpha} B(1-\alpha; \lambda x) \\
&= x^{\alpha+1} \frac{d}{dx} x^{-\alpha} B(1-\alpha; \lambda x) \\
&= -\alpha B(1-\alpha; \lambda x) + \lambda x B(2-\alpha; \lambda x)
\end{aligned}$$

である．よって

$$\psi_\lambda(0) = 0, \quad \psi_\lambda^+(0) = -\alpha \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}$$

であるから，Dirichlet 条件を満たしていることが分かる．

$\phi_\lambda, \psi_\lambda$ に対して成立していることを纏めておく．

命題 14.8. $\phi_\lambda, \psi_\lambda$ の Wronskian は定数で

$$[\phi_\lambda, \psi_\lambda] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)} \tag{14.20}$$

である．また

$$\int_0^x \frac{ds(y)}{\phi_\lambda(y)^2} = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha) \frac{\psi_\lambda(x)}{\phi_\lambda(x)} \tag{14.21}$$

および

$$\int_0^\infty \frac{ds(y)}{\phi_\lambda(y)^2} = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha) \lim_{x\to\infty} \frac{\psi_\lambda(x)}{\phi_\lambda(x)} = \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)\lambda^\alpha \tag{14.22}$$

が成り立つ．

証明 $\phi_\lambda, \psi_\lambda$ の Wronskian の $x = 0$ での値は

$$[\phi_\lambda, \psi_\lambda](0) = \phi_\lambda(0)\psi_\lambda^+(0) - \phi_\lambda^+(0)\psi_\lambda(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)}.$$

また，この Wronskian は定数になる．よって

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_\lambda(x)}{\phi_\lambda(x)} &= \int_0^x \frac{\psi_\lambda^+(y)\phi_\lambda(y) - \psi_\lambda(y)\phi_\lambda^+(y)}{\phi_\lambda(y)^2}\, ds(y) \\
&= \int_0^x \frac{[\phi_\lambda, \psi_\lambda](y)}{\phi(y)^2}\, ds(y) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{ds(y)}{\phi_\lambda(y)^2}.
\end{aligned}$$

これで (14.21) が得られた．また

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_\lambda(x)}{\phi_\lambda(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-\alpha} B(1-\alpha; \lambda x)}{B(1+\alpha; \lambda x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-\alpha} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\lambda x)^{-(1-2\alpha)/4} e^{2\sqrt{\lambda x}}}{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\lambda x)^{-(1+2\alpha)/4} e^{2\sqrt{\lambda x}}} \qquad (\because \text{命題 } 11.5) \\
&= \lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} (\lambda x)^{-\frac{1-2\alpha}{4} + \frac{1+2\alpha}{4}} \\
&= \lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} (\lambda x)^{\alpha} \\
&= \lambda^\alpha.
\end{aligned}$$

これは (14.22) を意味する． □

命題 14.8を使うと次の等式が示せる．

$$\int_0^\infty \frac{du}{u^{\alpha+1} B(\alpha+1; u)^2} = B(\alpha+1, -\alpha). \tag{14.23}$$

実際

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{ds(y)}{\phi_\lambda(y)^2} &= \int_0^x \frac{dy}{y^{\alpha+1} B(\alpha+1; \lambda y)^2} \\
&= \int_0^{\lambda x} \frac{\lambda^\alpha du}{u^{\alpha+1} B(\alpha+1; u)^2} \qquad (u = \lambda y, du = \lambda dy) \\
&= \lambda^\alpha \int_0^{\lambda x} \frac{du}{u^{\alpha+1} B(\alpha+1; u)^2}.
\end{aligned}$$

これから (14.22) より

$$\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)\lambda^\alpha = \int_0^\infty \frac{ds(y)}{\phi_\lambda(y)^2} = \lambda^\alpha \int_0^\infty \frac{du}{u^{\alpha+1} B(\alpha+1; u)^2}.$$

あとは

$$\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} = B(\alpha+1, -\alpha)$$

に注意すればよい．

さて，Green 関数を作るには，ϕ_λ が非負増大関数なので，非負減少関数を見つける必要がある．それは，作り方の一般論があるので，それに従えばよい．Dym-McKean [6] p. 164 をみよ．それによれば

$$D_\lambda(x) = \phi_\lambda(x) \int_x^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2} ds(y) \tag{14.24}$$

とすれば， D_λ が $\frac{d}{dm}\frac{dD_\lambda}{ds} = \lambda D_\lambda$ を満たす正値減少解になる．

$$D_\lambda^+(x) = \phi_\lambda^+(x) \int_x^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2} ds(y) - \phi_\lambda(x)\frac{1}{\phi_\lambda(x)^2} = \phi_\lambda^+(x) \int_x^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2} ds(y) - \frac{1}{\phi_\lambda(x)}.$$

よって

$$D_\lambda(0) = \phi_\lambda(0) \int_0^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2} ds(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2} ds(y) \tag{14.25}$$

と

$$D_\lambda^+(0) = \phi_\lambda^+(0) \int_0^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2} ds(y) - \frac{1}{\phi_\lambda(0)} = -\Gamma(\alpha+1)$$

が分かる．また Wronskian は

$$[\phi_\lambda, D_\lambda] = -1 \tag{14.26}$$

である．実際

$$\begin{aligned}
[\phi_\lambda, D_\lambda](0) &= \phi_\lambda(x)D_\lambda^+(0) - \phi_\lambda^+(x)D_\lambda(0) \\
&= \phi_\lambda(0)D_\lambda^+(0) - \phi_\lambda^+(0)D_\lambda(0) \\
&= \phi_\lambda(0)D_\lambda^+(0) \\
&= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1) = -1.
\end{aligned}$$

これで Green 関数が

$$G_\lambda(x,y) = \begin{cases} \phi_\lambda(x)D_\lambda(y), & x \le y, \\ \phi_\lambda(y)D_\lambda(x), & y \le x \end{cases} \tag{14.27}$$

であることが分かる．ここで Green 関数は $(\lambda - \mathfrak{A})^{-1}$ の核表現である:

$$(\lambda - \mathfrak{A})^{-1} f(x) = \int_0^\infty G_\lambda(x,y) f(y)\, dm(y) \tag{14.28}$$

また，Green 関数はスペクトル表現を持つからスペクトル測度 σ を用いて次のように表される．

$$G_\lambda(x,y) = \int_0^\infty \frac{B(\alpha+1; -\xi x)B(\alpha+1; -\xi y)}{\lambda + \xi}\, d\sigma(\xi). \tag{14.29}$$

この固有関数展開が Hankel 変換と呼ばれるものである．これから特に $x = y = 0$ を代入して

$$\phi_\lambda(0)D_\lambda(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^2}\int_0^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2}ds(y) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)^2}\frac{1}{\lambda+\xi}d\sigma(\xi)$$

よって

$$\int_0^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2}ds(y) = \int_0^\infty \frac{d\sigma(\xi)}{\lambda+\xi}. \tag{14.30}$$

原理的にはこれで σ が求まる．

定理 14.9. $-1 < \alpha < 0$ のとき次が成り立つ．

$$d\sigma(\xi) = c\xi^\alpha\, d\xi, \quad c = \frac{1}{B(\alpha+1,-\alpha)}\int_0^\infty \frac{dy}{B(\alpha+1;y)^2 y^{\alpha+1}}. \tag{14.31}$$

ここでやや紛らわしいが $B(\alpha+1,-\alpha)$ はベーター関数である．

証明 (14.30) の左辺は

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2}ds(y) &= \int_0^\infty y^{-\alpha-1}\frac{dy}{B(\alpha+1;\lambda y)^2} \quad (u=\lambda y, du=\lambda dy)\\
&= \int_0^\infty \lambda^{\alpha+1}u^{-\alpha-1}\frac{1}{B(\alpha+1;u)^2}\frac{du}{\lambda}\\
&= \lambda^\alpha\int_0^\infty \frac{du}{u^{\alpha+1}B(\alpha+1;u)^2}.
\end{aligned}$$

一方，$d\sigma(\xi) = c\xi^\alpha$ と予想を立てて計算すると，(14.30) の右辺は

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{d\sigma(\xi)}{\lambda+\xi} &= c\int_0^\infty \frac{\xi^\alpha}{\lambda+\xi}d\xi \quad (\xi=\lambda t, d\xi=\lambda dt)\\
&= c\int_0^\infty \frac{t^\alpha\lambda^\alpha}{\lambda+\lambda t}\lambda\, dt\\
&= c\lambda^\alpha\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{1+t}dt \quad (v=\frac{1}{t+1}, dv=-(t+1)^{-2}dt=-v^2dt, t=\frac{1-v}{v})\\
&= c\lambda^\alpha\int_0^1 v(\frac{1-v}{v})^\alpha\frac{dv}{v^2}\\
&= c\lambda^\alpha\int_0^1 v^{-\alpha-1}(1-v)^\alpha\, dv\\
&= c\lambda^\alpha\int_0^1 v^{-\alpha-1}(1-v)^{\alpha+1-1}\, dv\\
&= cB(\alpha+1,-\alpha)\lambda^\alpha.
\end{aligned}$$

これで (14.31) が正しいことが分かる． □

次に $c=1$ を示しておこう．これは (14.23) で既に示したが，以下は別証明として与える．

命題 14.10. 次の等式が成立する．

$$\int_0^\infty \frac{dy}{B(\alpha+1;y)^2 y^{\alpha+1}} = B(\alpha+1,-\alpha) \tag{14.32}$$

証明 一般に resolvent G_λ は

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda G_\lambda = I \quad \text{(strongly)}$$

を満たしている．よって $f,\, g \in L^2(x^\alpha\, dx)$ に対し

$$\begin{aligned}
(f,g)_2 &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda (G_\lambda f, g)_2 \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_0^\infty x^\alpha\, dx \int_0^\infty y^\alpha\, dy G_\lambda(x,y) f(x) g(y) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda \int_0^\infty x^\alpha\, dx \int_0^\infty y^\alpha\, dy \left\{ \int_0^\infty \frac{B(\alpha+1;-\xi x)B(\alpha+1;-\xi y)}{\lambda+\xi} c\xi^\alpha\, d\xi f(x) g(y) \right\} \\
&= c \int_0^\infty x^\alpha\, dx \int_0^\infty y^\alpha\, dy \left\{ \int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi x)B(\alpha+1;-\xi y)\xi^\alpha\, d\xi f(x) g(y) \right\} \\
&= c \int_0^\infty \xi^\alpha\, d\xi \left\{ \int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi x) f(x) x^\alpha\, dx \right\} \left\{ \int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi y) g(y) y^\alpha\, dy \right\} \\
&= c \int_0^\infty \hat{H}_\alpha f(\xi) \hat{H} g(\xi) \xi^\alpha\, d\xi \\
&= c(\hat{H}_\alpha f, \hat{H}_\alpha g)_2 \\
&= c(f,g)_2. \quad (\because\ \hat{H}_\alpha \text{ is unitary.})
\end{aligned}$$

これから $c=1$ が従う．(14.31) から主張が従う． □

さて D_λ は (14.14) で定義したが，もう少し具体的な表現を与えておこう．命題 14.8を使って

$$\begin{aligned}
D_\lambda(x) &= \phi_\lambda(x) \int_x^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2}\, ds(y) \\
&= \phi_\lambda(x) \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2}\, ds(y) - \int_0^x \frac{1}{\phi_\lambda(y)^2}\, ds(y) \right\} \\
&= \phi_\lambda(x)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha) \left\{ \lambda^\alpha - \frac{\psi_\lambda(x)}{\phi_\lambda(x)} \right\} \\
&= \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)(\lambda^\alpha \phi_\lambda(x) - \psi_\lambda(x)) \\
&= \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)(\lambda^\alpha B(\alpha+1;\lambda x) - x^{-\alpha} B(1-\alpha;\lambda x)).
\end{aligned}$$

これはここまでにとどめておくが (11.26) の変形 Bessel 関数を使って表すことができることだけ注意しておこう．上の関数は第 2 種の変形 Bessel 関数に対応している．

また $D = \frac{d}{dx}$ を $L^2(x^\alpha)$ から $L^2(x^{\alpha+1})$ への作用素とみる．従ってその双対作用素 $D^*\colon L^2(x^{\alpha+1}) \to L^2(x^\alpha)$ が定義される．しかしながら，以下ではあまり定義域には拘らず，十分なめらかな関数に作用しているとする．$C_0^\infty([0,\infty))$ で定義されていると思えばよい．

定理 14.11. 次が成り立つ.

$$D\hat{H}_\alpha = -\hat{H}_{\alpha+1}, \tag{14.33}$$
$$\hat{H}_{\alpha+1}D = -\hat{H}_\alpha, \tag{14.34}$$
$$\hat{H}_\alpha\hat{H}_\alpha = \hat{H}_{\alpha+1}\hat{H}_{\alpha+1}. \tag{14.35}$$

証明 定義から

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}[\hat{H}_\alpha f(\xi)] &= \frac{d}{d\xi}\int_0^\infty f(x)B(\alpha+1;-\xi x)x^\alpha\,dx\\ &= -\int_0^\infty f(x)B'(\alpha+1;-\xi x)xx^\alpha\,dx\\ &= -\int_0^\infty f(x)B(\alpha+2;-\xi x)x^{\alpha+1}\,dx \quad (\because\ (11.6))\\ &= -\hat{H}_{\alpha+1}f(\xi).\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\alpha+1}Df(\xi) &= \int_0^\infty f'(x)B(\alpha+2;-\xi x)x^{\alpha+1}\,dx\\ &= -\int_0^\infty f(x)\frac{d}{dx}[B(\alpha+2;-\xi x)x^{\alpha+1}]\,dx\\ &= -\int_0^\infty f(x)[B'(\alpha+2;-\xi x)(-\xi)x^{\alpha+1}+B(\alpha+2;-\xi x)(\alpha+1)x^\alpha]\,dx\\ &= -\int_0^\infty f(x)[-\xi xB'(\alpha+2;-\xi x)+(\alpha+1)B(\alpha+2;-\xi x)]x^\alpha\\ &= -\int_0^\infty f(x)B(\alpha+1;-\xi x)x^\alpha\,dx \quad (\because\ (11.7))\\ &= -\hat{H}_\alpha f.\end{aligned}$$

これらを使えば

$$\hat{H}_\alpha\hat{H}_\alpha = -(\hat{H}_{\alpha+1}D)\hat{H}_\alpha = -\hat{H}_{\alpha+1}(D\hat{H}_\alpha) = \hat{H}_{\alpha+1}\hat{H}_{\alpha+1}. \qquad \square$$

実は $\hat{H}_\alpha\hat{H}_\alpha = I$ なので，(14.29) は自明な等式であるが，区間の長さが 1 以上の α に対してだけ identity I であることを示せば，他の場合は (14.29) を使って導かれることになる．何らかの有用性はあるであろう．

半群

スペクトル表現 (14.8) を元に，半群の性質を調べよう．半群の核表現は

$$p_t(x,y) = \int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi x)B(\alpha+1;-\xi y)e^{-t\xi}\xi^\alpha\,d\xi. \tag{14.36}$$

$p_t(x,y)$ の具体的表現を求めよう．Laplace 変換を計算しよう．

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda y} p_t(x,y) y^\alpha \, dy &= \int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi x)\Big\{\int_0^\infty e^{-\lambda y} B(\alpha+1;-\xi y) y^\alpha \, dy\Big\} e^{-t\xi}\xi^\alpha \, d\xi \\
&\quad (\xi y = u,\ \xi dy = du) \\
&= \int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi x)\Big\{\int_0^\infty e^{-u\lambda/\xi} B(\alpha+1;-u) u^\alpha \xi^{-\alpha}\xi^{-1} \, du\Big\} e^{-t\xi}\xi^\alpha \, d\xi \\
&= \int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi x) e^{-\xi/\lambda} (\lambda/\xi)^{-\alpha-1}\xi^{-1} e^{-t\xi} \, d\xi \\
&= \lambda^{-\alpha-1}\int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi x) e^{-\xi/\lambda}\xi^\alpha e^{-t\xi} \, d\xi \quad (v=\xi x,\ dv = x d\xi) \\
&= \lambda^{-\alpha-1}\int_0^\infty B(\alpha+1;-v) e^{-v/(x\lambda)} v^\alpha x^{-\alpha} e^{-tv/x} x^{-1} \, dv \\
&= (x\lambda)^{-\alpha-1}\int_0^\infty B(\alpha+1;-v) e^{-v(1/(x\lambda)+t/x)} v^\alpha \, dv \\
&= (x\lambda)^{-\alpha-1}(\frac{1}{x\lambda}+\frac{t}{x})^{-\alpha-1} e^{-(\frac{1}{x\lambda}+\frac{t}{x})^{-1}} \\
&= (1+\lambda t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{\lambda x}{\lambda t+1}}.
\end{aligned}$$

この Laplace 変換は，実は非心 χ^2 分布であることを我々は知っている．答えを知っているので，そちらから Laplace 変換を計算しよう．

定理 14.12. 基礎の測度 y^α に関する推移確率密度 $p_t(x,y)$ は次で与えられる．

$$p_t(x,y) = t^{-\alpha-1}\exp(-\frac{x+y}{t}) B(\alpha+1;\frac{xy}{t^2}) \tag{14.37}$$

証明 (14.37) の右辺の Laplace 変換を計算すればよい．

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\lambda y} t^{-\alpha-1}\exp(-\frac{x+y}{t}) B(\alpha+1;\frac{xy}{t^2}) y^\alpha \, dy \\
&= t^{-\alpha-1}\exp(-\frac{x}{t})\int_0^\infty e^{-\lambda y}\exp(-\frac{y}{t}) B(\alpha+1;\frac{xy}{t^2}) y^\alpha \, dy \quad (u = \frac{xy}{t^2},\ y = \frac{t^2}{x}u) \\
&= t^{-\alpha-1}\exp(-\frac{x}{t})\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda t^2}{x}u}\exp(-\frac{t^2}{xt}u) B(\alpha+1;u)(\frac{t^2}{x}u)^\alpha \frac{t^2}{x} \, du \\
&= t^{-\alpha-1}\exp(-\frac{x}{t})\int_0^\infty e^{-(\frac{\lambda t^2}{x}+\frac{t}{x})u} B(\alpha+1;u) x^{-\alpha-1} t^{2\alpha+2} \, du \\
&= t^{\alpha+1}x^{-\alpha-1}\exp(-\frac{x}{t})\int_0^\infty e^{-(\frac{\lambda t^2}{x}+\frac{t}{x})u} B(\alpha+1;u) \, du \\
&= t^{\alpha+1}x^{-\alpha-1}\exp(-\frac{x}{t})(\frac{\lambda t^2}{x}+\frac{t}{x})^{-\alpha-1} e^{(\frac{\lambda t^2}{x}+\frac{t}{x})^{-1}} \quad (\because (11.12)) \\
&= \exp(-\frac{x}{t})(\lambda t+1)^{-\alpha-1} e^{\frac{x}{t}(\lambda t+1)^{-1}} \\
&= (\lambda t+1)^{-\alpha-1} e^{\frac{x}{t}(\frac{1}{\lambda t+1}-1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda t+1)^{-\alpha-1} e^{\frac{x}{t}\frac{-\lambda t}{\lambda t+1}} \\
&= (\lambda t+1)^{-\alpha-1} e^{-\frac{\lambda x}{\lambda t+1}}.
\end{aligned}
$$

これで両者の Laplace 変換が一致するので，等しいことが分かる． □

$x=y$ のときの (14.36) と (14.37) をつなげると

$$
\begin{aligned}
p_t(x,x) &= t^{-\alpha-1}\exp(-\frac{2x}{t})B(\alpha+1;(\frac{x}{t})^2) \\
&= \int_0^\infty B(\alpha+1;-\xi x)^2 e^{-t\xi}\xi^\alpha\, d\xi \\
&= \int_0^\infty B(\alpha+1;-u)^2 e^{-tu/x}(\frac{u}{x})^\alpha \frac{du}{x} \quad (u=\xi x, du = x d\xi) \\
&= \frac{1}{x^{\alpha+1}}\int_0^\infty B(\alpha+1;-u)^2 e^{-tu/x} u^\alpha\, du
\end{aligned}
$$

これから

$$
t^{-\alpha-1}\exp(-\frac{2x}{t})B(\alpha+1;(\frac{x}{t})^2)x^{\alpha+1} = \int_0^\infty B(\alpha+1;-u)^2 e^{-tu/x} u^\alpha\, du
$$

もう少し書き直すと

$$
(\frac{x}{t})^{\alpha+1}\exp(-2\frac{x}{t})B(\alpha+1;(\frac{x}{t})^2) = \int_0^\infty B(\alpha+1;-u)^2 e^{-tu/x} u^\alpha\, du
$$

となるので $\lambda = \frac{t}{x}$ とおくと

$$
\lambda^{-\alpha-1}\exp(-2/\lambda)B(\alpha+1;\frac{1}{\lambda^2}) = \int_0^\infty B(\alpha+1;-u)^2 e^{-\lambda u} u^\alpha\, du \tag{14.38}
$$

となり Laplace 変換が計算できていることになる．但し何の役に立つかはわからない．

15. 有限区間の平方 Bessel 過程とスペクトル分解

ここでは有限区間で平方 Bessel 過程を扱う．空間を $[0,a]$ とし，生成作用素はつぎのものを扱う．

$$
x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1)\frac{d}{dx}. \tag{15.1}
$$

固有関数は基本的には Bessel 関数であるが，境界 a での境界条件を考える必要がある．Bessel 関数は $L^2(x\,dx)$ における作用素 $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{\alpha^2}{x^2}$ の固有関数であった．もう一度平方 Bessel 過程との関係を確認しておこう．次の図式が可換になる．

(15.2)

$$
\begin{tikzcd}
L^2([0,a];x^\alpha\,dx) \arrow[r, "x\frac{d^2}{dx^2}+(\alpha+1)\frac{d}{dx}"] & L^2([0,a];x^\alpha\,dx) & x^{-\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{4\xi x}), \quad -\xi \\
L^2([0,\sqrt{4a}];x\,dx) \arrow[u, "I"] \arrow[r, "\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}-\frac{\alpha^2}{x^2}"] & L^2([0,\sqrt{4a}];x\,dx) \arrow[u, "I"'] & J_\alpha(\sqrt{\xi}x), \quad -\xi
\end{tikzcd}
$$

ここで

$$
If(x)=\sqrt{2}x^{-\alpha/2}f(\sqrt{4x}), \quad I^{-1}u(y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{y}{2}\Big)^\alpha u\Big(\frac{y^2}{4}\Big)
$$

である．

a での境界条件を考えよう．Dirichlet 条件は $u(a)=0$ と明らかであるが，Neumann 条件は

$$
a\rho u' = xx^\alpha u'
$$

であるから

$$
u'(a)=0
$$

となる．これは $L^2(x^\alpha\,dx)$ で考えているが，$L^2(x\,dx)$ では

$$
u=If(x)=\sqrt{2}x^{-\alpha/2}f(\sqrt{4x})
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
u' &= -\frac{\alpha}{2}\sqrt{2}x^{-(\alpha/2)-1}f(\sqrt{4x})+\sqrt{2}x^{-\alpha/2}f'(\sqrt{4x})\frac{1}{\sqrt{x}} \\
&= \sqrt{2}x^{-(\alpha+1)/2}\Big(f'(\sqrt{4x})-\frac{\alpha}{\sqrt{4x}}f(\sqrt{4x})\Big).
\end{aligned}
$$

よって

$$
f'(\sqrt{4a})-\frac{\alpha}{\sqrt{4a}}f(\sqrt{4a})=0
$$

が $L^2(x\,dx)$ での対応する境界条件である．

$\alpha > -1$ の場合: entrance 系列

さて，まず $\alpha > -1$ の場合から考えよう．0 は entrance 系列の中で処理できるが，a は Neumann と Dirichlet の二つの場合を考えなければならない．これを [entrance, Neumann] 系列と [entrance, Dirichlet] 系列と区別して呼ぶことにする．

最初に [entrance, Dirichlet] 系列の固有関数を求めよう．そのためには $B(\alpha+1;-\xi x)$ が 0 での境界条件を満たすが，境界 a で Dirichlet 条件

$$B(\alpha+1;-\xi a)=0 \tag{15.3}$$

を満たす必要がある．これを満たすとき $-\xi$ が固有値となる．これで固有値が全て求まる．Bessel 関数との対応を考えておく．(12.9) から

$$B(\alpha+1;-\xi x)=(\xi x)^{-\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{4\xi x}) \tag{15.4}$$

であったから，Dirichlet 条件は

$$J_\alpha(\sqrt{4\xi a})=0$$

が条件となる．Bessel 関数 J_α の n 番目の零点を $z(\alpha,n)$ と表すと

$$\sqrt{4\xi a}=z(\alpha,n)$$

であるから，

$$-\xi_n^{\mathrm{D}}(\alpha)=-\frac{z(\alpha,n)^2}{4a},\quad n=1,2,\dots \tag{15.5}$$

が n 番目の固有値となる．D は Dirichlet を表す．固有関数は $B(\alpha+1;-\xi_n^{\mathrm{D}}x)$ である．

次に [entrance, Neumann] 系列の固有関数はまず $B(\alpha+1;-\xi x)$ が 0 での境界条件を満たすが，さらに a で Neumann 条件を満たさなければならないから，固有値としての $-\xi$ は $B'(\alpha+1;-\xi a)=0$ をみたさなければならない．これをみたす ξ が固有値になる．これでこの場合の固有値は総て求まったことになる．

さて，Neumann 条件の場合は $B'(\alpha+1;-\xi a)=0$ であるが，(11.6) から $B'(\alpha+1;-\xi a)=B(\alpha+2;-\xi a)$ より，$\alpha+1$ の場合の Dirichlet 条件に他ならない．従って n 番目の固有値は

$$-\xi_n^{\mathrm{N}}(\alpha)=-\frac{z(\alpha+1,n)^2}{4a},\quad n=1,2,\dots \tag{15.6}$$

である．今度の場合は $\alpha+1$ であることに注意しておく．さらに，Neumann の場合は定数関数が固有値 0 に対する固有関数であるから $n=0$ の場合として $\xi=0$ が固有値に含まれていることを注意しておく．即ち

$$-\xi_0^{\mathrm{N}}(\alpha)=0$$

と定める．

これから [entrance, Neumann] 系列の固有関数を微分すると [entrance, Dirichlet] 系列の固有関数が得られることが分かる．しかも固有値が等しくなる．但し，α と $\alpha+1$ が対応し，[entrance, Neumann] 系列の固有関数には固有値 0 に対する固有関数 1 は除く．実際

$$-\xi_n^{\mathrm{N}}(\alpha) = -\xi_n^{\mathrm{D}}(\alpha+1), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{15.7}$$

である．$n = 0$ の場合は除かれている．

固有値の分布を見てみよう．$a = \frac{1}{4}$ の場合

	-0.99	0	1	2	3	4	5
1	0	5.8	14.4	26.0	41.0	57.6	76.9
2	14.4	30.3	49.0	70.6	90.0	122.4	152.2
3	49.0	74.0	102.0	134.6	169.0	206.5	246.5
4	102.0	139.2	176.9	219.0	264.4	310.3	360.2

$\alpha < 0$ の場合: exit 系列

次に $\alpha < 0$ の場合を考えよう．この場合は 0 は exit 境界である．境界 a は Neumann と Dirichlet の場合を考える必要がある．これを [exit, Neumann] 系列と [exit, Dirichlet] 系列と区別して呼ぶことにする．

[exit, Dirichlet] 系列の固有関数は $x^{-\alpha}B(1-\alpha;-\xi x)$ が 0 での境界条件を満たすので，a で Diricholet 条件を満たさなければならない．従って $B(1-\alpha;-\xi x) = 0$ が条件になる．従って n 番目の固有値は

$$-\xi_n^{\mathrm{D}} = -\frac{z(1-\alpha, n)^2}{4a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

となる．

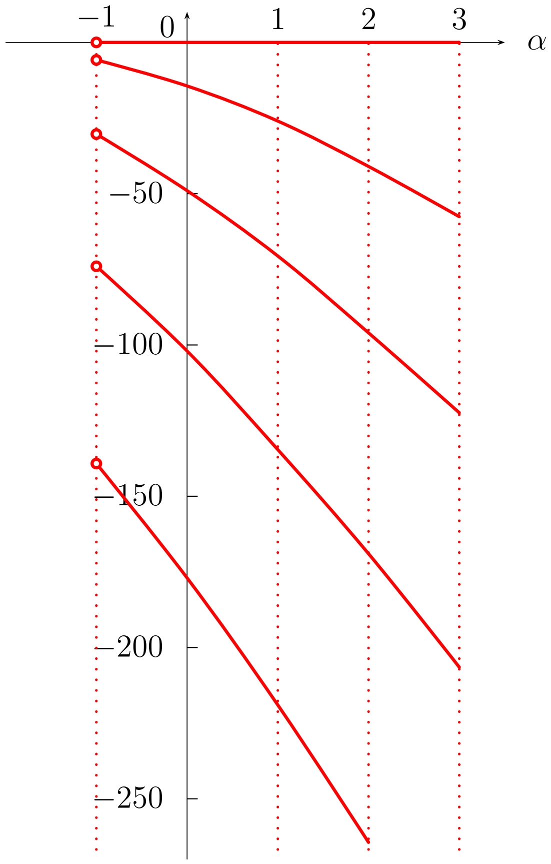
次に [exit, Neumann] 系列の固有関数はまず $x^{-\alpha}B(1-\alpha;-\xi x)$ 0 での境界条件を満たすが，さらに a で Neumann 条件を満たさなければならない．$[x^{-\alpha}B(1-\alpha;-\xi x)]' = x^{-\alpha-1}B(-\alpha;-\xi x)$ なので $B(-\alpha;-\xi a) = 0$ が条件になる．従って n 番目の固有値は

$$-\xi_n^{\mathrm{N}} = -\frac{z(-\alpha, n)^2}{4a}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

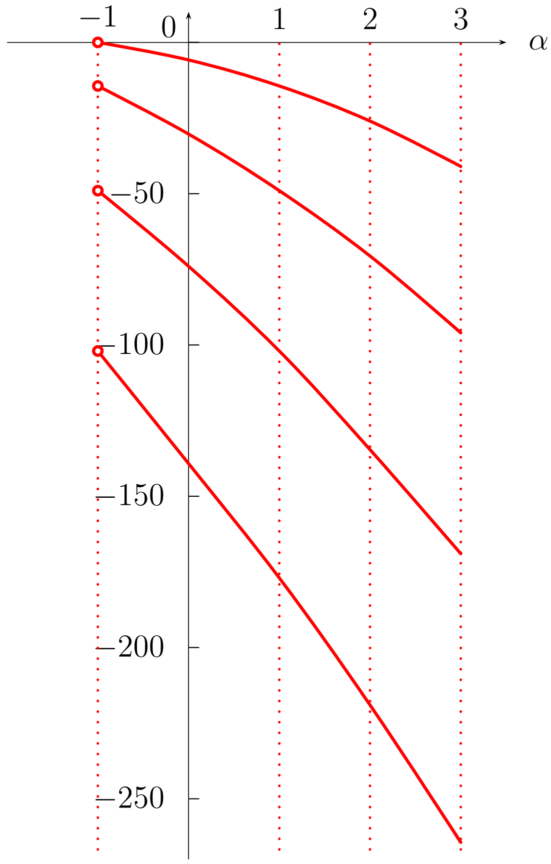
となる．特にここでは，$-1 \le \alpha < 0$ のとき，0 では Dirichlet 境界条件を付けていることを注意しよう．従って，この場合は微分による固有関数の対応を考える対象から外さなければならない．微分が出来るのは，Neumann か，非正則の状況のときだけであった．

以上で $\alpha < -1$ の場合に，微分により，固有関数が対応することが分かる．

最後に固有値の配置を図示しておこう．$\alpha > -1$ のときの entrance 系列の固有値を見よう．

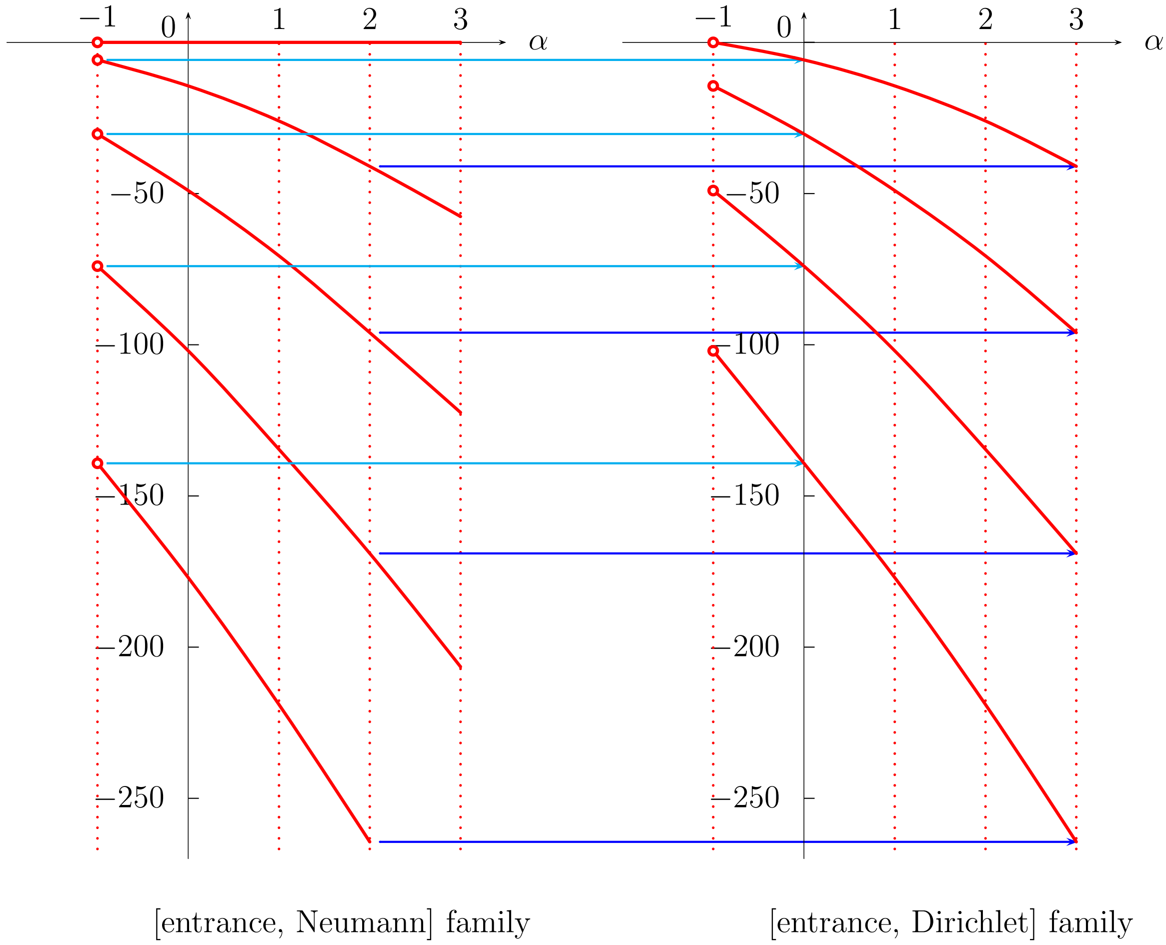


[entrance, Neumann] fimily

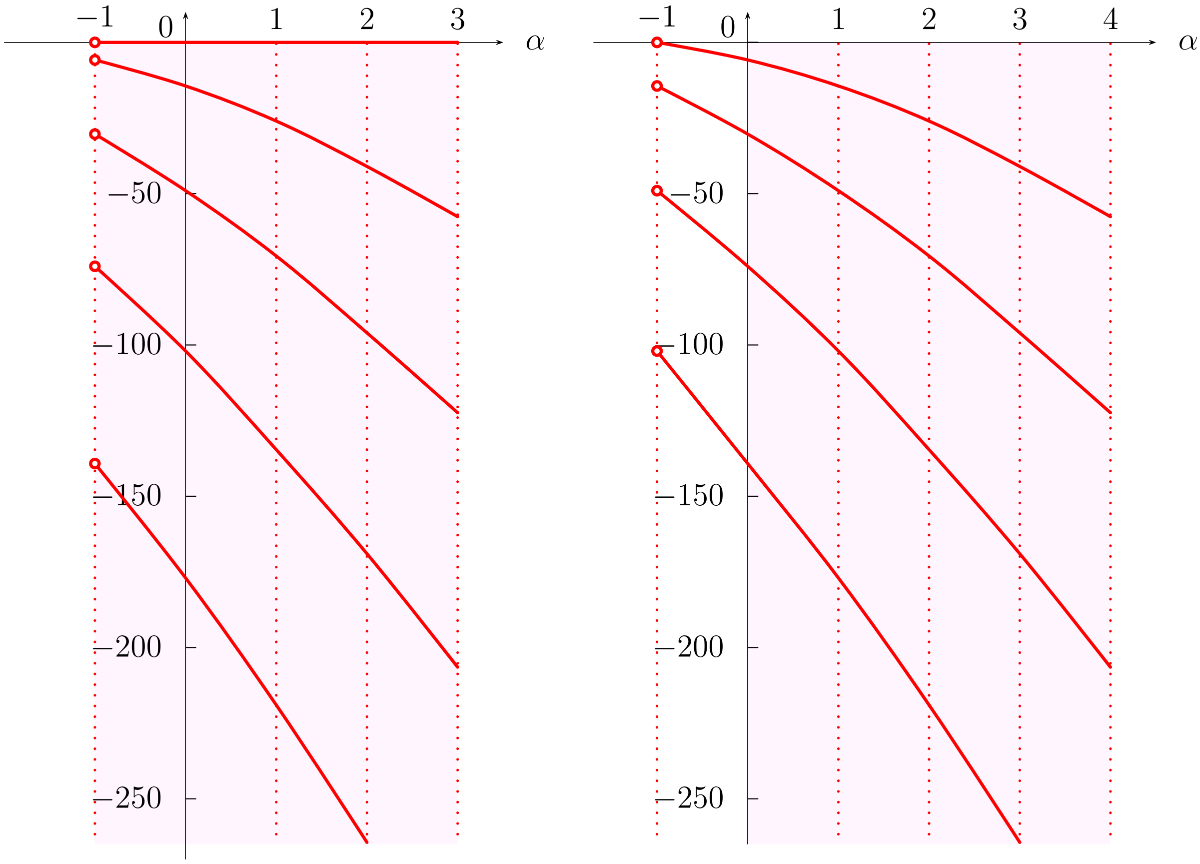


[entrance, Dirichlet] family

$\alpha > -1$ のときのスペクトル



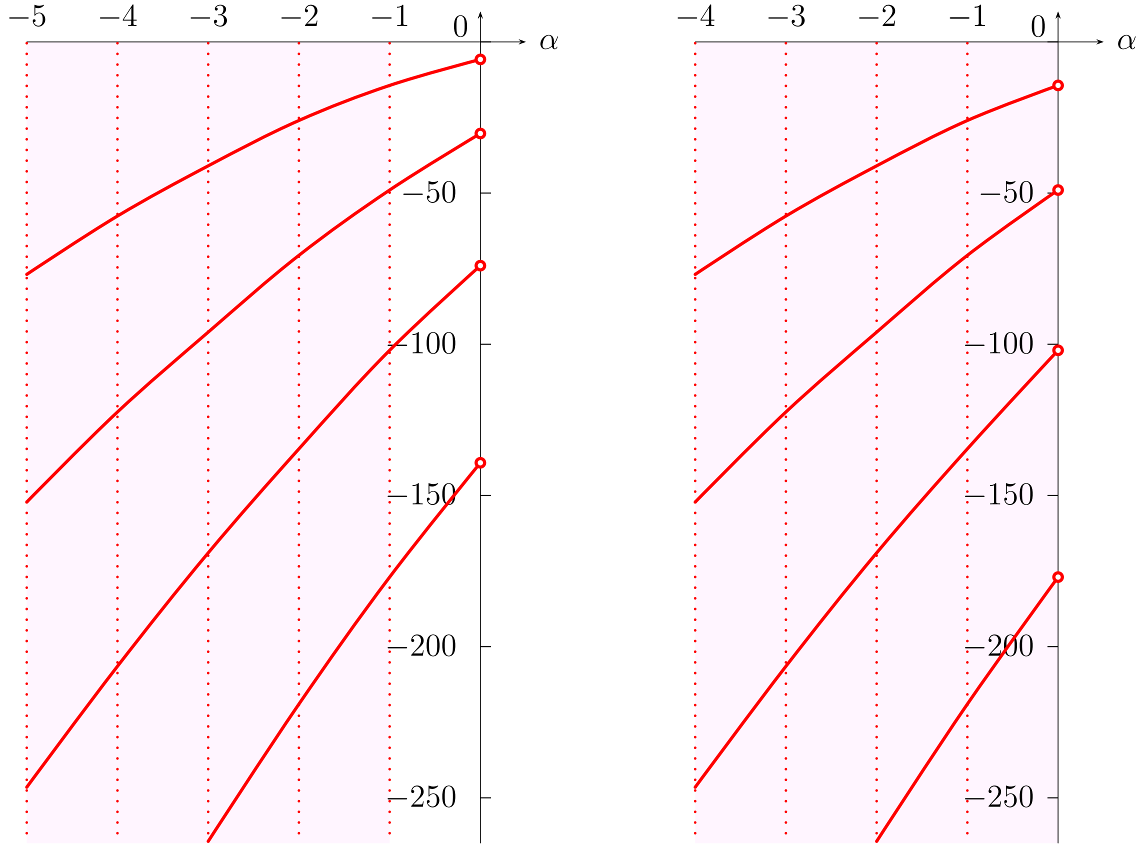
$\alpha > -1$ のときの Stein 対応



[entrance, Neumann] family [entrance, Dirichlet] family

$\alpha > -1$ のときの Stein 対応領域

次に $\alpha < 0$ のときの exit 系列の固有値の分布を見よう.



[exit, Neumann] family　　　　[exit,Dirichlet] family

$\alpha < 0$ のときの Stein 対応領域

16. Kummer 過程

引き続き (II) の $a = x$ の場合を扱う．次のような作用素を考えていた．

$$\mathfrak{A} = x\frac{d}{dx^2} + (\alpha + 1 + \beta x)\frac{d}{dx} \tag{16.1}$$

今まで $\beta = 0$ の場合を扱ったので，続いて $\beta \neq 0$ の場合を考察する．

Kummer 過程

定義 16.1. $\beta < 0$ のとき，次の作用素を生成作用素として持つ $[0, \infty)$ 上の拡散過程を Kummer 過程という:

$$\mathfrak{A} = x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 + \beta x)\frac{d}{dx}. \tag{16.2}$$

後で $\mathfrak{A}f = \lambda f$ の形の方程式を，Kummer 方程式と呼ぶ (特に $\beta = -1$ のとき) ので，それに合わせて，$\mathfrak{A}$ で生成される拡散作用素を Kummer 過程と呼ぶことにする．また (16.2)

の $\mathfrak{A}$ を Kummer 作用素と呼ぶ．これはまた Ornstein-Uhlenbeck 過程の半径方向の 2 乗の確率過程としても現れる．この場合は数理ファイナンスで Cox-Ingersoll-Ross 過程と呼ばれることがある．金利のモデルと扱われている．

$\mathfrak{A}f = \lambda f$ の解，すなわち固有関数が Laguerre 多項式になるので，Laguerre 作用素と呼んでもいいかもしれない．実際 Korzeniowski-Stroock [17] ではそのように呼んでいる．但し [17] では $\alpha = 1$ の場合のみが扱われている．

さて，生成作用素を (16.2) で与えたが，パラメーターによっては境界条件を与えなければ確率過程は一意的には決まらない．そのことをきちんと考えておこう．

標準測度と尺度関数

第 10節 で述べたように $\beta < 0$ の場合は $\beta = -1$ の場合を調べればよい．従って標準測度密度は

$$\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$$

である．scale function の密度は

$$\frac{1}{a\rho} = x^{-\alpha-1} e^{x}$$

となる．

標準測度の積分は

$$m(x) = \int_1^x y^{\alpha} e^{-y}\, dx$$

であり，尺度関数 s は

$$s(x) = \int_1^x y^{-\alpha-1} e^{-y}\, dy$$

である．境界の 0 および ∞ での挙動を調べる必要がある．まず $x \to 0$ のときは次が成立する．

$\alpha > 0$ のときは

$$s(x) \sim -x^{-\alpha}/\alpha$$
$$m(0) = -\int_0^1 y^{\alpha} e^{-y}\, dy > -\infty.$$

$\alpha = 0$ のときは

$$s(x) \sim \log x,$$
$$m(0) = -\int_0^1 y^{\alpha} e^{-y}\, dy > -\infty.$$

$-1 < \alpha < 0$ のとき

$$s(0) = -\int_0^1 y^{-\alpha-1}e^{-y}\,dy > -\infty$$
$$m(0) = -\int_0^1 y^{\alpha}e^{-y}\,dy > -\infty.$$

$\alpha = -1$ のとき

$$s(0) = -\int_0^1 e^{\beta y}\,dy > -\infty$$
$$m(x) \sim \log x.$$

$\alpha < -1$ のとき

$$s(0) = -\int_0^1 e^{-\beta y}y^{-\alpha-1}\,dy > -\infty,$$
$$m(x) \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

これらはいずれも L'Hôpital の定理を使って確かめられる．実際 $\alpha > 0$ のときだけ見ると

$$\lim_{x\to 0}\frac{s(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0}\frac{s'(x)}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}x^{-\alpha-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \frac{1}{-\alpha}.$$

次に $x\to\infty$ の場合は,

$$s(x) \sim x^{-\alpha-1}e^{x}$$
$$m(\infty) = \int_1^\infty y^{\alpha}e^{-y}\,dy < \infty$$

である．これも L'Hôpital の定理を使って次のように確かめられる．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{s(x)}{x^{-\alpha-1}e^{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{s'(x)}{-(\alpha+1)x^{-\alpha-2}e^{x}+x^{-\alpha-1}e^{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{-\alpha-1}e^{x}}{-(\alpha+1)x^{-\alpha-2}e^{x}+x^{-\alpha-1}e^{x}} = 1.\end{aligned}$$

境界の分類

さてこれらを使って

$$S(x) = \int_1^x (m(y)-m(1))\,ds(y) = \int_1^x m(y)y^{-\alpha-1}e^{y}\,dy$$

および

$$M(x) = \int_1^x (s(y)-s(1))dm(y) = \int_1^x s(y)y^{\alpha}e^{-y}\,dy$$

と定める．Feller に従って $S(x), M(x)$ を使って境界を分類しよう．

まず境界 ∞ を考える．このとき $s(\infty) = \infty$ だから $S(\infty) = \infty$ である．また $s(x) \sim x^{-\alpha-1}e^x$ で

$$\int_1^\infty y^{-\alpha-1}e^y y^\alpha e^{-y}\,dy = \int_1^\infty y^{-1}\,dy = \infty$$

より $M(\infty) = \infty$ である．以上で ∞ は non-exit, non-entrance である．

次に境界 0 を考えよう．まず $S(0)$ について．$\alpha \geq 0$ のとき $s(0) = -\infty$ であるから $S(0) = \infty$ である．$-1 < \alpha < 0$ のときは $m(0) > -\infty$ であるから

$$\int_0^1 y^{-\alpha-1}e^y\,dy < \infty$$

より $S(0) < \infty$ である．$\alpha = -1$ のときは $m(x) \sim \log x$ で

$$-\int_0^1 (\log y)e^y\,dy < \infty$$

より $S(0) < \infty$ である．$\alpha < -1$ のときは $m(x) \sim x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ で

$$\int_0^1 y^{\alpha+1}y^{-\alpha-1}e^y\,dy < \infty$$

だから $S(0) < \infty$ である．

次に $M(0)$ について考えよう．$\alpha > 0$ のとき $s(x) \sim -x^{-\alpha}/\alpha$ で

$$\int_0^1 y^{-\alpha}y^\alpha e^{-y}\,dy < \infty$$

より $M(0) < \infty$．$\alpha = 0$ のとき $s(x) \sim \log x$ で

$$-\int_0^1 (\log y)e^{-y}\,dy < \infty$$

より $M(0) < \infty$. $-1 < \alpha < 0$ のとき $s(0) > -\infty$ だから

$$\int_0^1 y^\alpha e^{-y}\,dy < \infty$$

より $M(0) < \infty$. $\alpha \leq -1$ のとき $s(0) > -\infty$ だから

$$\int_0^1 y^\alpha e^{-y}\,dy = \infty$$

より $M(0) = \infty$ である．

また，0 が，極限円か極限点かも重要な性質である．$\alpha < 0$ の場合は明らかだから，$\alpha \geq 0$ の場合を考える．このとき $\int_0^1 s(x)^2\,dm(x)$ の収束発散を見る必要があるが，$s(x) \sim -x^{-\alpha}/\alpha$ だから

$$\int_0^1 x^{-2\alpha}\,dm(x) = \int_0^1 x^{-2\alpha}x^{\alpha}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{-\alpha}e^{-x}\,dx$$

であるから $\alpha \geq 1$ のとき積分は発散し，$0 \leq \alpha < 1$ のとき収束する．

以上をまとめて次のように分類される．

	$s(0)$	$m(0)$	$S(0)$	$M(0)$	boundary 0
$\alpha \geq 0$	$= -\infty$	$> -\infty$	$= \infty$	$< \infty$	non-exit, entrance
$-1 < \alpha < 0$	$> -\infty$	$> -\infty$	$< \infty$	$< \infty$	exit, entrance
$\alpha \leq -1$	$> -\infty$	$= -\infty$	$< \infty$	$= \infty$	exit, non-entrance

また，極限円，極限点の分類では

	boundary 0
$\alpha \geq 1$	limit point
$-1 < \alpha < 1$	limit circle
$\alpha \leq -1$	limit point

まとめると次のようになる．

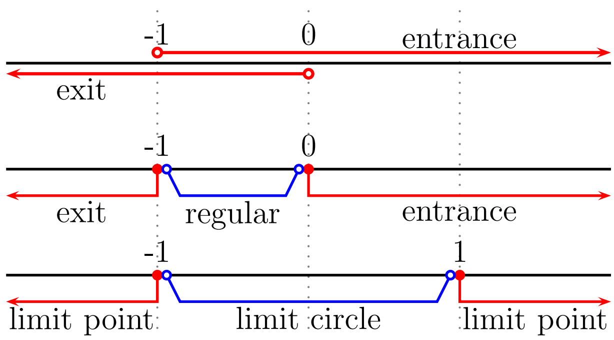


図 9: α による境界の分類

exit & entrance の場合は境界条件を定めなければ確率過程は決まらない．この場合は Dirichlet か Neumann 条件をそれぞれ考える．これで確率過程が一意的に定まる．

さて，$\alpha > -1$ の場合は，測度 dm は不変測度となる．

$$dm = e^{-x}x^{\alpha}\,dx$$

であるが，確率測度になるように正規化して

$$\nu(dx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}e^{-x}dx \tag{16.3}$$

と定める．これはパラメーター $\alpha+1, 1$ のガンマ分布である．さて，Kummer 作用素のスペクトルを調べるために，次節で Laguerre 多項式について述べる．

Notes

- CIR 過程はファイナンスで金利モデルとして使われている．

17. Laguerre 多項式

第 16節 の (16.2) で Kummer 作用素を定義したが，その固有値，固有関数について説明する．固有関数は Laguerre 多項式であるが，その定義から始めよう．

Laguerre 多項式

Laguerre 多項式は次で定義される．$\alpha > -1$ に対し

$$L_n^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{17.1}$$

あとで必要となる Laguerre 多項式の性質を列挙しておこう．(例えば Lebedev [20] §4.17 などを見よ．)

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}, \tag{17.2}$$

$$x\frac{d^2L_n^\alpha(x)}{dx^2} + (\alpha+1-x)\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + nL_n^\alpha(x) = 0, \tag{17.3}$$

$$-x\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + nL_n^\alpha(x) = (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x), \tag{17.4}$$

$$\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{17.5}$$

$$e^{-x/2}x^{\alpha/2}L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{2}\int_0^\infty J_\alpha(\sqrt{xy})e^{-y/2}y^{\alpha/2}L_n^\alpha(y)\,dy, \tag{17.6}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)\,dx = \delta_{m,n}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \tag{17.7}$$

さらに母関数が次で与えられる．

$$(1-t)^{-\alpha-1}e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha(x)t^n, \quad |t| < 1. \tag{17.8}$$

ここではもう 1 つパラメーターを入れて

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) = e^{\beta x}\frac{x^{-\alpha}}{\beta^{n+\alpha}\,n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-\beta x}x^{n+\alpha}). \tag{17.9}$$

と定義する． これは本質的には $L_n^\alpha(x)$ と同じで，次の関係が成り立つ:

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) = L_n^\alpha(\beta x). \tag{17.10}$$

ここで $\beta > 0$ としている．混乱するかもしれないが符号を逆にした形になっている．さてこのことを使えば上で述べた Laguerre 関数の性質は $L_n^{\alpha,\beta}$ の場合に拡張できる．

$$L_n^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{\beta^k(-x)^k}{k!(n-k)!} \tag{17.11}$$

$$x\frac{d^2L_n^{\alpha,\beta}(x)}{dx^2} + (\alpha+1-\beta x)\frac{dL_n^{\alpha,\beta}(x)}{dx} + \beta n L_n^{\alpha,\beta}(x) = 0 \tag{17.12}$$

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} x^\alpha L_m^{\alpha,\beta}(x) L_n^{\alpha,\beta}(x)\, dx = \delta_{m,n}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}n!} \tag{17.13}$$

さて，我々の興味は次の Kummer 作用素であった．

$$\mathfrak{A} = x\frac{d^2}{dx^2} + (1+\alpha-\beta x)\frac{d}{dx}. \tag{17.14}$$

(17.12) は，Laguerre 多項式 $L_n^{\alpha,\beta}$ は $\mathfrak{A}$ のの固有値 $-\beta n$ の固有関数であることを意味している．さらに，ν を (16.3) で定めると，(17.13) は，それらが $L^2(\nu)$ の直交関数系であることを示している．完全であることも示せるので，固有値が総て求まったことになる．

またこの生成作用素に対応する Dirichlet 形式は

$$\mathscr{E}(f,g) = \int_0^\infty x f'(x) g'(x) x^\alpha e^{-\beta x}\, dx \tag{17.15}$$

である．

さて (16.2) で定まる作用素は $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{d}{2}$ に対応するものの 4 倍であるから，固有値は $-2\mathbb{Z}_+$ となる．このことは興味ある結果を意味している．Ornstein-Uhlenbeck 作用素の固有値は $-\mathbb{Z}_+$ であるが，(16.2) の作用素はこの半径方向の動きのみを見ており，そうすると固有値が 2 倍になる．特にスペクトルギャップが 2 倍になっている．これは半径方向だけを見ていると，2 倍の速さで収束しているように見えるわけである．Ornstein-Uhlenbeck 過程は球面方向の運動もあるので，こちらの収束が遅いので全体として収束が遅くなっていると考えられる．

18.　Laguerre 多項式系の完全性

Laguerre 多項式系の完全性は，スペクトルを完全に決定するうえで重要である．総ての多項式は Laguerre 多項式系の一時結合として一意的に表されるので，多項式全体が稠密であるという形で定式化すればよい．さらに，ここで与える証明は特に Laguerre 多項式に限らない一般的な形で示しておく．他にも Hermite 関数系に対しても適応できることになる．

$\mathbb{R}$ 上の確率測度 ν が与えられているとする．$1 \le p < \infty$ として Banach 空間 $L^p(\nu)$ を考える．測度 ν に対して次の仮定をおく．$\delta > 0$ が存在して

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\delta|x|}\,\nu(dx) < \infty. \tag{18.1}$$

この条件があれば，多項式は総て $L^p(\nu)$ に属すことが分かる．この節では次の定理を証明しよう．

定理 18.1. 多項式全体は $L^p(\nu)$ $(p \geq 1)$ で稠密である．

この定理を証明するために，次の命題を準備する．

命題 18.2. μ を $\mathbb{R}$ 上の測度で，ある $\rho > 0$ が存在して，μ の全変動測度を $|\mu|$ としたとき

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\rho|x|}\,|\mu|(dx) < \infty. \tag{18.2}$$

が成り立っているとする．このとき，すべての多項式 P に対し

$$\int_{\mathbb{R}} P(x)\,\mu(dx) = 0 \tag{18.3}$$

が成り立てば，$\mu = 0$ である．

証明 Fourier 変換を用いて証明する．そこで

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izx}\,\mu(dx) \tag{18.4}$$

と定める．F は $z \in \mathbb{R}$ に対しては定義される．さらに仮定から z を複素数としても $|\Im(z)| < \rho$ であれば定義できる．さらに $|\Im(z)| < \rho$ の範囲で複素微分が出来る．実際形式的な微分

$$F'(z) = \int_{\mathbb{R}} ixe^{izx}\,\mu(dx)$$

の被積分関数 ixe^{izx} は $|\mu|$ に対して可積分であるから．よって F は $|\Im(z)| < \rho$ で正則である．さらに高階微分を計算して

$$F^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^n e^{izx}\,\mu(dx)$$

なので

$$F^{(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^n\,\mu(dx) = 0$$

が仮定から成り立つ．これは すべての n について成立するので，$F(z) = 0$ が $|\Im(z)| < \rho$ で成立する．特に $z \in \mathbb{R}$ に対して成立するが，これは μ の Fourier 変換が 0 であることを意味する．従って Fourier 変換の単射性から $\mu = 0$ となる， □

さて，これを使って定理の証明をする．

定理 *18.1*の証明 q を p の共役指数とする: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 次のことを示せばよい．$f \in L^q(\nu)$ が全ての $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,\nu(dx) = 0$$

が成り立てば，$f = 0$ である．

$\mu = f\nu$ として，可積分性を示そう．$\rho = \delta/p$ とする．すると

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{\rho|x|}|f(x)|\,\nu(dx) &\le \int_{\mathbb{R}} e^{|\Im(z)|\,|x|}|f(x)|\,\nu(dx)\\ &\le \left\{\int_{\mathbb{R}} e^{p\rho|x|}\,\nu(dx)\right\}^{1/p}\left\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q\,\nu(dx)\right\}^{1/q}\\ &\le \left\{\int_{\mathbb{R}} e^{\delta|x|}\,\nu(dx)\right\}^{1/p}\left\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q\,\nu(dx)\right\}^{1/q} < \infty\end{aligned}$$

となるから 命題 18.2 の条件 (18.2) をみたす．よって $f = 0$ が従い，定理の結果が得られる． □

19. 合流形超幾何関数

第 16節で定義した Kummer 作用素の固有関数を求めるために，合流形超幾何関数の基本的なことをまとめておく．固有関数を与えるだけなら Laguerre 多項式だけでよいが，全体の構造を見るには合流形超幾何関数を導入した方が分かりやすいだろう．

合流形超幾何関数

主に Beals-Wong [2] に従って述べる（あるいは Lebedev [20]）．記号もそれに従うことが多い．合流型超幾何関数は次で定義される．

(19.1)
$$ {}_1F_1(a;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} x^n.$$

但し，$c \ne 0, -1, -2, \dots$ であり $(a)_n$ は次の Pochhammer symbol である:

(19.2)
$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} a(a+1)\cdots(a+n-1) & n \ge 1,\\ 1 & n = 0.\end{cases}$$

(19.1) で定義される関数は任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して収束し，解析関数である．複素変数の関数であるが，我々は実変数の関数として定義されていれば十分である．この関数は次の合流型超幾何微分方程式をみたす．

(19.3)
$$xu'' + (c-x)u' = au.$$

これはとりもなおさず我々が興味を持っている (16.2) の生成作用素 $\mathfrak{A}$ (特に $\beta = -1$ のとき) の固有関数であることを意味している．特に我々の興味は固有値なので，(19.3) の方程式を考えることが重要なのである．但し，$\mathfrak{A} = x\frac{d}{dx^2} + (\alpha - \beta x)\frac{d}{dx}$ であったから $\alpha = c$, $\beta = 1$ の場合である．以下では α, β はこのように定めて議論を進めていく．

特に，${}_1F_1$ が L^2 に属していれば実際に固有関数になるわけである．この関数を別の記号であらわすことにする．

(19.4)
$$M(a,c;x) = {}_1F_1(a;c;x).$$

さて，(19.3) は2階の微分方程式であるから，もう一つの独立な解が存在する．実際 $x^{1-c}M(a+1-c,2-c;x)$ がそうである．これは次のように直接確かめられる．$x^{1-c}M$ と略記して

$$\begin{aligned}
&x(x^{1-c}M)''+(c-x)(x^{1-c}M)'\\
&\quad=x((1-c)x^{-c}M+x^{1-c}M')'+(c-x)((1-c)x^{-c}M+x^{1-c}M')\\
&\quad=x(-(1-c)cx^{-c-1}M+2(1-c)x^{-c}M'+x^{1-c}M''+(c-x)((1-c)x^{-c}M+x^{1-c}M')\\
&\quad=x^{1-c}(xM''+2(1-c)M'+(c-x)M')-x^{-1}c(1-c)x^{1-c}M+(1-c)(c-x)x^{-1}x^{1-c}M\\
&\quad=x^{1-c}(xM''+(2-c-x)M')+\{-c(1-c)+(1-c)(c-x)\}x^{-1}x^{1-c}M\\
&\quad=x^{1-c}(xM''+(2-c-x)M')-(1-c)x^{1-c}M\\
&\quad=x^{1-c}(a+1-c)M-(1-c)x^{1-c}M\\
&\quad=ax^{1-c}M.
\end{aligned}$$

これで (19.3) をみたしていることが分かった．

これから次の第2種の合流型超幾何関数，または第2種の Kummer 関数が定義される．

$$U(a,c;x)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)}M(a,c;x)+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}x^{1-c}M(a+1-c,2-c;x). \tag{19.5}$$

これらは独立な解であり，Wronskian は

$$W(M(a,c;\cdot),U(a,c;\cdot))(x)=-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}x^{-c}e^{x} \tag{19.6}$$

で与えられる．

ところで，Laguerre 多項式は固有関数であったのであるから，これは上の関数で表されるはずである．実際次が成立する．

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}M(-n,\alpha+1;x). \tag{19.7}$$

すなわち，Laguerre 多項式は超幾何関数の特別な場合であることが分かる．

これら二つの関数に関しては漸近挙動が重要である．まず，$x\to 0$ のときは

$$M(a,c;x)\to 1, \tag{19.8}$$

$$U(a,c;x)\sim\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}x^{1-c} \tag{19.9}$$

がすぐに分かる．

また $x\to\infty$ のときは

$$M(a,c;x)\sim\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}e^{x}x^{a-c}, \tag{19.10}$$

$$U(a,c;x)\sim x^{-a} \tag{19.11}$$

が知られている．但し，$a,\ c\neq 0,-1,-2,\dots$ である．

さて，U を定義するときに $x^{1-c}M(a+1-c,2-c;x)$ という関数が出てきた．この関数は (19.3) をみたしていた．ここで特に $c<1$ の場合を考えよう．L^2 空間でのスペクトルを考えたいので測度を与えておく必要がある．

$$\nu(dx)=x^{c-1}e^{-x}1_{[0,\infty)}(x)\,dx \tag{19.12}$$

で考える．$0<c<1$ のときは $1/\Gamma(c)$ をかけて，確率測度にするのが自然だが，$c\le 0$ のときも考えたいので特に定数はかけないことにする．

明らかに関数 $x^{1-c}M(a+1-c,2-c;x)$ は $x=0$ で 0 になっている．さらに $a+1-c$ が非正整数の場合は Laguerre 多項式に他ならない．$-n=a+1-c$ とすると，$x^{1-c}L_n^{(1-c)}(x)$ である．この関数は $L^2(\nu)$ に属する．実際

$$\int_0^\infty x^{2-2c}[L_n^{(1-c)}(x)]^2x^{c-1}e^{-x}\,dx=\int_0^\infty x^{1-c}[L_n^{(1-c)}(x)]^2e^{-x}\,dx<\infty.$$

よってこの関数は Dirichlet 条件を付けた場合の固有関数になっている．$c\le 0$ のときは，境界 0 は exit, non-entrance なので境界条件は要らない．さらに固有値は a であったが，n との関係から

$$a=c-1-n$$

である．従って $c<1$ のときは，固有値は $c-1-n$ で，固有関数は $x^{1-c}L_n^{(1-c)}(x)$ になることが分かる．

さて，定理 5.8で固有関数は微分すると再び固有関数になった．このことを今の場合も確かめておこう．以下 $c<0$ とする．このとき

$$\begin{aligned}[x^{1-c}L_n^{(1-c)}(x)]'&=(1-c)x{-c}L_n^{(1-c)}(x)+x^{1-c}[L_n^{(1-c)}(x)]'\\&=x^{-c}\{(1-c)L_n^{(1-c)}(x)+x[L_n^{(1-c)}(x)]'\}\\&=(n+1-c)x^{-c}L_n^{(-c)}(x)\quad(\because\ (19.29))\end{aligned}$$

となり，微分すると固有関数になっていることが確かめられる．

隣接関数

Beals-Wang に従って隣接関数のことを述べる．ここで M に関して次のような略記法を決めておく．

$$M=M(a,c;x);\quad M(a\pm)=M(a\pm 1,c;x);\quad M(c\pm)=M(a,c\pm 1;x);$$

また，二つ同時に増やす場合だけ

$$M(a+,c+)=M(a+1,c+1;x)$$

とかくことにする．このとき次が成立する．(証明は Beals-Wang に大体従っている．また，ここで述べる隣接関数は，後で必要なものに限る.)

命題 19.1. 次の関係式が成り立つ.

$$M' = \frac{a}{c}M(a+, c+), \tag{19.13}$$

$$xM' = a[M(a+) - M] = (c-1)[M(c-) - M], \tag{19.14}$$

$$cM' = cM - (c-a)M(c+), \tag{19.15}$$

$$xM' = xM + (c-a)[M(a-) - M]. \tag{19.16}$$

$$xM' = xM + (c-1)[M(a-, c-) - M], \tag{19.17}$$

$$xM(c+) = c[M - M(a-)] \tag{19.18}$$

(19.14), (19.17) では $c = 1$ の場合を除く.

証明 (19.1) から微分すると

$$\begin{aligned}
M'(a;c;x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n(n-1)!}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1}}{(c)_{n+1}n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)_n}{c(c+1)_n n!}x^n \\
&= \frac{a}{c}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n}{(c+1)_n n!}x^n \\
&= \frac{a}{c}M(a+1;c+1;x).
\end{aligned}$$

M を展開したときの x^n の係数を

$$\varepsilon_n = \frac{(a)_n}{(c)_n n!}$$

とおくと，xM', $M(a+)$, $M(c-)$ の係数は

$$n\varepsilon_n, \quad \frac{a+n}{a}\varepsilon_n, \quad \frac{c-1+n}{c-1}\varepsilon_n$$

となる．例えば xM' は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!}nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_n x^n.$$

$M(a+)$ は

$$\frac{(a+1)_n}{(c)_n n!}x^n = \frac{(a)_n(a+n)}{a(c)_n n!}x^n = \frac{a+n}{a}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}x^n$$

から分かる．さらに $M(c-)$ は

$$\frac{(a+1)_n}{(c-1)_n n!}x^n = \frac{(c+n-1)(a)_n}{(c-1)(c)_n n!}x^n = \frac{c+n-1}{c-1}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}x^n.$$

さらに xM', $M(a+)$, $M(c-)$ の係数を書き直すと

$$n\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n + \frac{1}{a}n\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n + \frac{1}{c-1}n\varepsilon_n$$

となるから

$$M(a+) = M + \frac{1}{a}xM' \tag{19.19}$$

$$M(c-) = M + \frac{1}{c-1}xM' \tag{19.20}$$

が得られる．これは (19.14) を意味する．$a=0$ の場合は，上の議論は使えないが，(19.14) は直接確かめられる．$c=1$ の場合は $c-1$ で割っているので除外しなければならない．このときは $M(c-)$ がそもそも定義されていない．

(19.14) を使うと

$$a[M(a+) - M] = (c-1)[M(c-) - M].$$

ここで c の代わりに $c+1$ を代入すると

$$a[M(a+, c+) - M(c+)] = c[M - M(c+)].$$

さらに (19.13) を使うと $aM(a+, c+) = cM'$ だから

$$cM' - aM(c+) = c[M - M(c+)].$$

即ち，

$$cM' = cM - (c-a)M(c+).$$

これで (19.15) が得られた．

また (19.13) から

$$M'(a-) = \frac{a-1}{c}M(c+).$$

(19.15) から

$$M - M' = \frac{c-a}{c}M(c+).$$

両者から

$$M - M' = \frac{c-a}{a-1}M'(a-). \tag{19.21}$$

一方 (19.14) で a を $a-1$ にして

$$xM'(a-) = (a-1)[M - M(a-)]. \tag{19.22}$$

(19.21) の両辺に x をかけて (19.22) と合わせれば

$$xM - xM' = \frac{c-a}{a-1}xM'(a-) = (c-a)[M - M(a-)]$$

となり，(19.16) が示せた．ただし，上の議論では $a-1$ で割っているので $a=1$ を除外しなければならないが，(19.16) がこの場合も直接確かめられる．実際このとき

$$M - M(a-) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(c)_n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(c)_n}$$

であり，(19.15) から

$$\begin{aligned} xM - xM' &= x\frac{c-1}{c}M(c+) \\ &= x\frac{c-1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(c+1)_n} \\ &= (c-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(c)_{n+1}} \\ &= (c-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(c)_n} \end{aligned}$$

なので，(19.16) が直接確かめられたことになる．

ここでもう一度 (19.14) を使うと

$$a[M(a+) - M] = (c-1)[M(c-) - M].$$

ここで a の代わりに $a-1$ を代入すると

$$(a-1)[M - M(a-)] = (c-1)[M(a-, c-) - M(a-)].$$

両辺から $(c-1)M$ を引いて

$$(a-c)M - (a-1)M(a-) = (c-1)[M(a-, c-) - M] - (c-1)M(a-).$$

整理して

$$(a-c)[M - M(a-)] = (c-1)[M(a-, c-) - M].$$

これと (19.16) を合わせて (19.17) を得る．

次に (19.17) と (19.14) から

$$(c-1)[M(c-) - M] = xM + (c-1)[M(a-, c-) - M].$$

これから

$$xM = (c-1)[M(c-) - M(a-, c-)].$$

さらに c を $c+1$ にすれば

$$xM(c+) = c[M - M(a-)]$$

となり (19.18) を得る. □

後で使うものだけ整理すると，次のものが得られる．但し，後で使いやすい形に書き替えてある．

定理 19.2. 次の関係式が成り立つ．

$$M' = \frac{a}{c}M(a+, c+), \tag{19.23}$$

$$xM' + (c-1-x)M = (c-1)M(a-, c-). \tag{19.24}$$

$$xM' + (c-1)M = (c-1)M(c-), \tag{19.25}$$

$$c(M' - M) = (a-c)M(c+), \tag{19.26}$$

(19.7) から，Laguerre 多項式は同様の性質を満たす．必要なものだけ，定理の形でまとめておく．証明は M に帰着する方法を採る．

定理 19.3. 次の関係式が成り立つ．

$$[L_n^{(\alpha)}]'(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \tag{19.27}$$

$$x[L_{n-1}^{(\alpha+1)}]'(x) + (\alpha+1-x)L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = nL_n^{(\alpha)}(x), \tag{19.28}$$

$$x[L_n^{(\alpha)}]'(x) + \alpha L_n^{(\alpha)}(x) = (\alpha+n)L_n^{(\alpha-1)}(x), \tag{19.29}$$

$$[L_n^{(\alpha)}]'(x) - L_n^{(\alpha)}(x) = -L_n^{(\alpha+1)}(x), \tag{19.30}$$

$$L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x), \tag{19.31}$$

$$x[L_{n-1}^{(\alpha)}]'(x) + (\alpha+n-x)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = nL_n^{(\alpha)}(x), \tag{19.32}$$

$$x[L_n^{(\alpha)}]'(x) - nL_n^{(\alpha)}(x) = -(\alpha+n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{19.33}$$

証明 まず

$$\begin{aligned}
[L_n^{(\alpha)}]'(x) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}[M(-n, \alpha+1; x)]' \\
&= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\frac{-n}{\alpha+1}M(-n+1, \alpha+2; x) \quad (\because\ (19.23)) \\
&= -\frac{(\alpha+2)_{n-1}}{(n-1)!}M(-n+1, \alpha+2; x) \\
&= -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).
\end{aligned}$$

次に

$$
\begin{aligned}
&x[L_{n-1}^{(\alpha+1)}]'(x) + (\alpha+1-x)L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \\
&\quad = x\frac{(\alpha+2)_{n-1}}{(n-1)!}M(-n+1,\alpha+2;x)' + (\alpha+1-x)\frac{(\alpha+2)_{n-1}}{(n-1)!}M(-n+1,\alpha+2;x) \\
&\quad = \frac{(\alpha+2)_{n-1}}{(n-1)!}(xM(-n+1,\alpha+2;x)' + (\alpha+1-x)M(-n+1,\alpha+2;x)) \\
&\quad = \frac{(\alpha+2)_{n-1}}{(n-1)!}(\alpha+1)M(-n,\alpha+1;x) \quad (\because\ (19.24)) \\
&\quad = n\frac{(\alpha+1)_n}{n!}M(-n,\alpha+1;x) \\
&\quad = nL_n^{(\alpha)}(x).
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
x[L_n^{(\alpha)}]'(x) + \alpha L_n^{(\alpha)}(x) &= x\frac{(\alpha+1)_n}{n!}M(-n,\alpha+1;x)' + \alpha\frac{(\alpha+1)_n}{n!}M(-n,\alpha+1;x) \\
&= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}[xM(-n,\alpha+1;x)' + \alpha M(-n,\alpha+1;x)] \\
&= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\alpha M(-n,\alpha;x) \quad (\because\ (19.25)) \\
&= \frac{(\alpha)_n}{n!}(\alpha+n)M(-n,\alpha;x) \\
&= (\alpha+n)L_n^{(\alpha-1)}(x).
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
[L_n^{(\alpha)}]'(x) - L_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}M(-n,\alpha+1;x)' - \frac{(\alpha+1)_n}{n!}M(-n,\alpha+1;x) \\
&= \frac{(\alpha+2)_{n-1}}{n!}(\alpha+1)(M(-n,\alpha+1;x)' - M(-n,\alpha+1;x)) \\
&= \frac{(\alpha+2)_{n-1}}{n!}(-n-\alpha-1)M(-n,\alpha+2;x) \quad (\because\ (19.26)) \\
&= -\frac{(\alpha+2)_{n-1}}{n!}(\alpha+1+n)M(-n,\alpha+2;x) \\
&= -\frac{(\alpha+2)_n}{n!}M(-n,\alpha+2;x) \\
&= -L_n^{(\alpha+1)}(x).
\end{aligned}
$$

(19.31) は，(19.30) に (19.27) を用いればよい．

(19.32) は,

$$
\begin{aligned}
x[L_{n-1}^{(\alpha)}]'(x) + (\alpha+n-x)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) &= x[L_{n-1}^{(\alpha)}]'(x) + (\alpha-x)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha)}(x) \\
&= nL_n^{(\alpha-1)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha)}(x) \quad (\because\ (19.28))
\end{aligned}
$$

$$= nL_n^{(\alpha)}(x). \quad (\because\ (19.31))$$

(19.33) は,

$$\begin{aligned} x[L_n^{(\alpha)}]'(x) - nL_n^{(\alpha)}(x) &= x[L_n^{(\alpha)}]'(x) + \alpha L_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha+n)L_n^{(\alpha)}(x) \\ &= (\alpha+n)L_n^{(\alpha-1)}(x) - (\alpha+n)L_n^{(\alpha)}(x) \quad (\because\ (19.29)) \\ &= -(\alpha+n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x). \quad (\because\ (19.31)) \end{aligned}$$

□

20. Kummer 作用素の固有関数

(II) の $a = x$ の場合を扱っていた．そしてここで扱う作用素は

(20.1)
$$L_{(\alpha)} = x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1-x)\frac{d}{dx}$$

である．この作用素を Kummer 作用素と呼んだ．Laguerre 作用素，CIR 作用素などと呼んでもよいかもしれないことは第 16節で述べたとおりである．

Laguerre 関数系が Kummer 作用素の固有関数であることはよく知られていると言えるが，第 3節の設定の下で，固有関数の対応関係を見てみよう．$a = x$, $\rho = x^\alpha e^{-x}$ とする．ここで $\alpha > -1$ の場合は，ρ は $1/\Gamma(\alpha+1)$ をかけて正規化し，確率密度にすることが多いが，ここでは $\alpha \le -1$ の場合も扱うので，この形で扱う．

さて (3.8) の計算から

$$b = a' + a(\log\rho)' = 1 + x(\alpha\log x - x)' = 1 + x\left(\frac{\alpha}{x} - 1\right) = 1 + \alpha - x$$

であるから

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}u &= xu'' + (1+\alpha-x)u', \\ \hat{\mathfrak{A}}u &= xu'' + (2+\alpha-x)u' - u. \end{aligned}$$

さて，$xu'' + (1+\alpha-x)u'$ をここでは Laguerre 作用素と呼ぶことにする．上の関係式は $\mathfrak{A} = L_{(\alpha)}$ のとき $\hat{\mathfrak{A}} = L_{(\alpha+1)} - 1$ ことを意味している．後の計算のために，次の等式を注意しておこう．

(20.2)
$$L_{(\alpha)}(fg) = (L_{(\alpha)}f)g + fL_{(\alpha)}g + 2xf'g'.$$

$L_{(\alpha)}$ の固有関数は Laguerre 多項式 $L_n^{(\alpha)}$ である．固有関数を論じる前に，$\mathfrak{A}u = \lambda u$ の常微分方程式としての基本解系を述べておこう．これらは合流形の超幾何関数関数で与えられていることはよく知られている．第 19節で見たように $M(\lambda, \alpha+1; x)$，$x^{-\alpha}M(\lambda-\alpha, 1-\alpha; x)$ が基本解系となる．

まず，$\alpha > -1$ の場合を扱う．このとき，境界 0 は Feller の分類で entrance である．そのこともあって，この場合の固有関数を entrance 系列の固有関数とよぶことにする．entrance であるから，entrance, exit と entrance, non-exit の場合がある．前者の場合は境界条件が必要となるので Neumann 条件を課す．後者の場合は，Markov 過程が対応する物のみを考えるので，境界条件は不要である．ここでの目的は確率過程としての特性も見たいので，初めから対応する Markov 過程が存在する物に制限して考える．それを仮定しないと，今の所議論がうまく進まないことも理由である．entrance 系列は，Neumann 系列と呼んでもいいかもしれない．

やや先走ることになるが，$\alpha < 0$ の場合は境界 0 は exit である．この場合の固有関数を exit 系列の固有関数と呼ぶ．やはり exit, entrance, と exit, non-entrance の場合があるが前者の場合は Dirichlet 境界条件を課す．後者の場合は境界条件は不要になる．exit 系列は，Dirichlet 系列と呼んでもいであろう．$-1 < \alpha < 0$ の場合は，両方の場合があるが，entrance 系列として考えるときは Neumann 条件を，exit 系列として考えるときは Dirichlet 条件を課していることを注意しておく．

さて，$\alpha > -1$ の場合は，基本解系の $M(\lambda, \alpha+1; x)$ は Neumann 境界条件を満たす．実際 Neumann 境界条件は

(20.3) $$\frac{du}{ds}(0+) = \frac{u'}{s'}(0+)u'(0+) = 0 = (a\rho u')(0+) = 0$$

今の場合は

$$(a\rho u')(0+) = x x^{\alpha} e^{-x} u'(x)|_{x=0+} = x^{\alpha+1} e^{-x} u'(x)|_{x=0+} = 0$$

である．$u = M(\lambda, \alpha+1; x)$ は解析関数であるから，$u'(0+)$ が有限で存在する．従って $x^{\alpha+1}$ の項の寄与から上の等式が成立し，Neumann 条件が確かめられる．

さて $M(\lambda, \alpha+1; x)$ を微分すると (19.23) から

$$[M(\lambda, \alpha+1; x)]' = \frac{\lambda}{\alpha+1} M(\lambda+1, \alpha+2; x)$$

となり，同じタイプの関数になっている．さらに，$D = \frac{d}{dx}$ の双対作用素は

(20.4) $$-D^* u = xu' + (1+\alpha-x)u$$

であるから

$$\begin{aligned}
-D^*&\left[\frac{\lambda}{\alpha+1} M(\lambda+1, \alpha+2; x)\right] \\
&= \frac{\lambda}{\alpha+1}\{x[M(\lambda+1, \alpha+2; x)]' + (1+\alpha-x)M(\lambda+1, \alpha+2; x)\} \\
&= \frac{\lambda}{\alpha+1}(\alpha+1)M(\lambda, \alpha+1; x) \quad (\because\ (19.24)) \\
&= \lambda M(\lambda, \alpha+1; x)
\end{aligned}$$

となる．(19.7) から $\lambda = -n$ (n は非負整数) のとき Laguerre 多項式となり，2 乗可積分性が確かめられるから，固有関数となる．このとき (19.27) から

$$[L_n^{(\alpha)}(x)]' = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

また双対作用素に対しては

$$\begin{aligned} -D^*[L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)] &= x[L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)]' + (\alpha+1-x)L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \\ &= nL_n^{(\alpha)}(x). \quad (\because\ (19.28)) \end{aligned}$$

この計算は，実際に固有値が $-n$ であることを確かめたことになっている．

さて，次に $\alpha < 0$ の exit 系列の場合を考える．

この場合の固有関数を見るために，ユニタリー変換を行う．命題 10.1 で見たように $x^{-\alpha}$ が $L_{(\alpha)} - \alpha$-調和である．従って $x^{-\alpha}$ で次のように変換することができる．

$$\begin{tikzcd} L^2([0,\infty); x^{-\alpha}e^{-x}\,dx) \arrow[r, "L_{(-\alpha)}+\alpha"] \arrow[d, "R"'] & L^2([0,\infty); x^{-\alpha}e^{-x}\,dx) \arrow[d, "R"] \\ L^2([0,\infty); x^{\alpha}e^{-x}\,dx) \arrow[r, "L_{(\alpha)}"'] & L^2([0,\infty); x^{\alpha}e^{-x}\,dx) \end{tikzcd} \tag{20.5}$$

ここで

$$Rf = x^{-\alpha}f \tag{20.6}$$

この可換性を見るには $\varphi = x^{-\alpha}$ とおいて (20.2) を使うと

$$\begin{aligned} L_{(\alpha,\beta)}(\varphi f) &= (L_{(\alpha)}\varphi)f + \varphi L_{(\alpha)}f + 2x\varphi' f' \\ &= \alpha\varphi f + \varphi L_{(\alpha)}f - 2\alpha x x^{-\alpha-1}f' \\ &= \alpha\varphi f + \varphi[xf'' + (\alpha+1-x)f'] - 2\alpha\varphi f' \\ &= \alpha\varphi f + \varphi[xf'' + (-\alpha+1-x)f'] \\ &= \alpha\varphi f + \varphi L_{(-\alpha)}f \\ &= \varphi(L_{(-\alpha)}+\alpha)f. \end{aligned}$$

これで図式の可換性が示せた．また $x^{-\alpha}M(\lambda-\alpha, -\alpha+1; x)$ が

$$\begin{aligned} L_{(\alpha)}[x^{-\alpha}M(\lambda-\alpha,-\alpha+1;x)] &= x^{-\alpha}L_{(-\alpha)}M(\lambda-\alpha,-\alpha+1;x) + x^{-\alpha}\alpha M(\lambda-\alpha,-\alpha+1;x) \\ &= (\lambda-\alpha+\alpha)x^{-\alpha}M(\lambda-\alpha,-\alpha+1;x) \\ &= \lambda x^{-\alpha}M(\lambda-\alpha,-\alpha+1;x) \end{aligned}$$

を満たしている．これは第 19節ですでに計算したが，h 変換の立場から見直したことになっている．

さて Dirichlet 条件を課すので $x^{-\alpha}M(\lambda-\alpha,1-\alpha;x)$ を考える．微分による対応関係を考えていこう．$\alpha<-1$ のとき，(19.24) から

$$
\begin{aligned}
[x^{-\alpha}M(\lambda-\alpha,1-\alpha;x)]' &= (-\alpha)x^{-\alpha-1}M(\lambda-\alpha,1-\alpha;x)+x^{-\alpha}[M(\lambda-\alpha,1-\alpha;x)]' \\
&= x^{-\alpha-1}\{-\alpha M(\lambda-\alpha,1-\alpha;x)+x[M(\lambda-\alpha,1-\alpha;x)]'\} \\
&= -\alpha x^{-\alpha-1}M(\lambda-\alpha,-\alpha;x) \quad (\because\ (19.24))
\end{aligned}
$$

となり，同じ系列の関数が得られる．双対作用素に対しては，(19.26) を用いて

$$
\begin{aligned}
&-D^*[-\alpha x^{-\alpha-1}M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)] \\
&\quad= -\alpha\{x[x^{-\alpha-1}M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)]'+(1+\alpha-x)x^{-\alpha-1}M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)\} \\
&\quad= -\alpha\{x(-\alpha-1)x^{-\alpha-2}M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)+xx^{-\alpha-1}[M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)]' \\
&\qquad +(1+\alpha-x)x^{-\alpha-1}M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)\} \\
&\quad= -\alpha x^{-\alpha-1}\{(-\alpha-1)M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)+x[M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)]' \\
&\qquad +(1+\alpha-x)M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)\} \\
&\quad= -\alpha x^{-\alpha}\{[M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)]'-M(\lambda-\alpha,-\alpha;x)\} \\
&\quad= (\lambda-\alpha+\alpha)x^{-\alpha}M(\lambda-\alpha,1-\alpha;x) \quad (\because\ (19.26)) \\
&\quad= \lambda x^{-\alpha}M(\lambda-\alpha,1-\alpha;x).
\end{aligned}
$$

これで λ がかかって元にもどった形になっていることが分かる．

さて $n=0,-1-2,\ldots$ に対し，$\lambda-\alpha=-n$ ととれば，$M(\lambda-\alpha,1-\alpha;x)$ は Laguerre 多項式になる:

$$
L_n^{(-\alpha)}(x)=\frac{(1-\alpha)_n}{n!}M(-n,1-\alpha;x).
$$

また明らかに $x^{-\alpha}L_n^{(-\alpha)}(x)$ は $L^2(x^{\alpha}e^{-x})$ に属す．また次に見るように 固有値 $\lambda=-n+\alpha$ の固有関数になる．まず微分すると

$$
\begin{aligned}
[x^{-\alpha}L_n^{(-\alpha)}(x)]' &= -\alpha x^{-\alpha-1}L_n^{(-\alpha)}(x)+x^{-\alpha}[L_n^{(-\alpha)}(x)]' \\
&= x^{-\alpha-1}(-\alpha L_n^{(-\alpha)}(x)+x[L_n^{(-\alpha)}(x)]') \\
&= x^{-\alpha-1}(-\alpha+n)L_n^{(-\alpha-1)}(x) \quad (\because\ (19.29)) \\
&= (-\alpha+n)x^{-\alpha-1}L_n^{(-\alpha-1)}(x).
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
-D^*\left[x^{-\alpha-1}L_n^{(-\alpha-1)}(x)\right] &= x[x^{-\alpha-1}L_n^{(-\alpha-1)}(x)]'+(\alpha+1-x)x^{-\alpha-1}L_n^{(-\alpha-1)}(x) \\
&= x\{-(\alpha+1)x^{-\alpha-2}L_n^{(-\alpha-1)}(x)+x^{-\alpha-1}L_n^{(-\alpha-1)}(x)'\} \\
&\quad +(\alpha+1-x)x^{-\alpha-1}L_n^{(-\alpha-1)}(x) \\
&= [-(\alpha+1)x^{-\alpha-1}+(\alpha+1-x)x^{-\alpha-1}]L_n^{(-\alpha-1)}(x)+x^{-\alpha}L_n^{(-\alpha-1)}(x)'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -x^{-\alpha}L_n^{(-\alpha-1)}(x) + x^{-\alpha}L_n^{(-\alpha-1)}(x)' \\
&= x^{-\alpha}[L_n^{(-\alpha-1)}(x)' - L_n^{(-\alpha-1)}(x)] \\
&= -x^{-\alpha}L_n^{(-\alpha)}(x) \quad (\because\ (19.30))
\end{aligned}
$$

これから固有値が $-n+\alpha$ であることが分かる．これですべてが確かめられた．Dirichlet 境界条件の場合，固有値が $\alpha, \alpha-1, \alpha-2, \dots$ で尽くされていることを証明しておこう．

定理 20.1. $\alpha < 0$ とする．このとき作用素 $\mathfrak{A}u = xu'' + (1+\alpha-x)u'$ に Dirichlet 境界条件を付けたときの固有値は $\alpha, \alpha-1, \alpha-2, \dots$ である．

証明 $x^{-\alpha}L_n^{(-\alpha)}(x)$ の線型包が稠密であることを示せばよい．そこで $f \in L^2(x^\alpha e^{-x})$ が

$$
\int_0^\infty f(x)x^{-\alpha}L_n^{(-\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}\,dx = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots
$$

をみたすとする．このとき $f=0$ を示せばよい．ところで任意の多項式は $L_n^{(-\alpha)}(x)$ の線型結合で表される．よって任意の多項式 P に対し

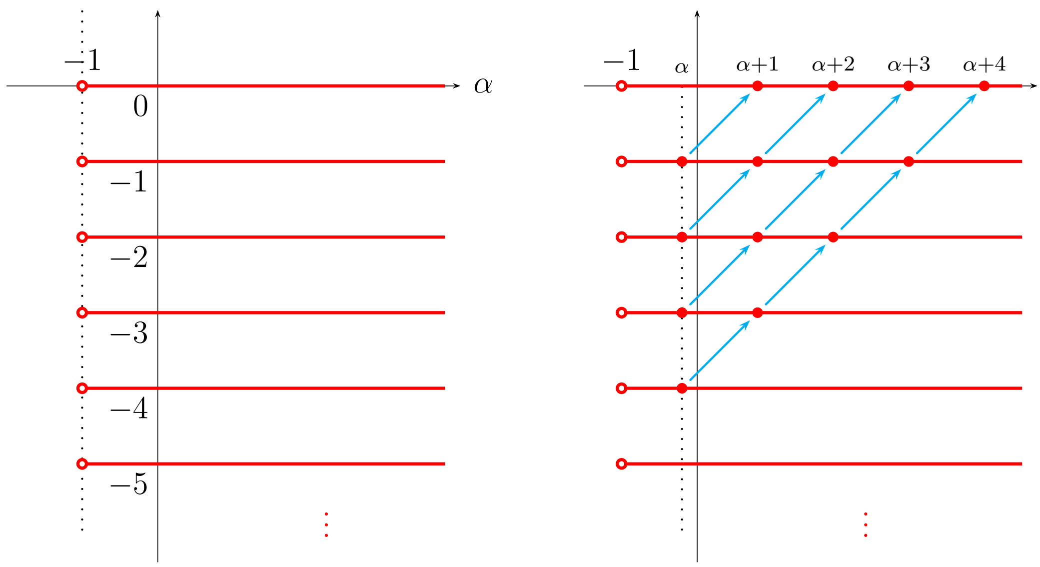
$$
\int_0^\infty f(x)P(x)e^{-x}\,dx = 0,
$$

のとき $f=0$ が成り立てばよい．これで符号付測度 $f(x)e^{-x}\,dx$ に対して命題 18.2 を使える形になった．あとは可積分性の条件を示せばよい．$\rho < \frac{1}{2}$ とすると

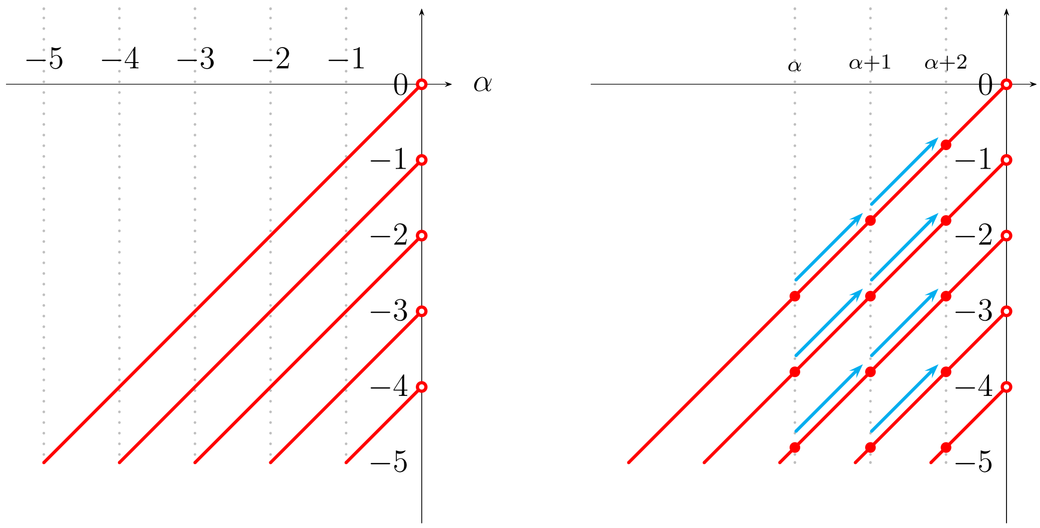
$$
\int_0^\infty e^{\rho x}|f(x)|e^{-x}\,dx \le \left\{\int_0^\infty e^{\rho x}|f(x)|^2 x^\alpha e^{-x}\,dx\right\}^{1/2}\left\{\int_0^\infty e^{2\rho x}x^{-\alpha}e^{-x}\,dx\right\}^{1/2} < \infty.
$$

よって命題 18.2 から $f=0$ で証明が終わる． □

以下に固有値を図示しよう．まず entrance 系列は次で与えられる．$\alpha > -1$ で必要な場合は境界条件は Neumann である．横の座標が α で，点 $(\alpha, -n)$ に固有関数 $L_n^{(\alpha)}$ が付随している描像である．矢印は，微分による固有値の対応を表している．矢印を逆向きにすれば，Stein dual での対応になる．



次に exit 系列の固有値を見てみよう．$\alpha < 0$ とする．境界条件は必要な場合は Dirichlet 境界条件を付けて考える．横の座標が α で点 $(\alpha, \alpha - n)$ に固有関数 $x^{-\alpha}L_n^{(-\alpha)}$ が付随している．矢印は，微分による固有値の対応を表している．矢印を逆向きにすれば，Stein dual での対応になる．



Kummer 作用素のスペクトル（Exit 系列）

すべてを纏めて書くと，次のようになる．

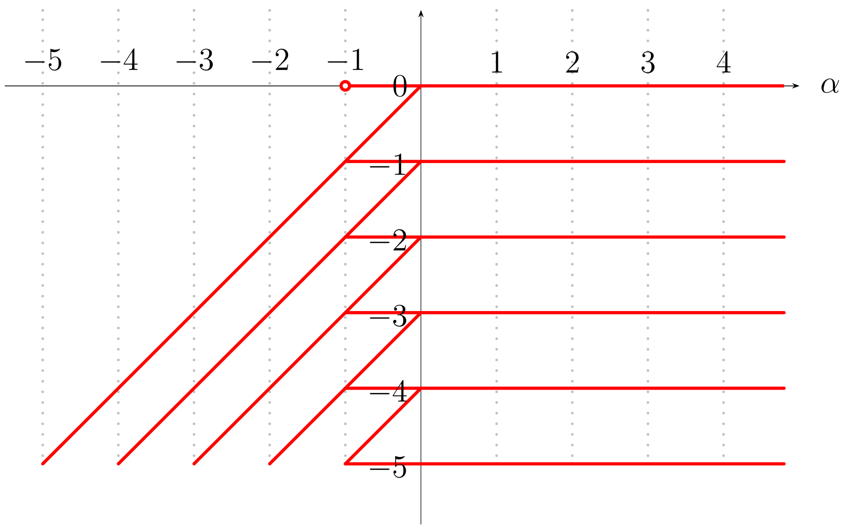


図 10: Kummer 作用素のスペクトル

Notes

- Laguerre 関数に対して，spectral gap と 対数 Sobolev 不等式の定数が食い違うことは Korzeniowski-Stroock [17] に述べられている．ただし，彼らが扱っているのは, ここで

の $\beta = 1/2$, $\alpha = 1$ の場合のみである．Ornstein-Uhlenbeck で言えば 2 次元の場合である．半群を用いて証明しているので，多少やり方が違う．

21. Kummer 作用素の Feller 対

引き続き (I) $a = x$ の場合を考える．

Feller 対

Kummer 作用素の Feller's pair にあたるものをここでは考察する．ここで扱う作用素は

(21.1)
$$\tilde{L}_{(\alpha)} = x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 + x)\frac{d}{dx}$$

である．

$a = x$, $\rho = x^\alpha e^x$ が対応する．実際 (3.8) を確かめればよい．

$$b = a' + a(\log\rho)' = 1 + x(\alpha\log x + x)' = 1 + x\left(\frac{\alpha}{x} + 1\right) = 1 + \alpha + x$$

であるから (3.8) から，(21.1) が成り立つことが分かる．

境界の分類

さて，このとき尺度関数の微分は

$$s'(x) = \frac{1}{a\rho} = \frac{1}{x x^\alpha e^x} = x^{-\alpha-1}e^{-x}$$

となり，Kummer 作用素の $L_{(-\alpha-1)}$ の speed measure density に等しい．従って，$\tilde{L}_{(\alpha)}$ の Feller's pair が $L_{(-\alpha-1)}$ であることが分かる．このことを考えると，境界の分類は，Feller's pair では， exit と entrance が入れ替わる形なので，次のように分類されることが分かる．

	$s(0)$	$m(0)$	$S(0)$	$M(0)$	boundary 0
$\alpha \geq 0$	$= -\infty$	$> -\infty$	$= \infty$	$< \infty$	non-exit, entrance
$-1 < \alpha < 0$	$> -\infty$	$> -\infty$	$< \infty$	$< \infty$	exit, entrance
$\alpha \leq -1$	$> -\infty$	$= -\infty$	$< \infty$	$= \infty$	exit, non-entrance

また，0 が，極限円か極限点かも重要な性質である．$\alpha < 0$ の場合は明らかだから，$\alpha \geq 0$ の場合を考える．このとき $\int_0^1 s(x)^2\,dm(x)$ の収束発散を見る必要があるが，$s(x) \sim -x^{-\alpha}/\alpha$ だから ($\alpha = 0$ のときは $s(x) \sim \log x$ である)

$$\int_0^1 x^{-2\alpha}\,dm(x) = \int_0^1 x^{-2\alpha}x^\alpha e^x\,dx = \int_0^1 x^{-\alpha}e^x\,dx$$

であるから $\alpha \geq 1$ のとき積分は発散し，$0 \leq \alpha < 1$ のとき収束する．

以上をまとめて次のように分類される．

	boundary 0
$\alpha \geq 1$	limit point
$-1 < \alpha < 1$	limit circle
$\alpha \leq -1$	limit point

図示すると次のようになる．

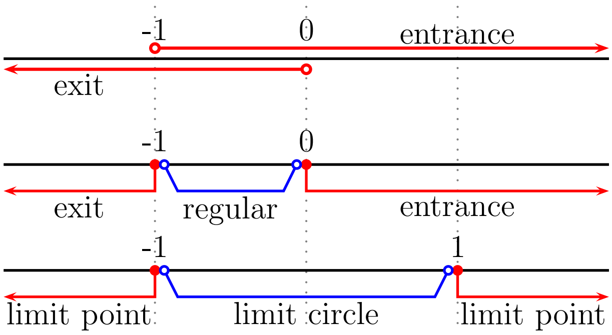


図 11: α による境界の分類

$\alpha > -1$ の場合 (entrance 系列)

Doob の h-変換はここでも使う．命題 10.2 で示したように e^{-x} は $\tilde{L}_{(\alpha)} + \alpha + 1$-調和である．ここで $\varphi = e^{-x}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_{(\alpha)}(\varphi f) &= (\tilde{L}_{(\alpha)}\varphi)f + \varphi\tilde{L}_{(\alpha)}f + 2x\varphi' f' \\
&= -(\alpha+1)\varphi f + \varphi\tilde{L}_{(\alpha)}f - 2xe^{-x}f' \\
&= -(\alpha+1)\varphi f + \varphi[xf'' + (\alpha+1+x)f'] - 2x\varphi f' \\
&= -(\alpha+1)\varphi f + \varphi[xf'' + (\alpha+1-x)f'] \\
&= -(\alpha+1)\varphi f + \varphi L_{(\alpha)}f \\
&= \varphi(L_{(-\alpha)} - (\alpha+1))f.
\end{aligned}
$$

従って次の可換図式が成り立つ．

$$
\begin{array}{ccc}
L^2([0,\infty); x^\alpha e^x\,dx) & \xrightarrow{\tilde{L}_{(\alpha)}} & L^2([0,\infty); x^\alpha e^x\,dx) \\
R\uparrow & & \uparrow R \\
L^2([0,\infty); x^\alpha e^{-x}\,dx) & \xrightarrow[L_{(\alpha)} - \alpha - 1]{} & L^2([0,\infty); x^\alpha e^{-x}\,dx)
\end{array}
\tag{21.2}
$$

ここで

$$Rf = e^{-x} f. \tag{21.3}$$

R が unitary であることは

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (Rf)^2 x^\alpha e^x \, dx &= \int_0^\infty f^2 e^{-2x} x^\alpha e^x \, dx \\ &= \int_0^\infty f^2 x^\alpha e^{-x} \, dx\end{aligned}$$

より明らか.

これで $\varphi^{-1}\tilde{L}_{(\alpha)}\varphi = L_{(\alpha)} - \alpha - 1$ なので，$\tilde{L}_{(\alpha)}$ のスペクトルが分かる．$L_{(\alpha)}$ の固有値は $-n$ で固有関数は Laguerre 多項式 $L_n^{(\alpha)}(x)$ である．従って $\tilde{L}_{(\alpha)}$ の固有値は $-n-\alpha-1$ で固有関数は

$$L_n^{(\alpha)}(x) e^{-x} \tag{21.4}$$

である．

Stein の対応を見ておこう．まず，固有関数を微分すると

$$\begin{aligned}[L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x}]' &= [L_n^{(\alpha)}(x)]'e^{-x} - L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x} \\ &= \{[L_n^{(\alpha)}(x)]' - L_n^{(\alpha)}(x)\}e^{-x} \\ &= -L_n^{(\alpha+1)}(x)e^{-x} \quad (\because \ (19.30)\ )\end{aligned}$$

即ち

$$[L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x}]' = -L_n^{(\alpha+1)}(x)e^{-x} \tag{21.5}$$

となり，$\alpha+1$ のときの固有関数になっている．

Stein の dual に関しては

$$\begin{aligned}(x\frac{d}{dx} + \alpha + x)[L_n^{(\alpha+1)}(x)e^{-x}] &= -(x[L_n^{(\alpha+1)}(x)]' - xL_n^{(\alpha+1)}(x) + (\alpha+1+x)L_n^{(\alpha+1)}(x))e^{-x} \\ &= -(x[L_n^{(\alpha+1)}(x)]' + (\alpha+1)L_n^{(\alpha+1)}(x))e^{-x} \\ &= -(n+\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x} \quad (\because \ (19.29)\ )\end{aligned}$$

となり，$L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x}$ が固有関数であることも確かめられている．

最後に Feller の対応を見よう．固有関数に $\frac{d}{ds}$ を作用させると

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}[L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x}] &= \frac{1}{x^{-\alpha-1}e^{-x}}[L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x}]' \\ &= -\frac{1}{x^{-\alpha-1}e^{-x}}L_n^{(\alpha+1)}(x)e^{-x} \quad (\because (21.5)) \\ &= -x^{\alpha+1}L_n^{(\alpha+1)}(x).\end{aligned}$$

これは $-\alpha-1$ に対する Kummer 作用素 $L_{(-\alpha-1)}$ の固有関数に他ならない．これで Feller の対応関係が成立していることも確認できた．以上をまとめると

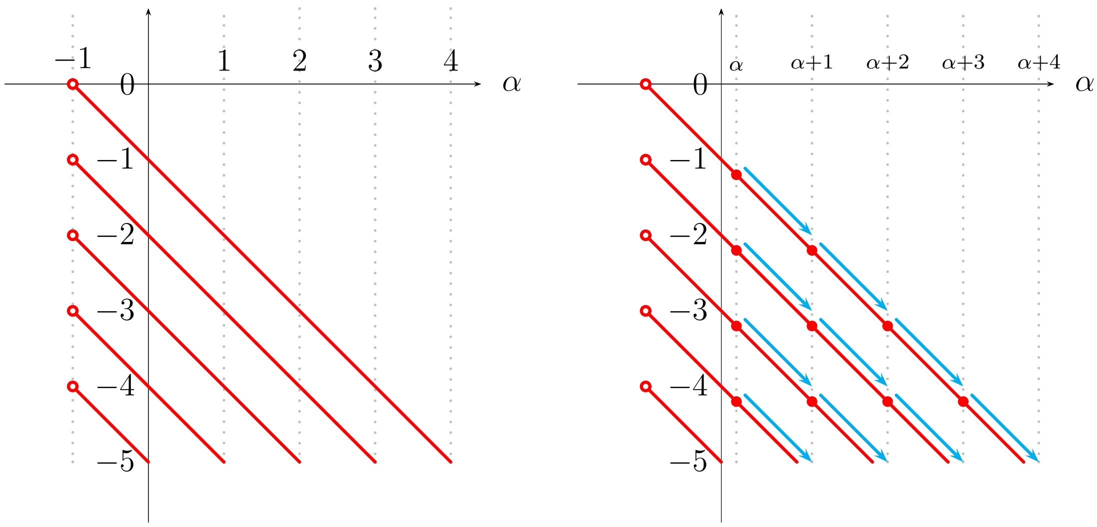


図 12: 双対 Kummer 作用素のスペクトル（Entrance 系列）

$\alpha < 0$ の場合 (exit 系列)

この場合は，$x^{-\alpha}e^{-x}$ が $\tilde{L}_{(\alpha)}+1$-調和であることをに注意して Doob の h-変換を行う．ここで $\varphi = x^{-\alpha}e^{-x}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_{(\alpha)}(\varphi f) &= (\tilde{L}_{(\alpha)}\varphi)f + \varphi\tilde{L}_{(\alpha)}f + 2x\varphi' f' \\
&= -\varphi f + \varphi\tilde{L}_{(\alpha)}f + 2x(-\alpha x^{-\alpha-1}e^{-x} - x^{-\alpha}e^{-x})f' \\
&= -\varphi f + \varphi\tilde{L}_{(\alpha)}f + \varphi(-2\alpha - 2x)f' \\
&= -\varphi f + \varphi[xf'' + (\alpha+1+x)f'] - 2\varphi(\alpha+x)f' \\
&= -\varphi f + \varphi[xf'' + (-\alpha+1-x)f'] \\
&= -\varphi f + \varphi L_{()} {-\alpha} f \\
&= \varphi(L_{(-\alpha)} - 1)f.
\end{aligned}
$$

従って次の可換図式が成り立つ．

(21.6)
$$
\begin{tikzcd}
L^2([0,\infty); x^{\alpha}e^{x}\,dx) \arrow[r, "\tilde{L}_{(\alpha)}"] & L^2([0,\infty); x^{\alpha}e^{x}\,dx) \\
L^2([0,\infty); x^{-\alpha}e^{-x}\,dx) \arrow[u, "R"] \arrow[r, "L_{(-\alpha)} - 1"'] & L^2([0,\infty); x^{-\alpha}e^{-x}\,dx) \arrow[u, "R"']
\end{tikzcd}
$$

ここで

(21.7)
$$
Rf = x^{-\alpha}e^{-x}f.
$$

R が unitary であることは

$$\int_0^\infty (Rf)^2 x^\alpha e^x\,dx = \int_0^\infty f^2 x^{-2\alpha} e^{-2x} x^\alpha e^x\,dx$$
$$= \int_0^\infty f^2 x^{-\alpha} e^{-x}\,dx$$

より明らか．よって $\tilde{L}_{(\alpha)}$ と $L_{(-\alpha)}-1$ は同じスペクトルを持つ．$L_{(-\alpha)}$ の固有値は $-n$ で固有関数は Laguerre 多項式 $L_n^{(-\alpha)}(x)$ であるから，$\tilde{L}_{(\alpha)}$ の固有値は $-n-1$ で固有関数は

$$L_n^{(-\alpha)}(x)x^{-\alpha}e^{-x} \tag{21.8}$$

である．

Stein の対応を見る．まず，固有関数を微分すると

$$\begin{aligned}[L_n^{(-\alpha)}(x)x^{-\alpha}e^{-x}]' &= [L_n^{(-\alpha)}(x)]'x^{-\alpha}e^{-x} - L_n^{(-\alpha)}(x)(-\alpha x^{-\alpha-1} - x^{-\alpha})e^{-x} \\ &= \{x[L_n^{(-\alpha)}(x)]' - (\alpha+x)L_n^{(-\alpha)}(x)\}x^{-\alpha-1}e^{-x} \\ &= (n+1)L_n^{-\alpha-1}(x)x^{-\alpha-1}e^{-x} \quad (\because\ (19.28)\ )\end{aligned}$$

即ち

$$[L_n^{(\alpha)}(x)x^{-\alpha}e^{-x}]' = (n+1)L_n^{(-\alpha-1)}(x)x^{-\alpha-1}e^{-x} \tag{21.9}$$

となり，$\alpha+1$ のときの固有関数になっている．以上を図示すると次のようになる．

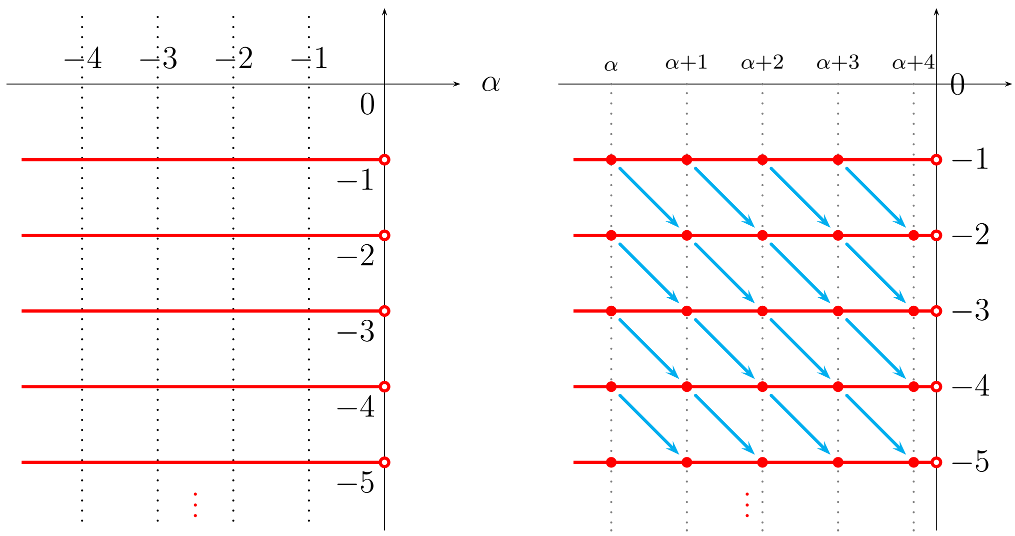


図 13: 双対 Kummer 作用素のスペクトル（Exit 系列）

すべてを纏めて書くと，次のようになる．

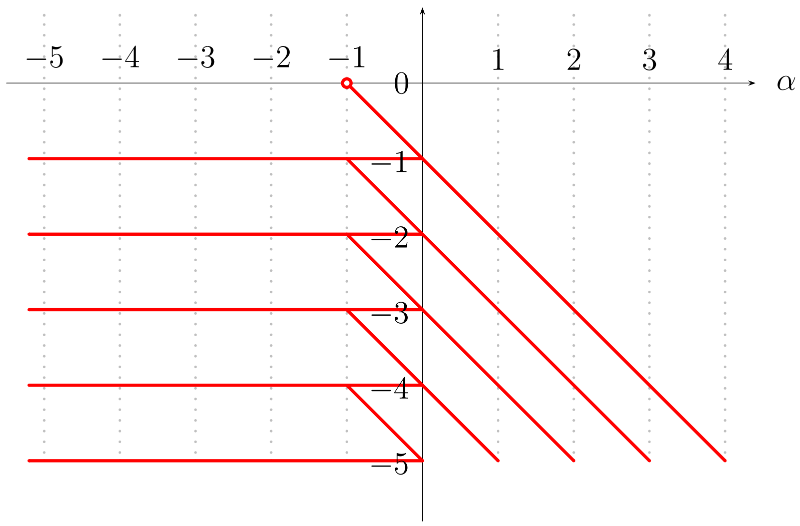


図 14: 双対 Kummer 作用素のスペクトル

22. Black-Scholes 族

ここでは (III-1) $a = x^2$ の場合を扱う．$I = [0, \infty)$ である．従って扱う生成作用素は

$$\mathfrak{A} = x^2 \frac{d}{dx^2} + (\alpha x - \beta) \frac{d}{dx} \tag{22.1}$$

である．$\beta = 0$ のときが，数理ファイナンスで Black-Scholes モデルと呼ばれるものなので全体を **Black-Scholes 族**と呼ぶことにする．生成作用素は二つのパラメーター α, β を持つ．

さて，$a = x^2$ であるが，標準測度の密度 ρ は

$$\rho = x^{\alpha-2} e^{\beta/x} \tag{22.2}$$

で与えられる．実際 (3.8) から

$$\begin{aligned} b = a' + a(\log \rho)' &= 2x + x^2((\alpha - 2)\log x + \frac{\beta}{x})' \\ &= 2x + x^2(\frac{\alpha - 2}{x} - \frac{\beta}{x^2}) = 2x + (\alpha - 2)x - \beta \\ &= \alpha x - \beta \end{aligned}$$

で確かめられる．従って尺度関数 s の密度は

$$s' = \frac{1}{a\rho} = \frac{1}{x^2 x^{\alpha-2} e^{\beta/x}} = x^{-\alpha} e^{-\beta/x} \tag{22.3}$$

となる．

調和関数

まず，次が成立する．

命題 22.1. $x^{-\alpha+2}e^{-\beta/x}$ は $\mathfrak{A}+\alpha-2$-調和である．すなわち

$$(\mathfrak{A}+\alpha-2)[x^{-\alpha+2}e^{-\beta/x}]=0 \tag{22.4}$$

証明 まず

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}[x^{-\alpha+2}e^{-\beta/x}] &= ((-\alpha+2)x^{-\alpha+1}e^{-\beta/x}+\beta x^{-\alpha+2}e^{-\beta/x}x^{-2})' \\ &= ((-\alpha+2)x^{-\alpha+1}e^{-\beta/x}+\beta x^{-\alpha}e^{-\beta/x})' \\ &= (-\alpha+2)(-\alpha+1)x^{-\alpha}e^{-\beta/x}+(-\alpha+2)x^{-\alpha+1}\beta e^{-\beta/x}x^{-2} \\ &\quad -\beta\alpha x^{-\alpha-1}e^{-\beta/x}+\beta^2x^{-\alpha}e^{-\beta/x}x^{-2} \\ &= ((-\alpha+2)(-\alpha+1)x^{-\alpha}+(-\alpha+2)\beta x^{-\alpha-1}-\beta\alpha x^{-\alpha-1}+\beta^2x^{-\alpha-2})e^{-\beta/x} \\ &= ((-\alpha+2)(-\alpha+1)x^{-\alpha}+2(-\alpha+1)\beta x^{-\alpha-1}+\beta^2x^{-\alpha-2})e^{-\beta/x}.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\left(x^2\frac{d}{dx^2}+(\alpha x-\beta)\frac{d}{dx}\right)[x^{-\alpha+2}e^{-\beta/x}] \\ &\quad=\{(-\alpha+2)(-\alpha+1)x^{-\alpha+2}+2(-\alpha+1)\beta x^{-\alpha+1}+\beta^2x^{-\alpha} \\ &\qquad+(\alpha x-\beta)((-\alpha+2)x^{-\alpha+1}+\beta x^{-\alpha})\}e^{-\beta/x} \\ &\quad=\{(-\alpha+2)(-\alpha+1)x^{-\alpha+2}+2(-\alpha+1)\beta x^{-\alpha+1}+\beta^2x^{-\alpha} \\ &\qquad+\alpha(-\alpha+2)x^{-\alpha+2}+(\alpha-2)\beta x^{-\alpha+1}+\alpha\beta x^{-\alpha+1}-\beta^2x^{-\alpha}\}e^{-\beta/x} \\ &\quad=\{(-\alpha+2)(-\alpha+1)x^{-\alpha+2}+2(-\alpha+1)\beta x^{-\alpha+1}+\beta^2x^{-\alpha} \\ &\qquad+\alpha(-\alpha+2)x^{-\alpha+2}+2(\alpha-1)\beta x^{-\alpha+1}-\beta^2x^{-\alpha}\}e^{-\beta/x} \\ &\quad=(-\alpha+2)x^{-\alpha+2}e^{-\beta/x}.\end{aligned}$$

これが示すべきことである． □

さらに，β は 0 と ±1 の場合だけを調べればよいことを見よう．$\beta\neq0$ のとき

$$Rf(x)=f(x/|\beta|) \tag{22.5}$$

と定めると

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}R(f) &= (x^2\frac{d}{dx^2}+(\alpha x-\beta)\frac{d}{dx})[f(x/|\beta|)] \\ &= \frac{x^2}{|\beta|^2}f''(x/|\beta|)+\frac{\alpha x-\beta}{|\beta|}f'(x/|\beta|) \\ &= \left(\frac{x}{|\beta|}\right)^2f''(x/|\beta|)+\left(\alpha\frac{x}{|\beta|}-\mathrm{sgn}(\beta)\right)f'(x/|\beta|)\end{aligned}$$

$$= y^2 f''(y) + (\alpha y - \mathrm{sgn}(\beta)) f'(y)$$

この作用素は β を $\mathrm{sgn}(\beta)$ に替えたものになっている．また R は

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty R(f)^2 \, \rho(dx) &= \int_0^\infty f(x/|\beta|)^2 x^{\alpha-2} e^{\beta/x} \, dx \\
&= \int_0^\infty f(y)^2 |\beta|^{\alpha-2} y^{\alpha-2} e^{\beta/(|\beta| y)} |\beta| \, dy \quad (y = x/|\beta|,\ dy = dx/|\beta|) \\
&= |\beta|^{\alpha-1} \int_0^\infty f(y)^2 y^{\alpha-2} e^{\mathrm{sgn}(\beta)/y} \, dy.
\end{aligned}$$

測度は $|\beta|^{\alpha-1}$ 倍であるが，β を $\mathrm{sgn}(\beta)$ に替えたものになっている．まとめると，次の可換図式が得られる．

(22.6)

$$\begin{array}{ccc}
L^2([0,\infty); x^{\alpha-2} e^{\beta/x} \, dx) & \xrightarrow{\quad \mathfrak{A} \quad} & L^2([0,\infty); x^{\alpha-2} e^{\beta/x} \, dx) \\
R \uparrow & & \uparrow R \\
L^2([0,\infty); |\beta|^{\alpha-1} y^{\alpha-2} e^{\mathrm{sgn}(\beta)/y} \, dy) & \xrightarrow[y^2 \frac{d^2}{dy^2} + (\alpha y - \mathrm{sgn}(\beta)) \frac{d}{dy}]{} & L^2([0,\infty); |\beta|^{\alpha-1} y^{\alpha-2} e^{\mathrm{sgn}(\beta)/y} \, dy)
\end{array}$$

従ってスペクトルは $\mathrm{sgn}(\beta)$ にだけ依存している．よって以下では $\beta = 0, \pm 1$ の場合だけ考える．

Stein's pair

Stein's pair を求めておこう

(22.7)
$$D = \frac{d}{dx} \colon L^2(\rho dx) \to L^2(x^2 \rho)$$

の共役は

(22.8)
$$D^* = -x^2 \frac{d}{dx} - (\alpha x - \beta)$$

なので

(22.9)
$$\mathfrak{A} u = -D^* D u = x^2 u'' + (\alpha x - \beta) u',$$

(22.10)
$$\hat{\mathfrak{A}} u = -D D^* = x^2 u'' + ((\alpha + 2) x - \beta) u' + \alpha u$$

が得られる．これらは，0 以外は同じスペクトルを持つ．

さらに

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}[f(\log x)] &= x^2 [f(\log x)]'' + (\alpha x - \beta)[f(\log x)]' \\
&= x^2 \Big(f'(\log x) \frac{1}{x} \Big)' + (\alpha x - \beta) f'(\log x) \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^2\Big(f''(\log x)\frac{1}{x^2} - f'(\log x)\frac{1}{x^2}\Big) + \Big(\alpha - \frac{\beta}{x}\Big)f'(\log x) \\
&= f''(\log x) + \Big(\alpha - 1 - \frac{\beta}{x}\Big)f'(\log x) \\
&= f''(y) + (\alpha - 1 - \beta e^{-y})f'(y). \quad (y = \log x)
\end{aligned}
$$

ここで $J\colon L^2(\mathbb{R}; e^{(\alpha-1)y+\beta e^{-y}}\,dy) \to L^2([0,\infty); \rho\,dx)$

$$
Jf(x) = f(\log x) \tag{22.11}
$$

と定めると，

$$
\begin{aligned}
\|Jf\|_{L^2(\rho\,dx)}^2 &= \int_0^\infty f(\log x)^2 \rho(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty f(\log x)^2 x^{\alpha-2} e^{\beta/x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(y)^2 e^{(\alpha-2)y} e^{\beta e^{-y}} e^y\,dy \quad (x = e^y, dx = e^y dy) \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(y)^2 e^{(\alpha-1)y+\beta e^{-y}}\,dy.
\end{aligned}
$$

これは J が unitary であることを示している．表示を簡単にするために

$$
\phi(y) = e^{((\alpha-1)y+\beta e^{-y})/2} \tag{22.12}
$$

とおけば，上の測度は $\phi^2(y)dy$ と表される．まとめると次の図式が可換になる．

$$
\begin{array}{ccc}
L^2([0,\infty);\rho\,dx) & \xrightarrow{\quad\mathfrak{A}\quad} & L^2([0,\infty);\rho\,dx) \\
J\big\uparrow & & \big\uparrow J \\
L^2(\mathbb{R};\phi^2 dy) & \xrightarrow[\frac{d^2}{dy^2} + (\alpha-1-\beta e^{-y})\frac{d}{dy}]{} & L^2(\mathbb{R};\phi^2 dy)
\end{array} \tag{22.13}
$$

ここで

$$
\tilde{\mathfrak{A}} = \frac{d^2}{dy^2} + (\alpha - 1 - \beta e^{-y})\frac{d}{dy} \tag{22.14}
$$

とおくと，$\mathfrak{A}$ と $\tilde{\mathfrak{A}}$ は同じスペクトルを持つ．

Schrödinger 作用素との対応

さらに Schrödinger 作用素との対応もつけることができる．ϕ の定義 (22.12) から

$$
\phi'(y) = e^{((\alpha-1)y+\beta e^{-y})/2}\Big(\frac{\alpha-1}{2} - \frac{\beta}{2}e^{-y}\Big) = \frac{1}{2}(\alpha - 1 - \beta e^{-y})\phi.
$$

これから

$$\alpha - 1 - \beta e^{-y} = 2\phi^{-1}\phi'$$

であるから，$\tilde{\mathfrak{A}}$ は

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \frac{d^2}{dy^2} + 2\phi^{-1}\phi'\frac{d}{dy}$$

と表すことができる．さて，

$$\begin{aligned}(\phi^{-1})' &= -\phi^{-2}\phi' \\ (\phi^{-1})'' &= 2\phi^{-3}(\phi')^2 - \phi^{-2}\phi''\end{aligned}$$

であるから

$$\tilde{\mathfrak{A}}(\phi^{-1}) = 2\phi^{-3}(\phi')^2 - \phi^{-2}\phi'' + 2\phi^{-1}\phi'(-\phi^{-2}\phi') = -\phi^{-2}\phi''.$$

これを使って

$$\begin{aligned}\phi\tilde{\mathfrak{A}}(\phi^{-1}f) &= \phi\tilde{\mathfrak{A}}(\phi^{-1})f + \phi\cdot\phi^{-1}\tilde{\mathfrak{A}}f + 2\phi(\phi^{-1})'f' \\ &= \phi\cdot(-\phi^{-2}\phi'')f + f'' + 2\phi^{-1}\phi'f' + 2\phi(-\phi^{-2}\phi')f' \\ &= -\phi^{-1}\phi''f + f'' \\ &= f'' - Vf.\end{aligned}$$

ただし，

$$V = \phi^{-1}\phi''$$

とおいた．もちろん $f = \phi$ とおけば $\phi'' - V\phi = 0$ となって ϕ は ground state である．
ϕ' を上で計算したから ϕ'' は

$$\begin{aligned}\phi''(y) &= \frac{1}{2}\beta e^{-y}\phi + \frac{1}{2}(\alpha - 1 - \beta e^{-y})\phi' \\ &= \frac{\beta}{2}e^{-y}\phi + \frac{1}{4}(\alpha - 1 - \beta e^{-y})^2\phi \\ &= \frac{1}{4}(2\beta e^{-y} + (\alpha-1)^2 - 2(\alpha-1)\beta e^{-y} + \beta^2 e^{-2y})\phi \\ &= \frac{1}{4}((\alpha-1)^2 + 2(2-\alpha)\beta e^{-y} + \beta^2 e^{-2y})\phi.\end{aligned}$$

従って

$$V(y) = \frac{1}{4}((\alpha-1)^2 + 2(2-\alpha)\beta e^{-y} + \beta^2 e^{-2y}) \tag{22.15}$$

となって，これは Morse potential と呼ばれているものである．

ここで unitary 作用素 $K\colon L^2(\mathbb{R};dy) \to L^2(\mathbb{R};\phi^2\,dy)$ を

$$Kf(y) = \phi^{-1}(y)f(y) \tag{22.16}$$

と定めると，次の図式が可換になる．

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R};\phi^2 dy) & \xrightarrow{\ \tilde{\mathfrak{A}}\ } & L^2(\mathbb{R};\phi^2 dy) \\ K\uparrow & & \uparrow K \\ L^2(\mathbb{R};dy) & \xrightarrow[\frac{d^2}{dy^2}-V]{} & L^2(\mathbb{R};dy) \end{array} \tag{22.17}$$

特に必要ではないが，Schrödinger 作用素の方から出発することもできる．ϕ が ground state だから

$$\Big(\frac{d^2}{dy^2}-V\Big)(\phi f) = \phi'' f + 2\phi' f' + \phi f'' - V\phi f = 2\phi' f' + \phi f''$$

より

$$\phi^{-1}\Big(\frac{d^2}{dy^2}-V\Big)(\phi f) = f'' + 2\phi^{-1}\phi' f' = \tilde{\mathfrak{A}}f$$

となる．

また部分積分の公式から

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathfrak{A}}f,g)_{L^2(\phi^2dy)} &= \int_{\mathbb{R}} (f''+2\phi^{-1}\phi' f')g\phi^2\,dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f'(g\phi^2)'\,dy + \int_{\mathbb{R}} 2\phi\phi' f' g\,dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}} (f'g'\phi^2 + f'g2\phi\phi')\,dy + \int_{\mathbb{R}} 2\phi\phi' f' g\,dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f'g'\phi^2\,dy\end{aligned}$$

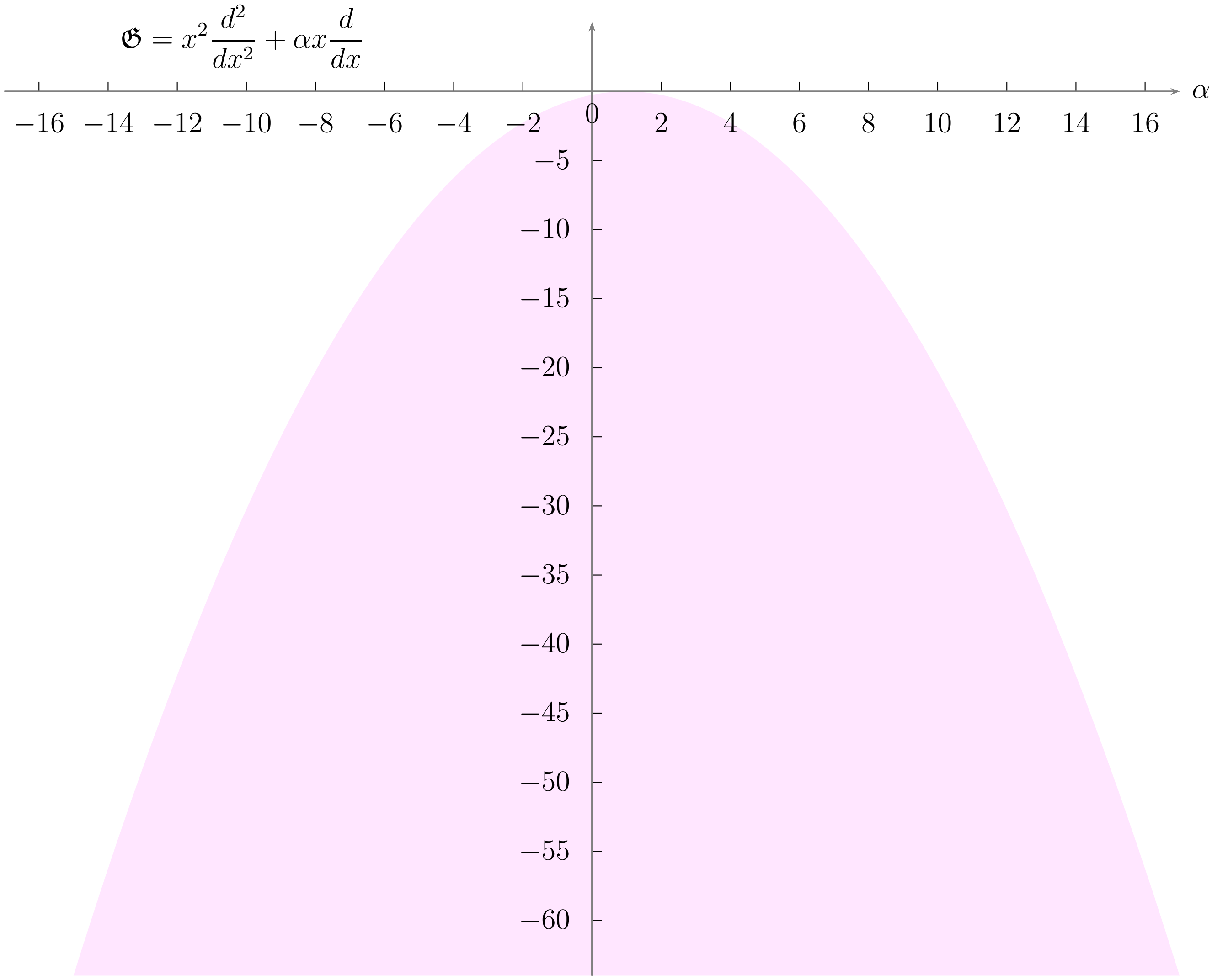
となって，対応する Dirichlet 形式の形が分かる．

$\beta = 0$ のときのスペクトル

$\beta = 0$ のときは数理ファイナンスにおける Black-Scholes モデルである．(22.14) より変換 J によって $\mathfrak{A}$ は

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \frac{d^2}{dy^2} + (\alpha-1)\frac{d}{dy}$$

と同値になって，これは第 8節で扱ったように，ドリフトのあるブラウン運動だからスペクトルは既に求めてある．次のようになる．



スペクトルの α への依存性

23. Black-Scholes 族：$\beta = -1$ の場合

引き続き (III-1) $a = x^2$ の場合で $\beta = -1$ の場合を扱う．考える区間は $I = [0, \infty)$ である．従って扱う生成作用素は

$$\mathfrak{A} = x^2 \frac{d}{dx^2} + (\alpha x + 1) \frac{d}{dx} \tag{23.1}$$

となる．標準測度の密度 ρ は

$$\rho = x^{\alpha - 2} e^{-1/x} \tag{23.2}$$

で与えられる．従って尺度関数 s の密度は

$$s' = x^{-\alpha} e^{1/x} \tag{23.3}$$

となる．

境界の分類

α に応じて Feller の境界条件がどう変わるか見ておこう．

$$s(x) = \int_1^x s'(y)\,dy = \int_1^x y^{-\alpha} e^{1/y}\,dy \tag{23.4}$$

$$m(x) = \int_1^x \rho(y)\,dy = \int_1^x y^{\alpha-2} e^{-1/y}\,dy \tag{23.5}$$

とおく．

まず ∞ が non-exit, non-entrance (natural) であることを見よう．以下では $x \to \infty$ の挙動を見る．

$$s(x) \begin{cases} \sim \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \sim \log x, & \alpha = 1 \\ \to \int_1^\infty y^{-\alpha} e^{1/y}\,dy < \infty, & \alpha > 1 \end{cases}$$

および

$$m(x) \begin{cases} \to \int_1^\infty y^{\alpha-2} e^{-1/y}\,dy < \infty, & \alpha < 1 \\ \sim \log x, & \alpha = 1 \\ \sim \frac{1}{\alpha-1} x^{\alpha-1}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

さらに $\alpha < 1$ のとき

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_1^x (s(y) - s(1))\,dm(y) \\ &= \int_1^x s(y) y^{\alpha-2} e^{-1/y}\,dy \\ &\sim \frac{1}{1-\alpha} \int_1^x y^{-\alpha+1} y^{\alpha-2}\,dy \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_1^x y^{-1}\,dy \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \log x. \end{aligned}$$

また $\alpha > 1$ のとき

$$S(x) = \int_1^x (m(y) - m(1))\,ds(y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^x m(y) y^{-\alpha} e^{1/y}\, dy \\
&\sim \frac{1}{\alpha - 1} \int_1^x y^{\alpha-1} y^{-\alpha}\, dy \\
&= \frac{1}{\alpha - 1} \int_1^x y^{-1}\, dy \\
&= \frac{1}{\alpha - 1} \log x.
\end{aligned}
$$

これから次の分類表が得られる.

	$s(\infty)$	$m(\infty)$	$S(\infty)$	$M(\infty)$	boundary ∞
$\alpha < 1$	$= \infty$	$< \infty$	$= \infty$	$= \infty$	non-exit, non-entrance
$\alpha = 1$	$= \infty$	$= \infty$	$= \infty$	$= \infty$	non-exit, non-entrance
$\alpha > 1$	$< \infty$	$= \infty$	$= \infty$	$= \infty$	non-exit, non-entrance

次に $x \to 0$ の場合を扱う.

$$
\begin{aligned}
s(x) &= -\int_x^1 y^{-\alpha} e^{1/y}\, dy \\
&= \int_{1/x}^1 u^{\alpha-2} e^u\, du \quad (u = \frac{1}{y}, du = -\frac{dy}{y^2}) \\
&= -\int_1^{1/x} u^{\alpha-2} e^u\, du \to -\infty.
\end{aligned}
$$

もう少し正確にみると

$$
s(1/x) = -\int_1^x u^{\alpha-2} e^u\, du \sim -x^{\alpha-2} e^x
$$

次に m は

$$
\begin{aligned}
m(x) &= -\int_x^1 y^{\alpha-2} e^{-1/y}\, dy \\
&= \int_{1/x}^1 u^{-\alpha} e^{-u}\, du \quad (u = \frac{1}{y}, du = -\frac{dy}{y^2}) \\
&= -\int_1^{1/x} u^{-\alpha} e^{-u}\, du \\
&\to -\int_1^\infty u^{-\alpha} e^{-u}\, du > -\infty.
\end{aligned}
$$

さらに

$$
M(x) = \int_x^1 (s(1) - s(y))\, dm(y)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_x^1 (s(1)-s(y))y^{\alpha-2}e^{-1/y}\,dy \\
&= -\int_{1/x}^1 (s(1)-s(1/u))u^{-\alpha}e^{-u}\,du \quad (u=\frac{1}{y}, du=\frac{dy}{y^2}) \\
&= -\int_1^{1/x} s(1/u)u^{-\alpha}e^{-u}\,du \\
&\sim \int_1^{1/x} u^{\alpha-2}e^{u}u^{-\alpha}e^{-u}\,du \\
&\to \int_1^{\infty} u^{-2}\,du = 1.
\end{aligned}
$$

よって $M(0)<\infty$ が従う．以上で α に関係なく 0 は non-exit, entrance になる．

$s(0)$	$m(0)$	$S(0)$	$M(0)$	boundary 0
$=-\infty$	$>-\infty$	$=\infty$	$<\infty$	non-exit, entrance

また容易に 0 は limit point であることが分かる．

スペクトル

さて，$\mathfrak{A}$ のスペクトルを求めよう．α の依存性を明確にするために

$$
\mathfrak{A}_{(\alpha)} = x^2\frac{d}{dx^2} + (\alpha x+1)\frac{d}{dx} \tag{23.6}
$$

と書くことにする．また $n=0,1,2,\ldots$ に対し

$$
\lambda_n(\alpha) = n(n-1+\alpha) \tag{23.7}
$$

とおく．

$\mathfrak{A}_{(\alpha)}$ は次で与えられる．

定理 23.1. $\mathfrak{A}_{(\alpha)}$ は，点スペクトル $\lambda_n(\alpha)$, $n<\frac{1-\alpha}{2}$ と連続スペクトル $(-\infty,-\frac{1}{4}(\alpha-1)]$ を持つ．

証明 第 22節で論じたように，$\mathfrak{A}_{(\alpha)}$ は Schrödinger 作用素と同値であった．(22.15) で定まるポテンシャル V は $\beta=-1$ であるから

$$
V(y) = \frac{1}{4}((\alpha-1)^2 - 2(2-\alpha)e^{-y} + e^{-2y}) \tag{23.8}
$$

となる．よって $\alpha\geq 2$ のときは，V は単調減少関数で Schrödinger 作用素 $\frac{d^2}{dy^2}-V(y)$ は，連続スペクトル $(-\infty,-\frac{1}{4}(\alpha-1)^2]$ をもつ．ここでスペクトラムの上限は $\lim_{y\to\infty}V(y)=\frac{1}{4}(\alpha-1)^2$ であることから分かる．これを出発点として，Stein's pair を用いて，スペクトルと決めていくことができる．Stein's pair は $\mathfrak{A}_{(\alpha)}$ が $\mathfrak{A}_{(\alpha+2)}+\alpha$ と同じスペクトラムを持つことを意味している．但し，0 は除外する．0 が固有値かどうかは別に判断しなければならない．しか

し，$\mathfrak{A}f=0$ となる関数は，定数か，scale function s のみである．これが L^2 関数となるのは $\alpha<1$ のときで，固有関数は 1 である．この固有値の情報だけは，事前に使うことができる．

次に $0\le\alpha<2$ の場合を考えよう．このとき $\mathfrak{A}_{(\alpha)}$ のスペクトルは $\mathfrak{A}_{(\alpha+2)}+\alpha$ と同じで従って $(-\infty,-\frac{1}{4}(\alpha+1)^2+\alpha]$ である．ここで

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}(\alpha+1)^2+\alpha &= -\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}+\alpha\\ &= -\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\\ &= -\frac{1}{4}(\alpha-1)^2.\end{aligned}$$

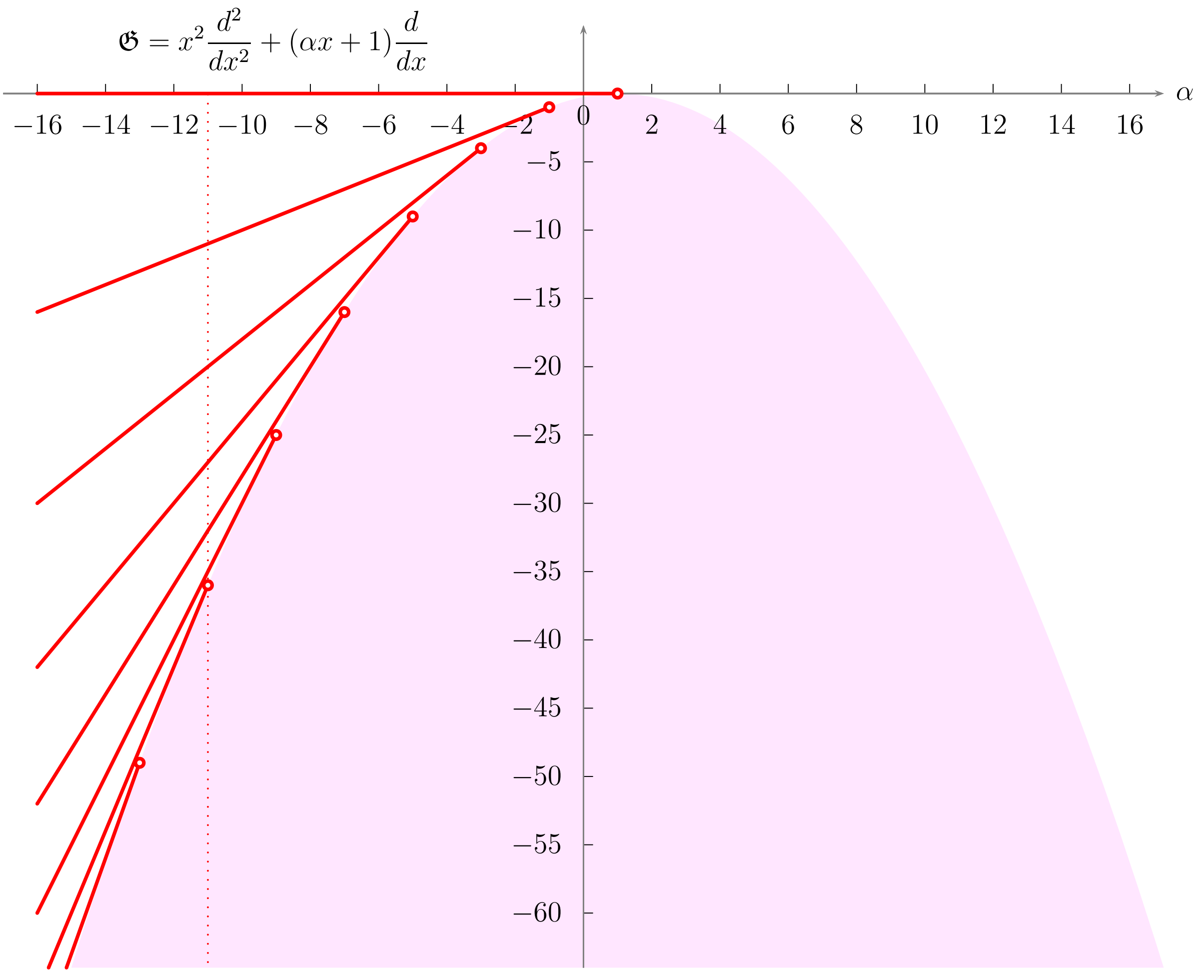
よって，$\mathfrak{A}_{(\alpha)}$ は連続スペクトル $(-\infty,-\frac{1}{4}(\alpha-1)^2]$ を持ち，$0\le\alpha<1$ 場合に固有値 $\lambda_0(\alpha)$ を持つ．またこれ以外にスペクトルは存在しない．

以下この操作をくりかえせば，定理の主張が従う．ここで λ_n に対し $\lambda_{n+1}(\alpha)=\lambda_n(\alpha+2)+\alpha$ が成立していることを使う．この事実は

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}(\alpha) &= (n+1)(n+\alpha)\\ &= n(n+\alpha)+n+\alpha\\ &= n(n+1+\alpha)+\alpha\\ &= n(n-1+(\alpha+2))+\alpha\\ &= \lambda_n(\alpha)+\alpha\end{aligned}$$

より確認できる．　□

固有値分布を図示すると次のようになる．



スペクトルの α への依存性

固有関数

点スペクトル $\lambda_n(\alpha)$ に対する固有関数は Rodrigues の定理，あるいは命題 7.3 から次で与えられる．

$$P_n^{(\alpha)} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x^\alpha e^{-1/x}}\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n+\alpha}e^{-1/x}). \tag{23.9}$$

前の定数はいろいろな可能性があるが，ここではこのようにとっておく．これが n 次の多項式であることはほぼ明らかであるが，そのことを示しておこう．

命題 23.2. 非負整数 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^\alpha e^{-1/x}) = \frac{Q_n}{x^{2n}}x^\alpha e^{-1/x} \tag{23.10}$$

ここで Q_n は n 次の多項式である．さらに $P_n^{(\alpha)}$ は n 次の多項式である．

証明 (23.10) を帰納法で示そう．まず

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^\alpha e^{-1/x}) &= \alpha x^{\alpha-1}e^{-1/x} + x^\alpha e^{-1/x}\frac{1}{x^2} \\ &= (\alpha x+1)x^{\alpha-2}e^{-1/x} \\ &= \frac{\alpha x+1}{x^2}x^\alpha e^{-1/x}.\end{aligned}$$

これで $n=1$ のときは成立する．

次に n のときを仮定して，両辺を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^\alpha e^{-1/x}) &= \frac{d}{dx}\Big[\frac{Q_n}{x^{2n}}x^\alpha e^{-1/x}\Big] \\ &= (\frac{Q_n'}{x^{2n}} - 2n\frac{Q_n}{x^{2n+1}})x^\alpha e^{-1/x} + \frac{Q_n}{x^{2n}}\frac{\alpha x+1}{x^2}x^\alpha e^{-1/x} \\ &= \frac{x^2Q_n' - 2nxQ_n + (\alpha x+1)Q_n}{x^{2n+2}}x^\alpha e^{-1/x} \\ &= \frac{x^2Q_n' + ((\alpha-2)x+1)Q_n}{x^{2n+2}}x^\alpha e^{-1/x}.\end{aligned}$$

よって

$$Q_{n+1} = x^2Q_n' + ((\alpha-2)x+1)Q_n$$

と定義すれば Q_{n+1} は $n+1$ 次の多項式で，主張が成り立つことが分かる．

さて $P_n^{(\alpha)}$ に関しては

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^\alpha e^{-1/x}}\frac{d}{dx}(x^{2n}x^\alpha e^{-1/x}) &= \frac{1}{x^\alpha e^{-1/x}}\sum_{k=0}^n {}_nC_k\frac{d^k}{dx^k}(x^{2n})\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^\alpha e^{-1/x}) \\ &= \frac{1}{x^\alpha e^{-1/x}}\sum_{k=0}^n {}_nC_k\frac{(2n)!}{(2n-k)!}x^{2n-k}\frac{Q_{n-k}}{x^{2(n-k)}}x^\alpha e^{-1/x} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k\frac{(2n)!}{(2n-k)!}x^kQ_{n-k}\end{aligned}$$

となり，これは n 次の多項式である． □

$P_n^{(\alpha)}$ は固有値 $\lambda_n(\alpha)$ に対する固有関数であるが，これは Laguerre 多項式で表すことができることは当然予想されることである．実際測度 $x^{\alpha-2}e^{-1/x}$ は変換 $y=\frac{1}{x}$ で $y^{-\alpha}e^{-y}$ に移されるのだから．このことを示すために，この変換で作用素がどうなるかを見ていく．

座標変換

原点 0 が不確定特異点になっているので，変換 $y=\frac{1}{x}$ で原点が確定特異点になるようにしよう．

$$\frac{d^2}{dx^2}\Big[f\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big] = \Big[f'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\Big]'$$

$$= f''\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x^4} + f'\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{2}{x^3}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}[f(\frac{1}{x})] &= x^2\{f''(\frac{1}{x})\frac{1}{x^4} + f'(\frac{1}{x})\frac{2}{x^3}\} + (\alpha x + 1)\{-f'(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\} \\
&= \frac{1}{x^2}f''\Big(\frac{1}{x}\Big) + \Big(\frac{2}{x} - \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{x^2}\Big)f'\Big(\frac{1}{x}\Big) \\
&= y^2 f''(y) + ((2-\alpha)y - y^2)f'(y) \quad (y = \frac{1}{x}) \\
&= y\{yf''(y) + (2-\alpha-y)f'(y)\}.
\end{aligned}$$

これは $y = 0$ で確定特異点を持つことが分かる．また作用素 $yf''(y) + (2-\alpha-y)f'(y)$ は Kummer 作用素であるから第 20節の結果が使えることになる．(20.1) の記号を使えば

$$L_{(1-\alpha)} = y\frac{d^2}{dy^2} + (2-\alpha-y)\frac{d}{dy} \tag{23.11}$$

となる．従って，次の図式が可換になる．

$$\begin{array}{ccc}
L^2([0,\infty);\rho\,dx) & \xrightarrow{\mathfrak{A}} & L^2([0,\infty);\rho\,dx) \\
S\big\uparrow & & \big\uparrow S \\
L^2(\mathbb{R};y^{-\alpha}e^{-y}\,dy) & \xrightarrow[yL_{(1-\alpha)}]{} & L^2(\mathbb{R};y^{-\alpha}e^{-y}\,dy)
\end{array} \tag{23.12}$$

ここで

$$Sf(x) = f\Big(\frac{1}{x}\Big) \tag{23.13}$$

作用素 $yL_{(1-\alpha)}$ の固有関数を求めよう．$y^\nu f$ という形の固有関数を求める．

$$\begin{aligned}
L_{(1-\alpha)}y^\nu &= y(y^\nu)'' + (2-\alpha-y)(y^\nu)' \\
&= \nu(\nu-1)y^{\nu-1} + (2-\alpha)\nu y^{\nu-1} - \nu y^\nu \\
&= \nu(\nu+1-\alpha)y^{\nu-1} - \nu y^\nu
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
yL_{(1-\alpha)}(y^\nu f) &= y(L_{(1-\alpha)}y^\nu)f + yy^\nu L_{(1-\alpha)}f + y\cdot 2y(y^\nu)'f' \\
&= y\{\nu(\nu+1-\alpha)y^{\nu-1} - \nu y^\nu\}f + y^{\nu+1}(L_{(1-\alpha)}f + 2\nu f') \\
&= \nu(\nu+1-\alpha)y^\nu f - \nu y^{\nu+1}f + y^{\nu+1}L_{(1+2\nu-\alpha)}f \\
&= \nu(\nu+1-\alpha)y^\nu f + y^{\nu+1}(L_{(1+2\nu-\alpha)}f - \nu f).
\end{aligned}$$

よって，$L_{(1+2\nu-\alpha)}f = \nu f$ ならば $y^\nu f$ は固有値 $\nu(\nu+1-\alpha)$ の固有関数になることが分かる．$L_{(1+2\nu-\alpha)}$ の固有関数は分かっているので，これで固有関数が求まる．

$L_{(1-2n-\alpha)}$ の固有値 $-n$ に対する固有関数は Laguerre 多項式 $L_n^{(1-2n-\alpha)}$ であるので，$P_n^{(\alpha)}$ は $L_n^{(1-2n-\alpha)}$ で表されることが分かる．これを定数まで込めてきちんと証明しておこう．

命題 23.3. 次が成り立つ.

$$P_n^{(\alpha)}(x) = x^n L_n^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big) \tag{23.14}$$

証明 まず $1-2(n-1)-(\alpha+2) = 1-2n-\alpha$ に注意しよう. $P_n^{(\alpha)}$ は帰納的に定まっていくから, $P_{n-1}^{(\alpha+2)} = x^{n-1}L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}$ を仮定して, n のときを示せばよい.

$$\begin{aligned}
&\Big(x^2\frac{d}{dx}+(\alpha x+1)\Big)\Big[x^{n-1}L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big] \\
&\quad = x^2\Big\{(n-1)x^{n-2}L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big)+x^{n-1}[L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}]'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\Big\} \\
&\qquad + (\alpha x+1)x^{n-1}L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big) \\
&\quad = -x^n\Big\{\frac{1}{x}[L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}]'\Big(\frac{1}{x}\Big)+(1-n-\alpha-\frac{1}{x})L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big\} \\
&\quad = -x^n\{y[L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}]'(y)+(1-n-\alpha-y)L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}(y)\} \quad (y=\frac{1}{x}) \\
&\quad = -x^n\{y[L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}]'(y)+(1-2n-\alpha+n-y)L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}(y)\} \\
&\quad = -nx^nL_n^{(1-2n-\alpha)}(y) \quad (\because\ (19.32)) \\
&\quad = -nx^nL_n^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big).
\end{aligned}$$

これで帰納法で証明が終わる. □

また Stein's pair から, 固有関数は微分すると固有関数に移る. このことも見ておこう.

命題 23.4. 次が成り立つ.

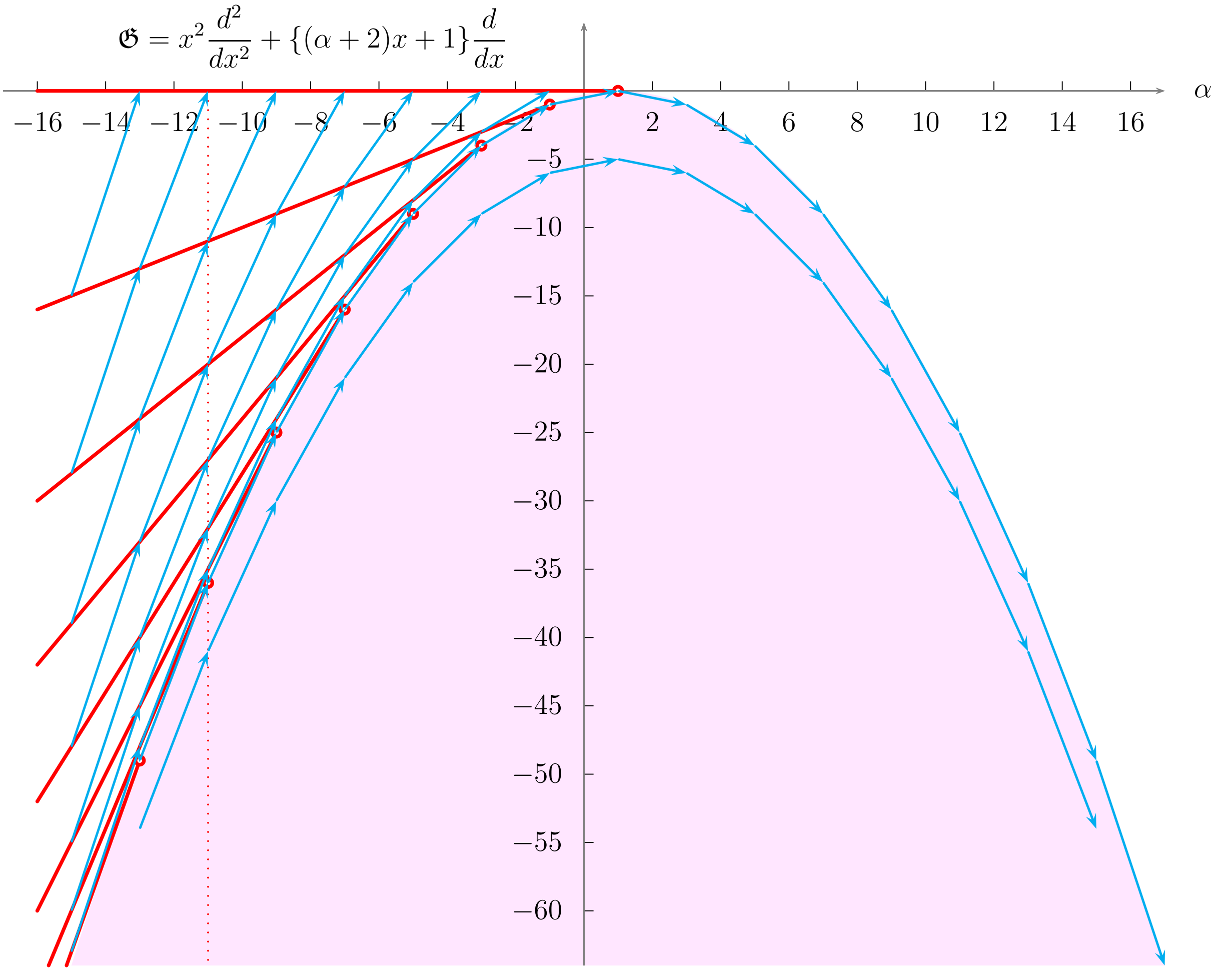
$$\frac{d}{dx}\Big[x^nL_n^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big] = -(n+\alpha-1)x^{n-1}L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big). \tag{23.15}$$

証明 これは単純な計算である.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big[x^nL_n^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big] &= nx^{n-1}L_n^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big)+x^n[L_n^{(1-2n-\alpha)}]'\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\Big\} \\
&= -x^{n-1}\Big\{\frac{1}{x}[L_n^{(1-2n-\alpha)}]'\Big(\frac{1}{x}\Big)-nL_n^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big\} \\
&= -x^{n-1}\{y[L_n^{(1-2n-\alpha)}]'(y)-nL_n^{(1-2n-\alpha)}(y)\} \quad (y=\frac{1}{x}) \\
&= x^{n-1}(1-2n-\alpha+n)L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}(y) \quad (\because\ (19.33)) \\
&= -(n+\alpha-1)x^{n-1}L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}(y) \\
&= -(n+\alpha-1)x^{n-1}L_{n-1}^{(1-2n-\alpha)}\Big(\frac{1}{x}\Big).
\end{aligned}$$

これが示すべきことであった. □

この微分するときの固有値の対応を書くと，次のようになる．



微分したときの固有値の対応

24. Black-Scholes 族：$\beta = 1$ の場合

引き続き (III-1) $a = x^2$ の場合で $\beta = 1$ の場合を扱う．従って扱う生成作用素は

(24.1)
$$\mathfrak{A} = x^2 \frac{d}{dx^2} + (\alpha x - 1)\frac{d}{dx}$$

となる．標準測度の密度 ρ は

(24.2)
$$\rho = x^{\alpha-2} e^{1/x}$$

で与えられる．従って尺度関数 s の密度は

(24.3)
$$s' = x^{-\alpha} e^{-1/x}$$

となる．

境界の分類

境界は，s と m が（パラメーターはずれるが）入れ替わる形になるので，∞ は non-exit, non-entrance で，0 は exit, non-entrance になる．

h-変換

第 22節 で見たように，$x^{-\alpha+2}e^{-1/x}$ は $\mathfrak{A}+\alpha-2$-調和である．そこで

$$\varphi(x)=x^{-\alpha+2}e^{-1/x} \tag{24.4}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\varphi'(x)&=(-\alpha+2)x^{-\alpha+1}e^{-1/x}+x^{-\alpha+2}e^{-1/x}\frac{1}{x^2}\\
&=\frac{(2-\alpha)x+1}{x^2}x^{-\alpha+2}e^{-1/x}\\
&=\frac{(2-\alpha)x+1}{x^2}\varphi(x)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(\varphi f)&=(\mathfrak{A}\varphi)f+\varphi\mathfrak{A}f+2x^2\varphi' f'\\
&=(2-\alpha)\varphi f+\varphi\mathfrak{A}f+2x^2\frac{(2-\alpha)x+1}{x^2}\varphi f'\\
&=(2-\alpha)\varphi f+\varphi\{x^2f''+(\alpha x-1+2(2-\alpha)x+2)f'\}\\
&=(2-\alpha)\varphi f+\varphi\{x^2f''+((4-\alpha)x+1)f'\}.
\end{aligned}$$

従って

$$\varphi^{-1}\mathfrak{A}(\varphi f)=x^2f''+((4-\alpha)x+1)f'+(2-\alpha)f.$$

これは，本質的に第 23節 で扱った作用素 (23.1) である．従って次の可換図式が成り立つ．

$$\begin{CD}
L^2([0,\infty);\rho(x)\,dx) @>{\mathfrak{A}}>> L^2([0,\infty);\rho(x)\,dx)\\
@A{R}AA @AA{R}A\\
L^2([0,\infty);x^{-\alpha+2}e^{-1/x}\,dx) @>>{x^2\frac{d^2}{dx^2}+((4-\alpha)x-1)\frac{d}{dx}+2-\alpha}> L^2([0,\infty);x^{-\alpha+2}e^{-1/x}\,dx)
\end{CD} \tag{24.5}$$

ここで $R\colon L^2([0,\infty);x^{-\alpha+2}e^{-1/x}\,dx)\to L^2([0,\infty);\rho(x)\,dx)$ は

$$Rf(x)=\varphi(x)f(x)=x^{-\alpha+2}e^{-1/x}f(x) \tag{24.6}$$

で定める．R が unitary であることは

$$\int_0^\infty (Rf)^2\rho(x)\,dx=\int_0^\infty (x^{-\alpha+2}e^{-1/x})^2f(x)^2x^{\alpha-2}e^{1/x}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty f(x)^2 x^{-2\alpha+4} e^{-2/x} x^{\alpha-2} e^{1/x}\, dx \\
&= \int_0^\infty f(x)^2 x^{-\alpha+2} e^{-1/x}\, dx \\
&= \int_0^\infty f(x)^2 x^{(4-\alpha)-2} e^{-1/x}\, dx
\end{aligned}
$$

より明らか．よって，ここでの作用素は，第 23節の結果に帰着されることが分かる．$4-\alpha$ が第 23節での α に対応することになる．

スペクトル

この対応に注意すれば，まず連続スペクトルの部分は

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}(4-\alpha-1)^2 + 2 - \alpha &= -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 6\alpha + 9 - 8 + 4\alpha) \\
&= -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 2\alpha + 1) \\
&= -\frac{1}{4}(\alpha - 1)^2
\end{aligned}
$$

なので，連続スペクトルは

$$
(-\infty, -\frac{1}{4}(\alpha-1)^2] \tag{24.7}
$$

となる．

点スペクトルは，番号付けを一つずらして $\mu_{n+1}(\alpha)$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ とすると (23.7) で定まる λ_n を用いて

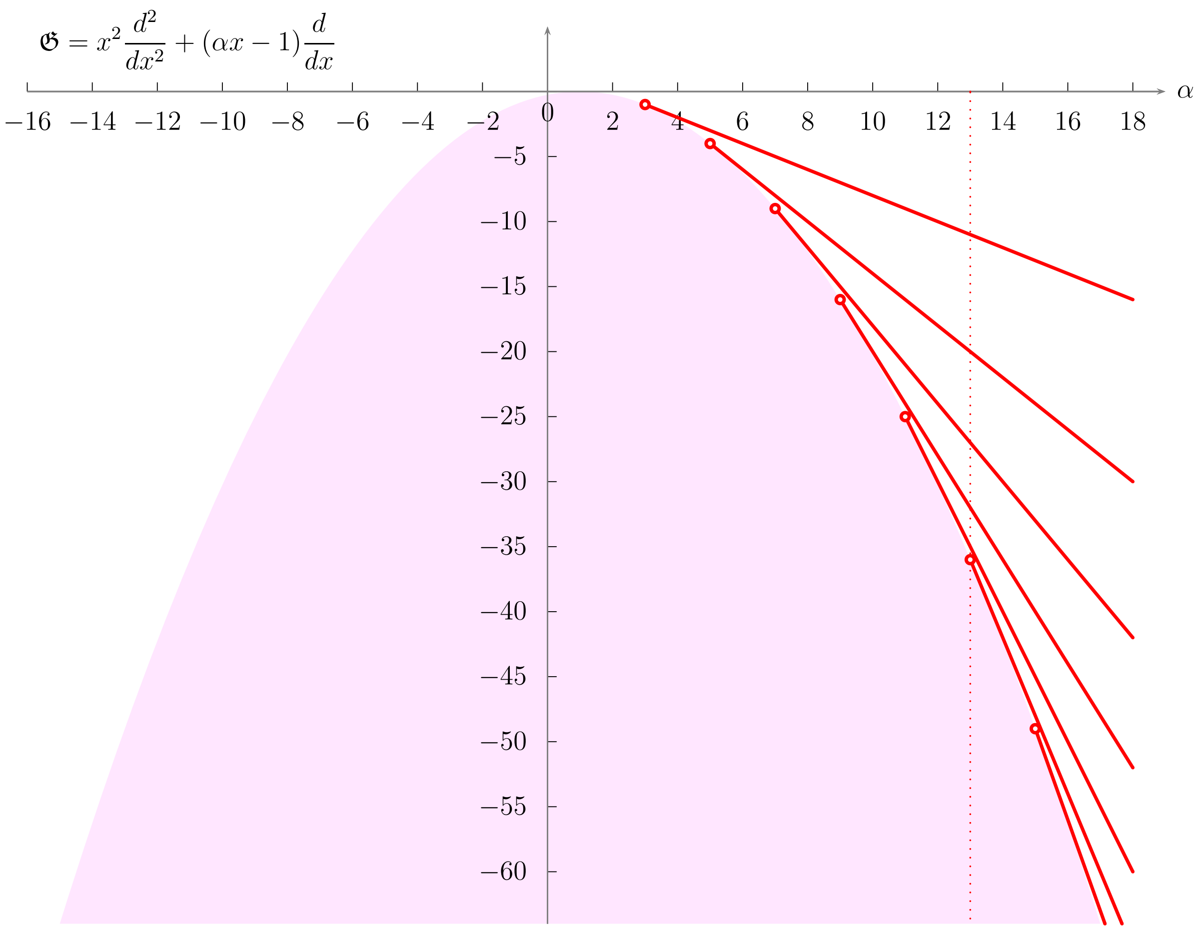
$$
\begin{aligned}
\mu_{n+1}(\alpha) &= \lambda(4-\alpha) + 2 - \alpha \\
&= n(n - 1 + 4 - \alpha) + 2 - \alpha \\
&= n(n + 3 - \alpha) + 2 - \alpha \\
&= (n+1)(n+3-\alpha) - n - 3 + \alpha + 2 - \alpha \\
&= (n+1)(n+3-\alpha) - n - 1 \\
&= (n+1)(n+3-\alpha-1) \\
&= (n+1)(n+2-\alpha)
\end{aligned}
$$

で，λ に対する制約条件から $4-\alpha < -2n+1$ は $\alpha > 2n+3 = 2\ (n+1)\ +1$ となる．

番号を一つずらすと

$$
\mu_n(\alpha) = n(n+1-\alpha) \tag{24.8}
$$

で，$\alpha > 2n+1$ $n = 1, 2, \ldots$ と表示される．点スペクトルが現れるのは $\alpha > 3$ のところのみである．以上でスペクトルがすべて求まった．



スペクトルの α への依存性

固有関数

固有値 $\mu_{n+1}(\alpha)$ に対する固有関数は，(23.14) から

$$\begin{aligned} x^{-\alpha+2}e^{-1/x}P_n^{(4-\alpha)}(x) &= x^{-\alpha+2}e^{-1/x}x^n L_n^{(1-2n-(4-\alpha))}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

である．この微分と，Stein の双対を計算しよう．

命題 24.1. 次が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -(n+1)x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{24.9}$$

$$\left(x^2\frac{d}{dx} + (\alpha x - 1)\right)\left[x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -(n+2-\alpha)x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{24.10}$$

証明 まず (24.9) を示そう.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left[x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\
&\quad=(n-\alpha+2)x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)+x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}\frac{1}{x^2}L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&\qquad+x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}\left[L_n^{(\alpha-2n-3)}\right]'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)\\
&\quad=-x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}\left\{(\alpha-n-2)L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left[L_n^{(\alpha-2n-3)}\right]'\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\\
&\quad=-x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}\{y[L_n^{(\alpha-2n-3)}]'(y)+(\alpha-2n-3+n+1-y)L_n^{(\alpha-2n-3)}(y)\}\quad(y=\frac{1}{x})\\
&\quad=-x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}(n+1)L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}(y)\quad(\because\ (19.32))\\
&\quad=-(n+1)x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}
$$

これは

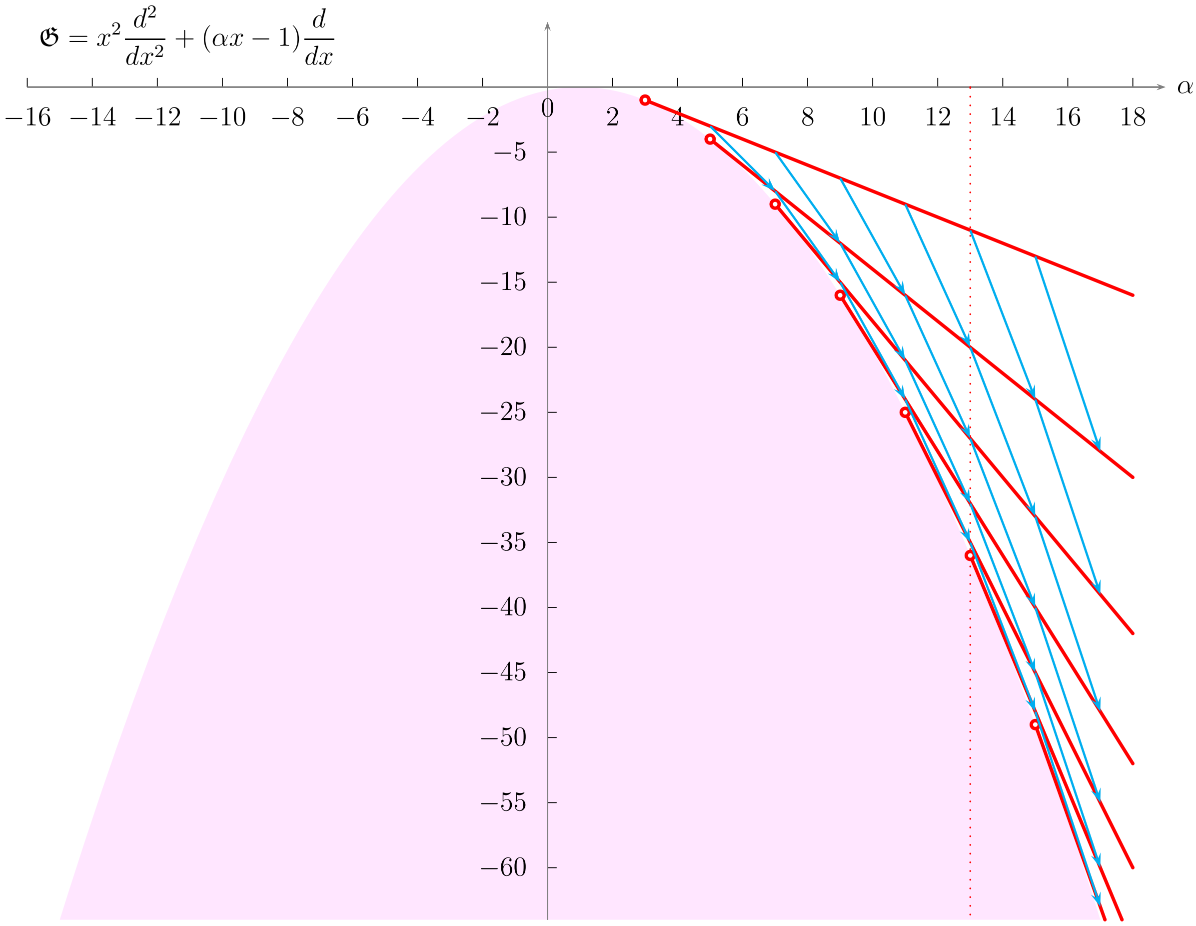
$$
x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)=x^{n+1-(\alpha+2)+2}e^{-1/x}L_{n+1}^{(\alpha+2-2(n+1)-3)}\left(\frac{1}{x}\right)
$$

であるから n が $n+1$ になり，α が $\alpha+2$ になった形である.

次に (24.10) を示す.

$$
\begin{aligned}
&\left(x^2\frac{d}{dx}+(\alpha x-1)\right)\left[x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\
&\quad=x^2\left\{(n-\alpha+1)x^{n-\alpha}e^{-1/x}L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)+x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}\frac{1}{x^2}L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.\\
&\qquad\left.+x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}[L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}]'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right\}+(\alpha x-1)x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&\quad=x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}\left[(n-\alpha+1)L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}[L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}]'\left(\frac{1}{x}\right)\right.\\
&\qquad\left.+(\alpha-\frac{1}{x})L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\
&\quad=-x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}\{y[L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}]'(y)-(n+1)L_{n+1}^{(\alpha-2n-3)}(y)\}\quad(y=\frac{1}{x})\\
&\quad=x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}(\alpha-2n-3+n+1)L_n^{(\alpha-2n-3)}(y)\quad(\because\ (19.33))\\
&\quad=(\alpha-n-2)x^{n-\alpha+2}e^{-1/x}L_n^{(\alpha-2n-3)}\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}
$$

これですべて示せた. □



スペクトルの Stein's pair

25.　Jacobi 多項式

次に Jacobi 多項式が固有関数となる拡散過程を扱うことを考えるが，その準備として，Jacobi 多項式に関係した超幾何関数についてまとめておく．

Gauss 超幾何関数

単に超幾何関数というと，次の Gauss の超幾何関数を意味することが多い．

$$ {}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} x^n. \tag{25.1}$$

但し，$c \neq 0, -1, -2 \ldots$ である．この関数を以後 F で表す:

$$F(a,b,c;x) = {}_2F_1(a,b;c;x).$$

この関数は次の微分方程式を満たす．

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}F + \{c - (a+b+1)x\}\frac{d}{dx}F - abF = 0. \tag{25.2}$$

あるいは次の様にも書ける．

$$x(1-x)F'' + \{c(1-x) - (a+b-c+1)x\}F' = abF. \tag{25.3}$$

F は固有値 ab の固有関数とみなせる．(25.2) を確かめるために，隣接函数（あるいは昇降演算子）についてまとめておく．

隣接関数

まず基本的な微分について計算しておく．F を微分すると

$$\frac{d}{dx}F(a,b,c;x) = \frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1;x) \tag{25.4}$$

が成り立つ．実際

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}F(a,b,c;x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(n-1)!}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}n!}x^n \\
&= \frac{ab}{c}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n n!}x^n \\
&= \frac{ab}{c}F(a+1,b+1,c+1;x).
\end{aligned}$$

さて次に，隣接関係の式を導いておこう．次のような記法 $F(a\pm)$, $F(b\pm)$, $F(c\pm)$ を使う．ここで

$$F(a\pm) = F(a\pm 1, b, c; x)$$

などである．a と b に関しては対称であることを留意しておこう．このとき，次が成り立つ．

命題 25.1. 次のことが成り立つ．

$$F' = \frac{ab}{c}F(a+, b+, c+), \tag{25.5}$$

$$F(a+) = F + \frac{1}{a}xF', \tag{25.6}$$

$$F(b+) = F + \frac{1}{b}xF', \tag{25.7}$$

$$F(c+) = \frac{c(c-a-b)}{(c-a)(c-b)}F + \frac{c}{(c-a)(c-b)}(1-x)F', \tag{25.8}$$

$$F(a-) = \frac{c-a-bx}{c-a}F + \frac{1}{c-a}x(1-x)F', \tag{25.9}$$

$$F(b-) = \frac{c-b-ax}{c-b}F + \frac{1}{c-b}x(1-x)F', \tag{25.10}$$

$$F(c-) = F + \frac{1}{c-1} xF', \tag{25.11}$$

$$x(1-x)F'' + \{c(1-x) - (a+b-c+1)x\}F' = abF, \tag{25.12}$$

$$x(1-x)F' + \{(c-1)(1-x) - (a+b-c)x\}F = (c-1)F(a-, b-, c-). \tag{25.13}$$

証明 (25.5) は (25.4) で既に示した．

さて

$$\varepsilon_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} \tag{25.14}$$

とおく．すると

$$\frac{(a+1)_n}{(a)_n} \varepsilon_n = \frac{a+n}{a} \varepsilon_n$$

から

$$n\varepsilon_n = a\left[\frac{(a+1)_n}{(a)_n}\varepsilon_n - \varepsilon_n\right]$$

また

$$\frac{(c)_n}{(c-1)_n}\varepsilon_n = \frac{c-1+n}{c-1}\varepsilon_n$$

から

$$n\varepsilon_n = (c-1)\left[\frac{(c)_n}{(c-1)_n}\varepsilon_n - \varepsilon_n\right].$$

$x\frac{d}{dx}[x^n] = nx^n$ だから xF' の x^n の係数は $n\varepsilon_n$ である．よって，上のことから

$$xF' = a[F(a+) - F] = b[F(b+) - F] = (c-1)[F(c-) - F] \tag{25.15}$$

が成り立つ．これは (25.6), (25.7), (25.11) を示している．

(25.15) を使って，

$$(a-b)F = aF(a+) - bF(b+), \tag{25.16}$$

$$(a-c+1)F = aF(a+) - (c-1)F(c-), \tag{25.17}$$

$$(b-c+1)F = bF(b+) - (c-1)F(c-) \tag{25.18}$$

も示せる．

次に F' の x^n の係数は

$$\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1} n!} = \frac{(a+n)(b+n)}{c+n}\varepsilon_n.$$

ここで

$$\frac{(a+n)(b+n)}{c+n} = n + (a+b-c) + \frac{(c-a)(c-b)}{c+n}$$

であり $F(c+)$ の x^n の係数は

$$\frac{(c)_n}{(c+1)_n}\varepsilon_n = \frac{c}{c+n}\varepsilon_n$$

であるから

$$F' = xF' + (a+b-c)F + \frac{(c-a)(c-b)}{c}F(c+).$$

即ち

$$(1-x)F' = (a+b-c)F + \frac{(c-a)(c-b)}{c}F(c+). \tag{25.19}$$

これから

$$F(c+) = \frac{c(c-a-b)}{(c-a)(c-b)}F + \frac{c}{(c-a)(c-b)}(1-x)F' \tag{25.20}$$

が得られてこれは即ち (25.8) である．

次に $F(a-)$ について考えよう．$F'(a-)$ は

$$F'(a-) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a-1)_n(b)_n}{(c)_n(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-1)(b+n)}{c+n}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}x^n$$

であるから x^n の係数は

$$\frac{(a-1)(b+n)}{c+n}\varepsilon_n = \left[(a-1) - \frac{(a-1)(c-b)}{c+n}\right]\varepsilon_n.$$

x をかけ，$(c+n)(c)_n = c(c+1)_n$ に注意して

$$xF'(a-) = (a-1)xF - \frac{(a-1)(c-b)x}{c}F(c+) \tag{25.21}$$

また (25.6) で a を $a-1$ に替えると

$$xF'(a-) = (a-1)[F - F(a-)]. \tag{25.22}$$

(25.21) と (25.22) の左辺は同じだから

$$(a-1)xF - \frac{(a-1)(c-b)x}{c}F(c+) = (a-1)[F - F(a-)].$$

両辺を $a-1$ で割って $F(a-)$ について解くと

$$
\begin{aligned}
F(a-) &= F - xF + \frac{(c-b)x}{c}F(c+) \\
&= (1-x)F + \frac{(c-b)x}{c}\frac{c(c-a-b)}{(c-a)(c-b)}F + \frac{(c-b)x}{c}\frac{c}{(c-a)(c-b)}(1-x)F' \quad (\because\ (25.8)) \\
&= (1-x)F + \frac{x(c-a-b)}{c-a}F + \frac{1}{c-a}x(1-x)F' \\
&= \frac{(1-x)(c-a)+x(c-a-b)}{c-a}F + \frac{1}{c-a}x(1-x)F' \\
&= \frac{(c-a)-x(c-a)+x(c-a)-bx}{c-a}F + \frac{1}{c-a}x(1-x)F' \\
&= \frac{c-a-bx}{c-a}F + \frac{1}{c-a}x(1-x)F'
\end{aligned}
$$

となり (25.9) が得られた．(25.10) は a と b の対称性から得られる．
　さて，(25.11) から

$$
F(c-) = F + \frac{1}{c-1}xF'
$$

であった．ここで c を $c+1$ とすれば

$$
F = F(c+) + \frac{1}{c}xF'(c+)
$$

である．ここで $F(c+)$ の表示 (25.8) を代入して

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{c(c-a-b)}{(c-a)(c-b)}F + \frac{c}{(c-a)(c-b)}(1-x)F' \\
&\quad + \frac{1}{c}x\frac{c(c-a-b)}{(c-a)(c-b)}F' + \frac{1}{c}x\frac{c}{(c-a)(c-b)}((1-x)F')' \\
&= \frac{c(c-a-b)}{(c-a)(c-b)}F + \frac{c}{(c-a)(c-b)}(1-x)F' \\
&\quad + x\frac{(c-a-b)}{(c-a)(c-b)}F' + x\frac{1}{(c-a)(c-b)}((1-x)F'' - F').
\end{aligned}
$$

両辺に $(c-a)(c-b)$ をかけて

$$
\begin{aligned}
(c-a)(c-b)F &= c(c-a-b)F + c(1-x)F' + x(c-a-b)F' + x((1-x)F'' - F') \\
&= x(1-x)F'' + c(1-x)F' + x(c-a-b-1)F' + c(c-a-b)F.
\end{aligned}
$$

これを整理して

$$
\begin{aligned}
x(1-x)F'' + c(1-x)F' - (a+b-c+1)xF' &= (c-a)(c-b)F - c(c-a-b)F \\
&= (c^2 - ac - bc + ab - c^2 + ca + cb)F
\end{aligned}
$$

$$= abF$$

となり (25.12) が得られた．

さて，(25.12) は

$$x(1-x)F'' + \{c(1-x) - (a+b-c+1)x\}F' = abF$$

であるが，ここで a を $a-1$, b を $b-1$, c を $c-1$ に替えると

(25.23)

$$\begin{aligned}&x(1-x)F''(a-,b-,c-) + \{(c-1)(1-x) - (a-1+b-1-(c-1)+1)x\}F'(a-,b-,c-)\\&\qquad = (a-1)(b-1)F(a-,b-,c-).\end{aligned}$$

ここで (25.5) から

$$F'(a-,b-,c-) = \frac{(a-1)(b-1)}{c-1}F$$

これを (25.23) へ代入すると

$$\begin{aligned}&x(1-x)\frac{(a-1)(b-1)}{c-1}F' + \{(c-1)(1-x) - (a-1+b-1-(c-1)+1)x\}\frac{(a-1)(b-1)}{c-1}F\\&\qquad = (a-1)(b-1)F(a-,b-,c-).\end{aligned}$$

ここで 両辺に $\frac{c-1}{(a-1)(b-1)}$ をかけて

$$x(1-x)F' + \{(c-1)(1-x) - (a+b-c)x\}F = (c-1)F(a-,b-,c-).$$

これで (25.13) が示せた．

蛇足ながら $F(a+)$, $F(a-)$ の関係からも，(25.12) を導くこともできる．(25.9) は

$$F(a-) = \frac{c-a-bx}{c-a}F + \frac{1}{c-a}x(1-x)F'$$

であった．a の代わりに $a+1$ を代入すると

$$F = \frac{c-a-1-bx}{c-a-1}F(a+) + \frac{1}{c-a-1}x(1-x)F'(a+).$$

両辺に $c-a-1$ をかけて

$$(c-a-1)F = (c-a-1-bx)F(a+) + x(1-x)F'(a+).$$

この右辺に (25.6) の $F(a+) = F + \frac{1}{a}xF'$ を代入して

$$(c-a-1)F = (c-a-1-bx)(F + \frac{1}{a}xF') + x(1-x)(F + \frac{1}{a}xF')'$$

$$= (c-a-1-bx)F + \frac{x}{a}(c-a-1-bx)F' + x(1-x)(F' + \frac{1}{a}F' + \frac{x}{a}F'').$$

両辺から $(c-a-1)F$ を引いて

$$\begin{aligned}
0 &= -bxF + \frac{x}{a}(c-a-1-bx)F' + x(1-x)(F' + \frac{1}{a}F' + \frac{x}{a}F'') \\
&= -bxF + \{\frac{x}{a}(c-a-1-bx) + x(1-x)\frac{a+1}{a}\}F' + x(1-x)\frac{x}{a}F'' \\
&= \frac{x}{a}\{-abF + (c-a-1-bx+(1-x)(a+1))F' + x(1-x)F''\} \\
&= \frac{x}{a}\{-abF + (c-a-1-bx+a+1-(a+1)x)F' + x(1-x)F''\} \\
&= \frac{x}{a}\{-abF + (c-(a+b+1)x)F' + x(1-x)F''\}.
\end{aligned}$$

よって

$$0 = -abF + (c-(a+b+1)x)F' + x(1-x)F''$$

となって (25.12) を得る．

□

Jacobi 多項式

Jacobi 多項式は指数 $\alpha, \beta > -1$ をもつ多項式で次で定義される

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\{(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\}. \tag{25.24}$$

これを実際に計算すると

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}{(\alpha+1)_{n-k}(\beta+1)_k}(1-x)^{n-k}(1+x)^k \tag{25.25}$$

となる．特に次の作用素 L の固有関数になっていることが重要である．

$$L = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx} \tag{25.26}$$

とすると

$$LP_n^{(\alpha,\beta)} = -n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}. \tag{25.27}$$

さて，作用素 L と超幾何関数がみたす微分方程式 (25.2) を見れば両者の関連性が見て取れる．実際，Jacobi 多項式は超幾何関数で次のようにあらわされる．

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1; \frac{1-x}{2}). \tag{25.28}$$

この対応関係をもとに

$$K(x) = K(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1; x) \tag{25.29}$$

とおく．但し $\alpha \neq -1, -2, \ldots$ である．定数 $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$ をつけたのは，本質的な意味はないが，後の計算の表示を簡単にするためである．次の関係式

$$\begin{cases} a = -\gamma \\ b = \gamma + \alpha + \beta + 1 \\ c = \alpha + 1 \end{cases} \tag{25.30}$$

を逆に解けば

$$\begin{cases} \alpha = c - 1 \\ \beta = a + b - c \\ \gamma = -a \end{cases} \tag{25.31}$$

であるから

$$F(a, b, c; x) = K(c-1, a+b-c, -a; x) \tag{25.32}$$

が成り立つことになる．F が 微分方程式 (25.2) をみたしていることから K は次の微分方程式を満たしている．

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}K + \{\alpha + 1 - (\alpha+\beta+2)x] \frac{d}{dx}K = -\gamma(\gamma+\alpha+\beta+1)K.$$

しかし，後の計算の便を考慮してこの方程式は次のように表記する．

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}K + \{(\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x] \frac{d}{dx}K = -\gamma(\gamma+\alpha+\beta+1)K. \tag{25.33}$$

この等式が成り立つことは

$$\begin{aligned}
&x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}K + \{(\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x\} \frac{d}{dx}K \\
&\quad = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1; x) \\
&\qquad + \{(\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x] \frac{d}{dx}F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1; x) \\
&\quad = x(1-x)F''(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1; x) \\
&\qquad + \{(\alpha+1)(1-x) - (-\gamma + (\alpha+\beta+\gamma+1) - (\alpha+1) + 1)x\}F'(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1; x) \\
&\quad = -\gamma(\gamma+\alpha+\beta+1)F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1; x) \quad (\because \ (25.3)) \\
&\quad = -\gamma(\gamma+\alpha+\beta+1)K
\end{aligned}$$

から分かる．

この作用素は以下よく出てくるから

$$L_{(\alpha,\beta)} = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + \{(\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x\}\frac{d}{dx} \tag{25.34}$$

と定める．ここで１階の係数を書き換えたのは後の計算の便による．$L_{(\alpha,\beta)}K = -\gamma(\gamma+\alpha+\beta+1)K$ が成り立っていることになる．K は $\gamma = n \in \mathbb{Z}_+$ のときが，本質的に Jacobi 多項式である．即ち

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}K(\alpha,\beta,n;\frac{1-x}{2}). \tag{25.35}$$

作用素の対応関係も見ておこう．次の図式が可換になる．

(25.36)

$$\begin{tikzcd}
L^2([0,1]; x^\alpha(1-x)^\beta\,dx) \arrow[r, "x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+[\alpha+1-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}"] \arrow[d, "I"'] & L^2([0,1]; x^\alpha(1-x)^\beta\,dx) \arrow[d, "I"] \\
L^2([-1,1]; (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx) \arrow[r, "(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}"] & L^2([-1,1]; (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx
\end{tikzcd}$$

ここで

$$If(x) = f(\frac{1-x}{2})$$

である．

実際，

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{1-x}{2}\right)\right] = f'\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right).$$

更に

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[f\left(\frac{1-x}{2}\right)\right] + \{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\}\frac{d}{dx}\left[f\left(\frac{1-x}{2}\right)\right] \\
&\quad = (1-x^2)\frac{d}{dx}\left[f'\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\}f'\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&\quad = (1-x^2)f''\left(\frac{1-x}{2}\right)\frac{1}{4} + \left\{\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta+2}{2}x\right\}f'\left(\frac{1-x}{2}\right) \\
&\quad = \frac{1-x}{2}\frac{1+x}{2}f''\left(\frac{1-x}{2}\right) + \left\{\frac{\alpha-\beta}{2} - (\alpha+\beta+2)\frac{1-x}{2} + \frac{\alpha+\beta+2}{2}\right\}f'\left(\frac{1-x}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1-x}{2}\left(1-\frac{1-x}{2}\right)f''\left(\frac{1-x}{2}\right) + \left\{\alpha+1-(\alpha+\beta+2)\frac{1-x}{2}\right\}f'\left(\frac{1-x}{2}\right)$$
$$= y(1-y)f''(y) + [\alpha+1-(\alpha+\beta+2)y]f'(y). \quad \left(y = \frac{1-x}{2}\right)$$

これで可換性が示せた．即ち次の関係式が成り立つ．

$$(25.37)\quad [(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}]\circ I = I\circ[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+[\alpha+1-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}].$$

注意しておかないといけないが， I はこのままではユニタリーではない．実際

$$\begin{aligned}\int If(x)^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx &= \int f(\frac{1-x}{2})^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\,dx \\ &= \int f(y)^2(2y)^\alpha(2-2y)^\beta 2\,dy \\ &\qquad (y = \frac{1-x}{2},\ x = 1-2y,\ dx = -2dy) \\ &= 2^{\alpha+\beta+1}\int f(y)^2 y^\alpha(1-y)^\beta\,dy.\end{aligned}$$

従ってユニタリーにするには測度を定数倍する必要がある．そのことはあまりこだわらないことにする．

K の性質をまとめておこう．以前と同じように $K(\alpha+) = K(\alpha+1,\beta,\gamma)$ などの略記法を用いる．

命題 25.2. K は次をみたす．

$$(25.38)\qquad K' = -\gamma(\gamma+\alpha+\beta+1)K(\alpha+,\beta+,\gamma-).$$
$$(25.39)\qquad xK' + \alpha K = K(\alpha-,\beta+).$$
$$(25.40)\qquad (1-x)K' - \beta K = -(\alpha+\gamma+1)(\beta+\gamma)K(\alpha+,\beta-).$$
$$(25.41)\qquad x(1-x)K' + (\alpha(1-x)-\beta x)K = K(\alpha-,\beta-,\gamma+).$$

証明 (25.4) から

$$\begin{aligned}K'(\alpha,\beta,\gamma) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}F'(-\gamma,\alpha+\beta+\gamma+1,\alpha+1) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\alpha+1}F(-\gamma+1,\alpha+\beta+\gamma+2,\alpha+2) \\ &= -\gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}F(-\gamma+1,\alpha+\beta+\gamma+2,\alpha+2) \\ &= -\gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)K(\alpha+1,\beta+1,\gamma-1)\end{aligned}$$

で (25.38) が示せた．また (25.15) の 3 番目の等式から

$$xK'(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}xF'(-\gamma,\alpha+\beta+\gamma+1,\alpha+1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}[F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha) - F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}[F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha) - F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha) - F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha) - \frac{\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha) - \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&= K(\alpha-1, \beta+1, \gamma) - \alpha K(\alpha, \beta, \gamma).
\end{aligned}
$$

これは (25.39) を示している.
次に (25.19) から

$$
\begin{aligned}
&(1-x)K'(\alpha, \beta, \gamma) - \beta K(\alpha, \beta, \gamma) \\
&\quad = (1-x)\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}F'(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) - \frac{\beta}{\Gamma(\alpha+1)}F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&\quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(1-x)F'(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&\qquad - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}((-\gamma)+\alpha+\beta+\gamma+1-(\alpha+1))F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&\quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{(\alpha+1+\gamma)(\alpha+1-\alpha-\beta-\gamma-1)}{\alpha+1}F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1+1) \\
&\quad = (\alpha+1+\gamma)(-\beta-\gamma)\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}F(-\gamma, \alpha+1+\beta-1+\gamma+1, \alpha+1+1) \\
&\quad = -(\alpha+1+\gamma)(\beta+\gamma)K(\alpha+1, \beta-1, \gamma).
\end{aligned}
$$

これは (25.40) を意味している.
(25.41) を示すには (25.13) を用いればよい.

$$
\begin{aligned}
&x(1-x)K' + (\alpha(1-x) - \beta x)K \\
&\qquad = x(1-x)\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}F'(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&\qquad\quad + (\alpha(1-x) - \beta x)\frac{1}{\alpha+1}F(-\gamma, \alpha+\beta+\gamma+1, \alpha+1) \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\alpha F(-\gamma-1, \alpha+\beta+\gamma, \alpha) \quad (\because\ (25.13)) \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}F(-\gamma-1, \alpha+\beta+\gamma, \alpha) \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma((\alpha-1)+1)}F(-(\gamma+1), (\alpha-1)+(\beta-1)+(\gamma+1)+1, (\alpha-1)+1) \\
&\qquad = K(\alpha-1, \beta-1, \gamma+1).
\end{aligned}
$$

これが求める結果である．

$\square$

26. Jacobi 多項式に対応する拡散過程

ここでは (III-2-a) $a = x(1-x)$, $I = [0,1]$ の場合を扱う．ここで扱う作用素は (25.34) で定義した

$$L_{(\alpha,\beta)} = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1))x)\frac{d}{dx} \tag{26.1}$$

である．Hilbert 空間は $L^2([0,1]; x^\alpha(1-x)^\beta\,dx)$ で考える．ここでは，Jacobi 多項式が固有関数となる拡散過程を扱う．Jacobi 多項式はこの作用素の固有関数ではないが，第 25節で見たようにユニタリー同値である．よって，以後はこの作用素を扱う．第 3節 の設定では $I = [0,1]$, $a = x(1-x)$, $\rho(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$ ととったことになる．実際 (3.8) の計算から

$$\begin{aligned}
b &= a' + a(\log\rho)' \\
&= [x(1-x)]' + x(1-x)(\alpha\log x + \beta\log(1-x))' \\
&= 1 - 2x + x(1-x)(\frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{1-x}) \\
&= 1 - 2x + \alpha(1-x) - \beta x \\
&= (\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x
\end{aligned}$$

となり，(26.1) が成り立っていることが分かる．

尺度関数 s は

$$s'(x) = \frac{1}{a(x)\rho(x)} = \frac{1}{x(1-x)x^\alpha(1-x)^\beta} = x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-1}$$

を満たす．そこで

$$\begin{aligned}
m(x) &= -\int_x^{1/2} y^\alpha(1-y)^\beta\,dx \\
s(x) &= -\int_x^{1/2} y^{-\alpha-1}(1-y)^{-\beta-1}\,dy.
\end{aligned}$$

よって m の $x\to 0$ での漸近挙動は

$$m(x)\begin{cases}
\to -\int_0^{1/2} x^\alpha(1-x)^\beta, & \alpha > -1 \\
\sim \log x, & \alpha = -1 \\
\sim \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}, & \alpha < -1
\end{cases}$$

となる．実際 $\alpha > -1$ のときは明らかで $\alpha = -1$ のときは l'Hospital の定理を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\int_x^{1/2} y^{-1}(1-y)^\beta\,dy}{\log x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}(1-x)^\beta}{1/x} = \lim_{x\to 0}(1-x)^\beta = 1$$

より従う．また $\alpha < -1$ のときは

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\int_x^{1/2} y^\alpha(1-y)^\beta\,dy}{\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0}(1-x)^\beta = 1$$

より分かる．

同様に s に関しては $x \to 0$ のとき

$$s(x)\begin{cases} \to -\int_0^{1/2} y^{-\alpha-1}(1-y)^{-\beta-1}\,dy, & \alpha < 0 \\ \sim \log x, & \alpha = 0 \\ \sim \frac{1}{-\alpha}x^{-\alpha}, & \alpha > 0 \end{cases}$$

となる．

境界の分類

これから，まず $\alpha > -1$ のとき

$$\begin{aligned} S(0) &= \int_0^{1/2}(m(1/2)-m(y))y^{-\alpha-1}(1-y)^{-\beta-1}\,dy \\ &\sim \int_0^{1/2} y^\alpha(1-y)^\beta\,dy\int_0^{1/2} y^{-\alpha-1}(1-y)^{-\beta-1}\,dy \\ &\begin{cases} = \infty & \alpha \geq 0 \\ < \infty & \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

よって境界 $x = 0$ の分類は次のようになる．

	$s(0)$	$m(0)$	$S(0)$	$M(0)$	boundary 0
$\alpha \geq 0$	$= -\infty$	$> -\infty$	$= \infty$	$< \infty$	non-exit, entrance
$-1 < \alpha < 0$	$> -\infty$	$> -\infty$	$< \infty$	$< \infty$	exit, entrance
$\alpha \leq -1$	$> -\infty$	$= -\infty$	$< \infty$	$= \infty$	exit, non-entrance

これは Bessel の場合と同じであることが分かる．

また，極限円，極限点の分類では $\alpha > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2}(s(1/2)-s(x))^2\,dm(x) &\sim \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{1/2} x^{-2\alpha}x^\alpha(1-x)^\beta\,dx \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{1/2} x^{-\alpha}(1-x)^\beta\,dx \\ &= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{1} x^{-\alpha}\,dx \\ &\begin{cases} = \infty & \alpha \geq 1 \\ < \infty & \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

より $\alpha \geq 1$ のとき積分は発散し，極限点の場合になる．従って次のように分類される．

	boundary 0
$\alpha \geq 1$	limit point
$-1 < \alpha < 1$	limit circle
$\alpha \leq -1$	limit point

境界 $x = 1$ も全く同様で，今度は β によって場合分けをする．

	$s(1)$	$m(1)$	$S(1)$	$M(1)$	boundary 1
$\beta \geq 0$	$= \infty$	$< \infty$	$= \infty$	$< \infty$	non-exit, entrance
$-1 < \beta < 0$	$< \infty$	$< \infty$	$< \infty$	$< \infty$	exit, entrance
$\beta \leq -1$	$< \infty$	$= \infty$	$< \infty$	$= \infty$	exit, non-entrance

また，極限円，極限点の分類では

	boundary 1
$\beta \geq 1$	limit point
$-1 < \beta < 1$	limit circle
$\beta \leq -1$	limit point

調和関数

後で必要になる Doob の h-変換の準備として，調和関数を調べておこう．(26.1) で定義した $L_{(\alpha,\beta)}$ に対して，次のような調和関数が存在する．

命題 26.1. $x^{-\alpha}$, $(1-x)^{-\beta}$, $x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}$ は次のような意味で調和関数である．

$$L_{(\alpha,\beta)}x^{-\alpha} = \alpha(\beta+1)x^{-\alpha}, \tag{26.2}$$

$$L_{(\alpha,\beta)}(1-x)^{-\beta} = (\alpha+1)\beta(1-x)^{-\beta}, \tag{26.3}$$

$$L_{(\alpha,\beta)}(x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}) = (\alpha+\beta)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}. \tag{26.4}$$

証明 まず (26.2) は

$$\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}x^{-\alpha} &= x(1-x)(x^{-\alpha})'' + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)(x^{-\alpha})' \\
&= x(1-x)\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2} - ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)\alpha x^{-\alpha-1} \\
&= (1-x)\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-1} - \alpha(\alpha+1)(1-x)x^{-\alpha-1} + \alpha(\beta+1)x^{-\alpha} \\
&= \alpha(\beta+1)x^{-\alpha}
\end{aligned}$$

より成り立つ．(26.3) は

$$\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}(1-x)^{-\beta} &= x(1-x)[(1-x)^{-\beta}]'' + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)[(1-x)^{-\beta}]' \\
&= x(1-x)\beta(\beta+1)(1-x)^{-\beta-2} + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)\beta(1-x)^{-\beta-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta(\beta+1)x(1-x)^{-\beta-1} + (\alpha+1)\beta(1-x)^{-\beta} - \beta(\beta+1)x(1-x)^{-\beta-1} \\
&= (\alpha+1)\beta(1-x)^{-\beta}
\end{aligned}
$$

で分かる．最後に (26.4)

$$
\begin{aligned}
&L_{(\alpha,\beta)}(x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}) \\
&= x(1-x)[x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}]'' + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)[x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}]' \\
&= x(1-x)[\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2}(1-x)^{-\beta} - 2\alpha\beta x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-1} + \beta(\beta+1)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta-2}] \\
&\quad + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)[-\alpha x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta} + \beta x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta-1}] \\
&= \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta+1} - 2\alpha\beta x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta} + \beta(\beta+1)x^{-\alpha+1}(1-x)^{-\beta-1} \\
&\quad - \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta+1} + (\alpha+1)\beta x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta} \\
&\quad + \alpha(\beta+1)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta} - \beta(\beta+1)x^{-\alpha+1}(1-x)^{-\beta-1} \\
&= [-2\alpha\beta + (\alpha+1)\beta + \alpha(\beta+1)]x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta} \\
&= (\alpha+\beta)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}.
\end{aligned}
$$

以上ですべてが示せた． □

次に，α, β の対称性を見よう．区間 $I = [0,1]$ の変換 $R\colon [0,1] \to [0,1]$ を

$$
R(x) = 1 - x \tag{26.5}
$$

で定義すると，自然に関数の間の対応 $R^*f(x) = f(R(x))$ が定まる，すなわち

$$
R^*\colon L^2(I, y^\beta(1-y)^\alpha\,dy) \to L^2(I, y^\beta(1-y)^\alpha\,dy) \tag{26.6}
$$

は unitary 作用素である．このとき次が成り立つ．

命題 26.2. 次の図式が可換になる．

$$
\begin{array}{ccc}
L^2(I; y^\beta(1-y)^\alpha\,dy) & \xrightarrow{\quad L_{(\beta,\alpha)}\quad} & L^2(I; y^\beta(1-y)^\alpha\,dx) \\
R^*\big\downarrow & & \big\downarrow R^* \\
L^2(I; x^\alpha(1-x)^\beta\,dy) & \xrightarrow{\quad L_{(\alpha,\beta)}\quad} & L^2(I; x^\alpha(1-x)^\beta\,dx)
\end{array} \tag{26.7}
$$

証明 $f \in L^2(I; y^\beta(1-y)^\alpha\,dy)$ に対し

$$
\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}R^*f(x) &= \left\{x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1))x)\frac{d}{dx}\right\}[f(1-x)] \\
&= x(1-x)f''(1-x) + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1))x)(-f'(1-x)) \\
&= (1-y)yf''(y) + ((\beta+1)(1-y) - (\alpha+1)y)f'(y) \quad (y = 1-x) \\
&= L_{(\beta,\alpha)}f(y).
\end{aligned}
$$

これは (26.7) の可換性を意味している． □

このことに注意すれば命題 26.1において $L_{(\alpha,\beta)}x^{-\alpha} = \alpha(\beta+1)x^{-\alpha}$ から $L_{(\alpha,\beta)}(1-x)^{-\beta} = (\alpha+1)\beta(1-x)^{-\beta}$ が従うと言ってもよい．

さて，Stein's pair を考えると

$$b' = -(\alpha+\beta+2)$$

であるから

$$\mathfrak{A}u = au'' + bu' = x(1-x)u'' + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)u', \tag{26.8}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{A}}u &= au'' + (a'+b)u' + b'u \\ &= x(1-x)u'' + ((\alpha+2)(1-x) - (\beta+2)x)u' - (\alpha+\beta+2)u.\end{aligned} \tag{26.9}$$

$\hat{\mathfrak{A}}$ の 1 階の部分は α, β の代わりに $\alpha+1$, $\beta+1$ を代入した形になっている．即ち

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= L_{(\alpha,\beta)}, \\ \hat{\mathfrak{A}} &= L_{(\alpha+1,\beta+1)} - (\alpha+\beta+2)\end{aligned}$$

である．$D = \frac{d}{dx}\colon L^2([0,1];x^\alpha(1-x)^\beta\,dx) \to L^2([0,1];x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta+1}\,dx)$ としたとき

$$-D^*\theta = a\theta' + b\theta = x(1-x)\theta' + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)\theta \tag{26.10}$$

である．第 7節 で述べたことは，$L_{(\alpha,\beta)}$ と $L_{(\alpha+1,\beta+1)} - (\alpha+\beta+2)$ は 0 以外では同じスペクトルを持ち，固有関数の対応は微分で与えられる，ということであった．以下このことを具体的に，固有値，固有関数を見ながら見ていこう．作用素 $L_{(\alpha,\beta)}$ は次をみたすことを注意しておこう．

$$L_{(\alpha,\beta)}(fg) = (L_{(\alpha,\beta)}f)g + fL_{(\alpha,\beta)}g + 2x(1-x)f'g'. \tag{26.11}$$

実際

$$\begin{aligned}L_{(\alpha,\beta)}(fg) &= x(1-x)(fg)'' + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)(fg)' \\ &= x(1-x)(f''g + 2f'g' + fg'') + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)(f'g + fg') \\ &= (L_{(\alpha,\beta)}f)g + fL_{(\alpha,\beta)}f + 2x(1-x)f'g'.\end{aligned}$$

(1) $\boldsymbol{\alpha > -1}$, $\boldsymbol{\beta > -1}$ の場合

$K(\alpha,\beta,\gamma)$ を (25.29) で定義される関数とする．(25.33) から K は次を満たしている．

$$L_{(\alpha,\beta)}K(\alpha,\beta,\gamma) = -\gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)K(\alpha,\beta,\gamma).$$

さらにこの関数は微分すると 命題 25.2 の (25.38) から

$$K'(\alpha,\beta,\gamma) = -\gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)K(\alpha+1,\beta+1,\gamma-1)$$

となり，α, β を $\alpha+1, \beta+1$ としたものになっている．逆の対応は命題 25.2 (25.41) を用いて

$$
\begin{aligned}
&-D^*[K(\alpha+1,\beta+1,\gamma-1)] \\
&\qquad = x(1-x)K'(\alpha+1,\beta+1,\gamma-1) \\
&\qquad\qquad + ((\alpha+1)(1-x)-(\beta+1)x)K(\alpha+1,\beta+1,\gamma-1) \\
&\qquad = K(\alpha,\beta,\gamma). \quad (\because \ (25.41))
\end{aligned}
$$

となって確かに成立していることが確かめられる．

$\gamma = n \in \mathbb{Z}_+$ のとき多項式となり，固有関数となる．本質的に Jacobi 多項式であった．さらに n 番目の固有値を $\lambda(\alpha,\beta,n)$ とすると

$$
\lambda(\alpha,\beta,n) = -n(n+\alpha+\beta+1), \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{26.12}
$$

である．0 番目の固有関数は，定数関数である．さらに対応する固有値の差を取ると

$$
\begin{aligned}
\lambda(\alpha+1,\beta+1,n-1)-\lambda(\alpha,\beta,n) &= -(n-1)(n-1+\alpha+1+\beta+1+1) \\
&\quad + n(n+\alpha+\beta+1) \\
&= -n(n+\alpha+\beta+2)+(n+\alpha+\beta+2) \\
&\quad + n(n+\alpha+\beta+1) \\
&= -n+(n+\alpha+\beta+2) \\
&= \alpha+\beta+2
\end{aligned}
$$

となって $\hat{\mathfrak{A}}$ に現れる定数項 $\alpha+\beta+2$ と一致することが分かる．

(2) $\alpha < 0, \beta > -1$ の場合

この場合の固有関数を見るために，ユニタリー変換を行う．命題 26.1 で見たように $x^{-\alpha}$ は $L_{(\alpha,\beta)} - \alpha(\beta+1)$-調和であった．即ち

$$
L_{(\alpha,\beta)}x^{-\alpha} = \alpha(\beta+1)x^{-\alpha}.
$$

従って $x^{-\alpha}$ で次のように変換することができる．

$$
\begin{CD}
L^2([0,1]; x^{-\alpha}(1-x)^\beta\,dx) @>{L_{(-\alpha,\beta)}+\alpha(\beta+1)}>> L^2([0,1]; x^{-\alpha}(1-x)^\beta\,dx) \\
@V{R}VV @VV{R}V \\
L^2([0,1]; x^{\alpha}(1-x)^\beta\,dx) @>{L_{(\alpha,\beta)}}>> L^2([0,1]; x^{\alpha}(1-x)^\beta\,dx)
\end{CD} \tag{26.13}
$$

ここで

$$
Rf = x^{-\alpha}f \tag{26.14}
$$

この可換性を見るには $\varphi = x^{-\alpha}$ とおいて (26.5) を使うと

$$
\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}(\varphi f) &= (L_{(\alpha,\beta)}\varphi)f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f + 2x(1-x)\varphi' f' \\
&= \alpha(\beta+1)\varphi f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f - 2\alpha x(1-x)x^{-\alpha-1}f' \\
&= \alpha(\beta+1)\varphi f + \varphi[x(1-x)f'' + ((\alpha+1)(1-x)-(\beta+1)x)f'] - 2\alpha\varphi(1-x)f' \\
&= \alpha(\beta+1)\varphi f + \varphi[x(1-x)f'' + ((-\alpha+1)(1-x)-(\beta+1)x)f'] \\
&= \alpha(\beta+1)\varphi f + \varphi L_{(-\alpha,\beta)}f \\
&= \varphi(L_{(-\alpha,\beta)} + \alpha(\beta+1))f.
\end{aligned}
$$

これで図式の可換性が示せた．また $x^{-\alpha}K(-\alpha,\beta,\gamma)$ が

$$
\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}[x^{-\alpha}K(-\alpha,\beta,\gamma)] &= x^{-\alpha}L_{(-\alpha,\beta)}K(-\alpha,\beta,\gamma) + x^{-\alpha}\alpha(\beta+1)K(-\alpha,\beta,\gamma) \\
&= (\alpha(\beta+1) - \gamma(\gamma-\alpha+\beta+1))x^{-\alpha}K(-\alpha,\beta,\gamma) \\
&= ((\alpha-\gamma)(\beta+1) - \gamma(\gamma-\alpha))x^{-\alpha}K(-\alpha,\beta,\gamma) \\
&= -(\gamma-\alpha)(\gamma+\beta+1)x^{-\alpha}K(-\alpha,\beta,\gamma)
\end{aligned}
$$

を満たしている．さらにこの関数は微分すると命題 25.2 (25.39) を用いて

$$
\begin{aligned}
[x^{-\alpha}K(-\alpha,\beta,\gamma)]' &= -\alpha x^{-\alpha-1}K(-\alpha,\beta,\gamma) + x^{-\alpha}K'(-\alpha,\beta,\gamma) \\
&= x^{-\alpha-1}[xK'(-\alpha,\beta,\gamma) - \alpha K(-\alpha,\beta,\gamma)] \\
&= x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) \quad (\because\ (25.39))
\end{aligned}
$$

となり，指数の α, β を $\alpha+1, \beta+1$ に変えたものになっている．逆の対応は命題 25.2 (25.40) を用いて

$$
\begin{aligned}
&-D^*[x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma)] \\
&\quad = x(1-x)[x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma)]' \\
&\qquad + ((\alpha+1)(1-x)-(\beta+1)x))x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) \\
&\quad = -(\alpha+1)x(1-x)x^{-\alpha-2}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) + x(1-x)x^{-\alpha-1}K'(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) \\
&\qquad + (\alpha+1)(1-x)x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) - (\beta+1)x^{-\alpha}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) \\
&\quad = -(\alpha+1)(1-x)x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) + (1-x)x^{-\alpha}K'(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) \\
&\qquad + (\alpha+1)(1-x)x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) - (\beta+1)x^{-\alpha}K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) \\
&\quad = x^{-\alpha}[(1-x)K'(-\alpha-1,\beta+1,\gamma) - (\beta+1)K(-\alpha-1,\beta+1,\gamma)] \\
&\quad = x^{-\alpha}\{-(-\alpha-1+\gamma+1)(\beta+1+\gamma)\}K(-\alpha,\beta,\gamma) \quad (\because\ (25.40)) \\
&\quad = -(\gamma-\alpha)(\gamma+\beta+1)x^{-\alpha}K(-\alpha,\beta,\gamma)
\end{aligned}
$$

となり元に戻ることが確かめられた．

$\gamma = n \in \mathbb{Z}_+$ のときが固有関数になり，微分が固有関数の対応を与えていることが分かる．さらに n 番目の固有値を $\lambda(\alpha,\beta,n)$ とすると

(26.15) $$\lambda(\alpha,\beta,n) = -(n-\alpha)(n+\beta+1), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

である．対応する固有値を差を取って比べると

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha+1,\beta+1,n)-\lambda(\alpha,\beta,n) &= -(n-\alpha-1)(n+\beta+1+1)+(n-\alpha)(n+\beta+1)\\ &= -(n-\alpha)(n+\beta+2)+(n+\beta+2)+(n-\alpha)(n+\beta+1)\\ &= -(n-\alpha)+(n+\beta+2)\\ &= \alpha+\beta+2\end{aligned}$$

となり $\hat{\mathfrak{A}}$ に出てくる定数項と一致していることが確かめられる．

(3) $\alpha > -1$, $\beta < 0$ の場合

この場合の固有関数を見るために，ユニタリー変換を行う．命題 26.1 で見たように $(1-x)^{-\beta}$ は $L_{(\alpha,\beta)} - (\alpha+1)\beta$-調和であった．即ち

$$L_{(\alpha,\beta)}(1-x)^{-\beta} = (\alpha+1)\beta(1-x)^{-\beta}.$$

従って $(1-x)^{-\beta}$ で次のように変換することができる．

$$\begin{array}{ccc} L^2([0,1];x^\alpha(1-x)^{-\beta}\,dx) & \xrightarrow{L_{(\alpha,-\beta)}+(\alpha+1)\beta} & L^2([0,1];x^\alpha(1-x)^{-\beta}\,dx) \\ R\big\downarrow & & \big\downarrow R \\ L^2([0,1];x^\alpha(1-x)^{\beta}\,dx) & \xrightarrow{L_{(\alpha,\beta)}} & L^2([0,1];x^\alpha(1-x)^{\beta}\,dx) \end{array} \tag{26.16}$$

ここで

$$Rf = (1-x)^{-\beta} f \tag{26.17}$$

この可換性を見るには $\varphi = (1-x)^{-\beta}$ とおいて (26.5) を使うと

$$\begin{aligned}L_{(\alpha,\beta)}(\varphi f) &= (L_{(\alpha,\beta)}\varphi)f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f + 2x(1-x)\varphi' f'\\ &= (\alpha+1)\beta\varphi f + \varphi L_{(\alpha,\beta)} f + 2\beta x(1-x)(1-x)^{-\beta-1}f'\\ &= (\alpha+1)\beta\varphi f + \varphi[x(1-x)f'' + ((\alpha+1)(1-x)-(\beta+1)x)f'] + 2\beta\varphi x f'\\ &= (\alpha+1)\beta\varphi f + \varphi[x(1-x)f'' + ((-\alpha+1)(1-x)-(-\beta+1)x)f']\\ &= (\alpha+1)\beta\varphi f + \varphi L_{(\alpha,-\beta)}f\\ &= \varphi(L_{(-\alpha,\beta)} + (\alpha+1)\beta)f.\end{aligned}$$

これで図式の可換性が示せた．また $(1-x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,\gamma)$ が

$$\begin{aligned}L_{(\alpha,\beta)}[(1-x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,\gamma)] &= (1-x)^{-\beta}L_{(\alpha,-\beta)}K(\alpha,-\beta,\gamma)\\ &\quad + (1-x)^{-\beta}(\alpha+1)\beta K(\alpha,-\beta,\gamma)\\ &= ((\alpha+1)\beta - \gamma(\gamma+\alpha-\beta+1))(1-x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,\gamma)\\ &= (\alpha+1)(\beta-\gamma)-\gamma(\gamma-\beta))(1-x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,\gamma)\end{aligned}$$

$$= -(\gamma+\alpha+1)(\gamma-\beta)(1-x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,\gamma)$$

を満たしている．さらにこの関数は微分すると，命題 25.2 (25.40) を使って

$$\begin{aligned}
[(1-x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,\gamma)]' &= \beta(1-x)^{-\beta-1}K(\alpha,-\beta,\gamma)+(1-x)^{-\beta}K'(\alpha,-\beta,\gamma)\\
&= (1-x)^{-\beta-1}[(1-x)K'(\alpha,-\beta,\gamma)+\beta K(\alpha,-\beta,\gamma)]\\
&= -(1-x)^{-\beta-1}(\alpha+\gamma+1)(-\beta+\gamma)K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)\\
&\quad (\because\ (25.40))\\
&= -(\alpha+\gamma+1)(\gamma-\beta)(1-x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)
\end{aligned}$$

となり，指数の α,β を $\alpha+1,\beta+1$ に変えたものになっている．逆の対応は命題 25.2 (25.39) を用いて

$$\begin{aligned}
&-D^*[(1-x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)]\\
&\quad = x(1-x)[(1-x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)]'\\
&\qquad + ((\alpha+1)(1-x)-(\beta+1)x))(1-x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)\\
&\quad = x(1-x)(\beta+1)(1-x)^{-\beta-2}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)\\
&\qquad + x(1-x)(1-x)^{-\beta-1}K'(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)\\
&\qquad + (\alpha+1)(1-x)^{-\beta}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)-(\beta+1)x(1-x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)\\
&\quad = (\beta+1)x(1-x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)+x(1-x)^{-\beta}K'(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)\\
&\qquad + (\alpha+1)(1-x)^{-\beta}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)-(\beta+1)x(1-x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)\\
&\quad = (1-x)^{-\beta}\{xK'(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)+(\alpha+1)K(\alpha+1,-\beta-1,\gamma)\}\\
&\quad = (1-x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,\gamma)\quad (\because\ (25.39))
\end{aligned}$$

となり元に戻ることが確かめられた．

$\gamma=n\in\mathbb{Z}_+$ のときが固有関数になり，微分が固有関数の対応を与えていることが分かる．さらに n 番目の固有値を $\lambda(\alpha,\beta,n)$ とすると

$$\lambda(\alpha,\beta,n) = -(n+\alpha+1)(n-\beta),\quad n=0,1,2,\ldots \tag{26.18}$$

である．対応する固有値を差を取って比べると

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha+1,\beta+1,n)-\lambda(\alpha,\beta,n) &= -(n+\alpha+1+1)(n-\beta-1)+(n+\alpha+1)(n-\beta)\\
&= -(n+\alpha+1)(n-\beta-1)-(n-\beta-1)\\
&\quad + (n+\alpha+1)(n-\beta)\\
&= (n+\alpha+1)-(n-\beta-1)\\
&= \alpha+\beta+2
\end{aligned}$$

となり $\hat{\mathfrak{A}}$ に出てくる定数項と一致していることが確かめられる．

(4) $\alpha < 0$, $\beta < 0$ の場合

この場合の固有関数を見るために，ユニタリー変換を行う．命題 26.1 で示したように $x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}$ は $L_{(\alpha,\beta)}-(\alpha+\beta)$-調和であった．即ち

$$L_{(\alpha,\beta)}(x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}) = (\alpha+\beta)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}.$$

従って $x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}$ で次のように変換することができる．

$$\begin{array}{ccc} L^2([0,1];x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\,dx) & \xrightarrow{L_{(-\alpha,-\beta)}+(\alpha+\beta)} & L^2([0,1];x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\,dx) \\ R\Big\downarrow & & \Big\downarrow R \\ L^2([0,1];x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx) & \xrightarrow{\quad L_{(\alpha,\beta)}\quad} & L^2([0,1];x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx) \end{array} \tag{26.19}$$

ここで

$$Rf = x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}f. \tag{26.20}$$

この可換性を見るには $\varphi = x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}$ とおいて

$$\begin{aligned} L_{(\alpha,\beta)}(\varphi f) &= (L_{(\alpha,\beta)}\varphi)f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f + 2x(1-x)\varphi' f' \\ &= (\alpha+\beta)\varphi f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f + 2x(1-x)[-\alpha x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta} + \beta x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta-1}]f' \\ &= (\alpha+\beta)\varphi f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f + [-2\alpha x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta+1} + 2\beta x^{-\alpha+1}(1-x)^{-\beta}]f' \\ &= (\alpha+\beta)\varphi f + \varphi[x(1-x)f'' + ((\alpha+1)(1-x)-(\beta+1)x)f'] \\ &\quad + \varphi[-2\alpha(1-x)+2\beta x]f' \\ &= (\alpha+\beta)\varphi f + \varphi[x(1-x)f'' + ((-\alpha+1)(1-x)-(-\beta+1)x)f'] \\ &= (\alpha+\beta)\varphi f + \varphi L_{(-\alpha,-\beta)}f \\ &= \varphi(L_{(-\alpha,-\beta)} + (\alpha+\beta))f. \end{aligned}$$

これで図式の可換性が示せた．また $x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha,-\beta,\gamma)$ が

$$\begin{aligned} &L_{(\alpha,\beta)}[x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha,-\beta,\gamma)] \\ &\quad = x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}L_{(-\alpha,-\beta)}K(-\alpha,-\beta,\gamma) + x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}(\alpha+\beta)K(-\alpha,-\beta,\gamma) \\ &\quad = (\alpha+\beta-\gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha,-\beta,\gamma) \\ &\quad = (\alpha+\beta-\gamma(\gamma+1)+\gamma(\alpha+\beta))x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha,-\beta,\gamma) \\ &\quad = -(\gamma+1)(\gamma-\alpha-\beta)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha,-\beta,\gamma) \end{aligned}$$

を満たしている．さらにこの関数は微分すると 命題 25.2 (25.41) を用いて

$$\begin{aligned} &[x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha,-\beta,\gamma)]' \\ &= (-\alpha x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta} + \beta x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta-1})K(-\alpha,-\beta,\gamma) + x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K'(-\alpha,-\beta,\gamma) \\ &= x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-1}[(-\alpha(1-x)+\beta x)K(-\alpha,-\beta,\gamma) + x(1-x)K'(-\alpha,-\beta,\gamma)] \end{aligned}$$

$$= x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1) \quad (\because\ (25.41))$$

となり，指数の α,β を $\alpha+1,\beta+1$ に変えたものになっている．逆の対応は命題 25.2 (25.38) を用いて

$$\begin{aligned}
&-D^*[x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)]\\
&\quad = x(1-x)[x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)]'\\
&\qquad + ((\alpha+1)(1-x)-(\beta+1)x))x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,\beta-1,\gamma+1)\\
&\quad = -(\alpha+1)x(1-x)x^{-\alpha-2}(1-x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\qquad + \alpha(\beta+1)x(1-x)x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-2}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\qquad + x(1-x)x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-1}K'(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\qquad + (\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\qquad - (\beta+1)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\quad = -(\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\qquad + (\beta+1)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\qquad + x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K'(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\qquad + (\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\qquad - (\beta+1)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\quad = x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K'(-\alpha-1,-\beta-1,\gamma+1)\\
&\quad = x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\{-(\gamma+1)(-\alpha-1-\beta-1+\gamma+1+1)\}K(-\alpha,-\beta,\gamma) \quad (\because\ (25.38))\\
&\quad = -(\gamma+1)(\gamma-\alpha-\beta)x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha,-\beta,\gamma)
\end{aligned}$$

となり元に戻ることが確かめられた．

$\gamma=n\in\mathbb{Z}_+$ のときが固有関数になり，微分が固有関数の対応を与えていることが分かる．さらに n 番目の固有値を $\lambda(\alpha,\beta,n)$ とすると

$$\lambda(\alpha,\beta,n) = -(n+1)(n-\alpha-\beta), \quad n=0,1,2,\ldots \tag{26.21}$$

である．対応する固有値の差を取って比べると

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha+1,&\beta+1,n+1)-\lambda(\alpha,\beta,n)\\
&= -(n+2)(n+1-\alpha-1-\beta-1)+(n+1)(n-\alpha-\beta)\\
&= -(n+1)(n-\alpha-\beta-1)-(n-\alpha-\beta-1)+(n+1)(n-\alpha-\beta)\\
&= (n+1)-(n-\alpha-\beta-1)\\
&= \alpha+\beta+2
\end{aligned}$$

となり $\hat{\mathfrak{A}}$ に出てくる定数項と一致していることが確かめられる．ここで $\lambda(\alpha+1,\beta+1,n+1)$ と固有値の番号付けが逆向きにずれていることの理由を説明しておこう．この節の最初に説明したように $L_{(\alpha,\beta)}$ と $L_{(\alpha+1,\beta+1)}-(\alpha+\beta+2)$ は 0 以外では同じスペクトルを持っている．

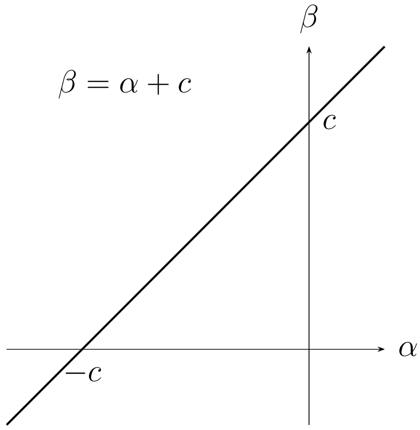
$L_{(\alpha+1,\beta+1)}$ の最大固有値は $\alpha+1+\beta+1$ であるから $L_{(\alpha+1,\beta+1)}-(\alpha+\beta+2)$ の最大固有値は 0 である．従ってスペクトルの対応をつけるときには 0 固有値を除かなければならないので番号が逆にずれているわけである．

次に固有値の配置を図示してみよう．

(α,β) の固有関数は微分すると $(\alpha+1,\beta+1)$ の固有関数になる．従って次のグラフ上を動くことになる．

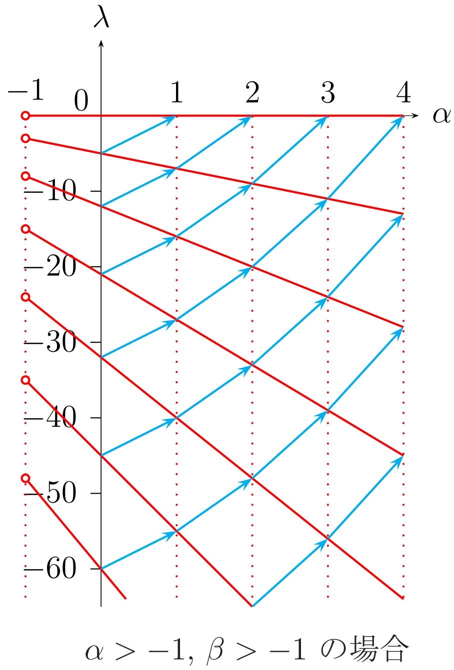
$$\beta=\alpha+c.$$

以下では $c=3$ の場合の計算を行う．



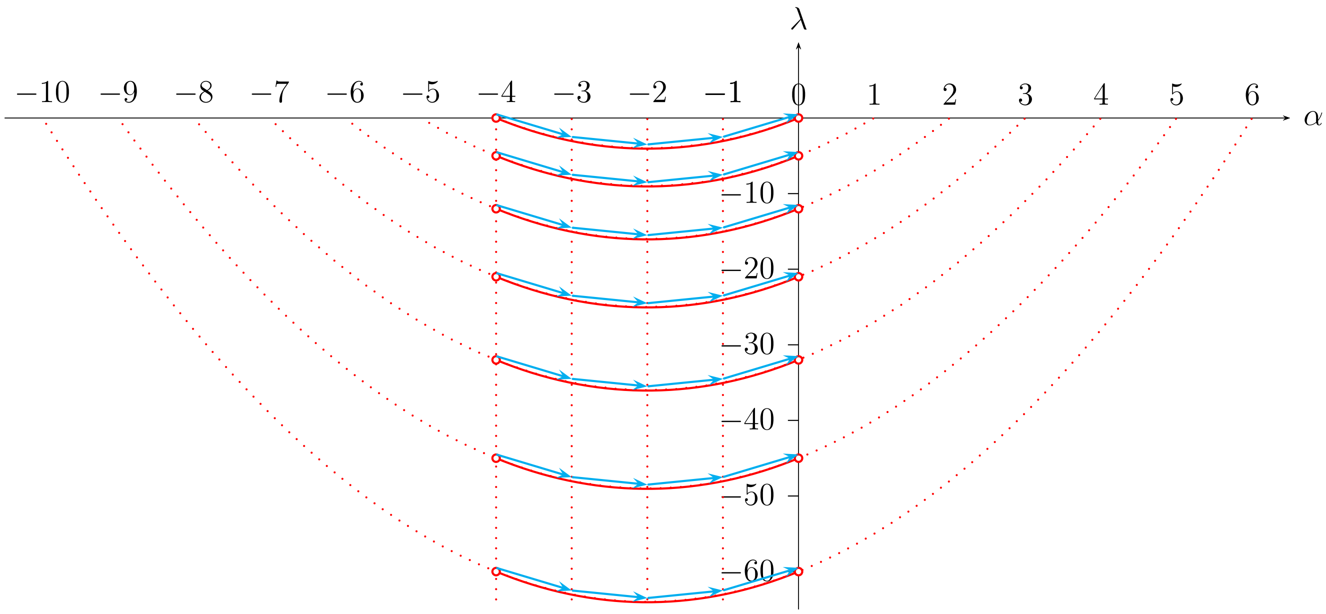
パラメータの関係

(1) $\alpha>-1,\ \beta>-1$ の場合



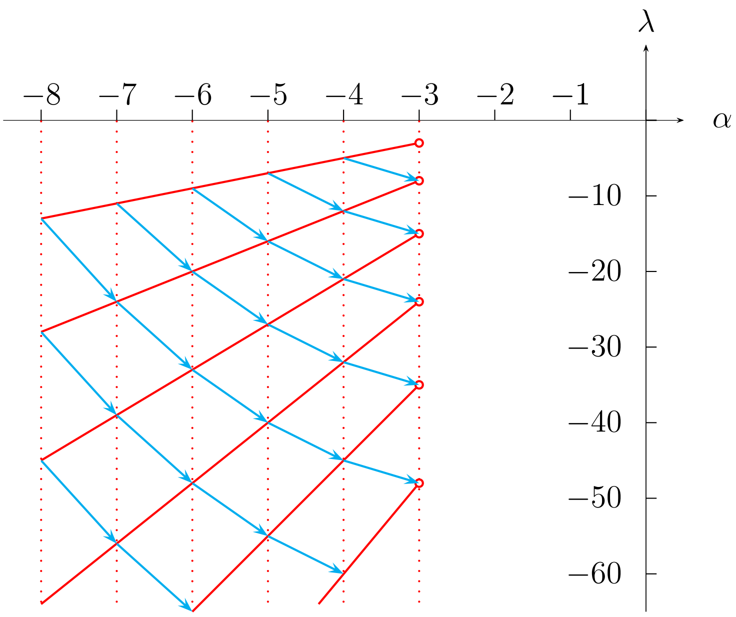
$\alpha>-1,\ \beta>-1$ の場合

(2) $\alpha < 0, \beta > -1$ の場合



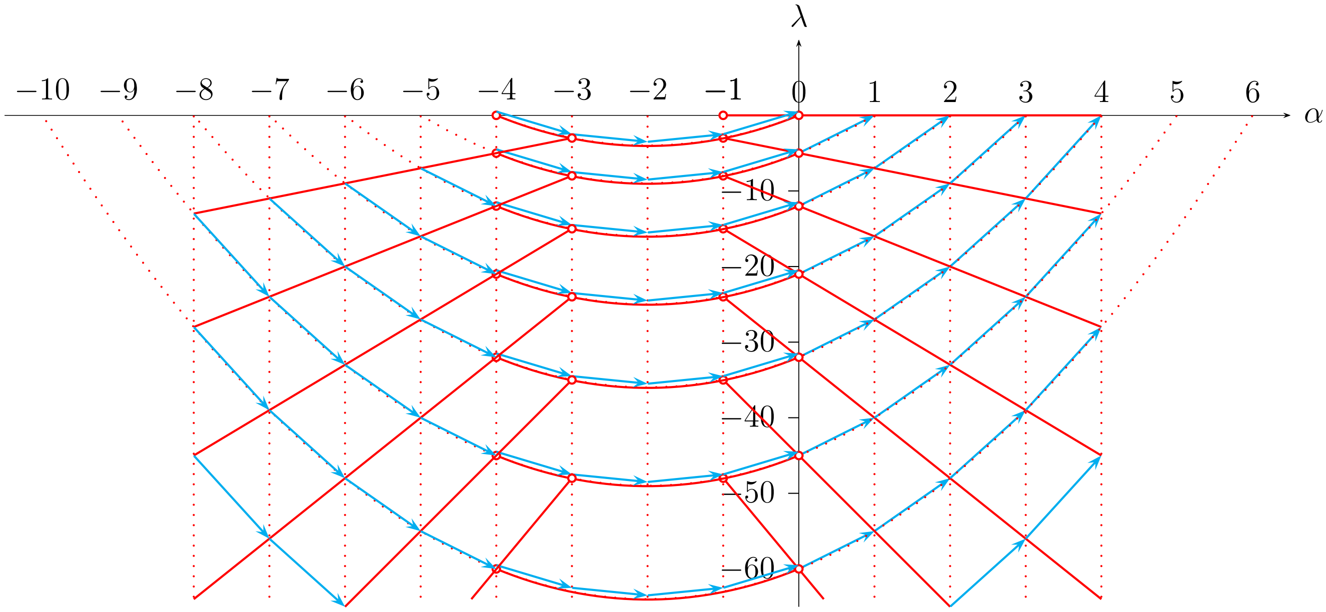
$\alpha < 0, \beta > -1$ の場合

(3) $\alpha < 0, \beta < 0$ の場合
このときは $\alpha < -c$ の制約がつく．



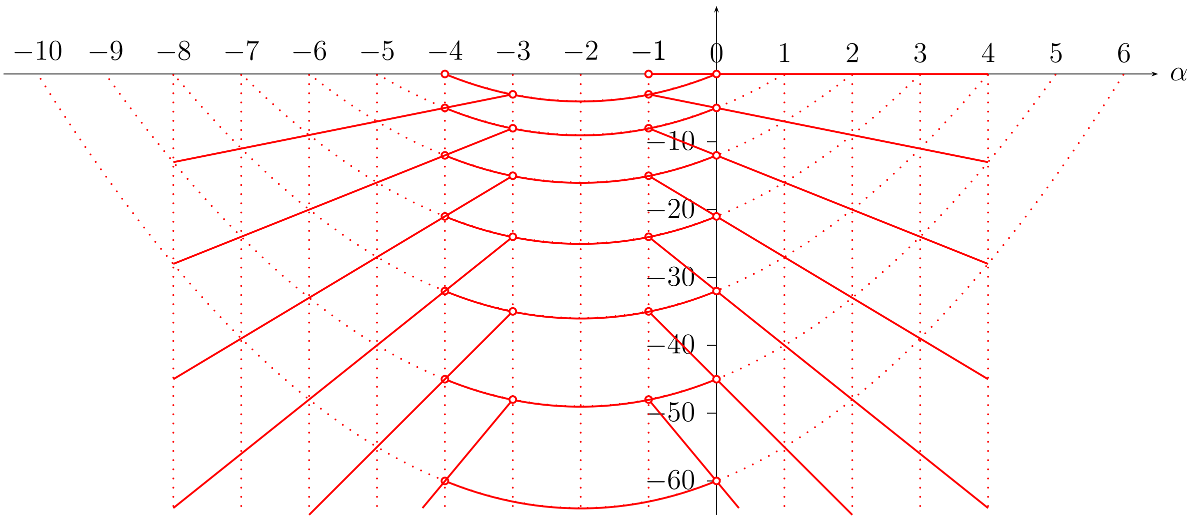
$\alpha < 0, \beta < 0$ の場合

見難くはなるが，全部を一度に表示すると

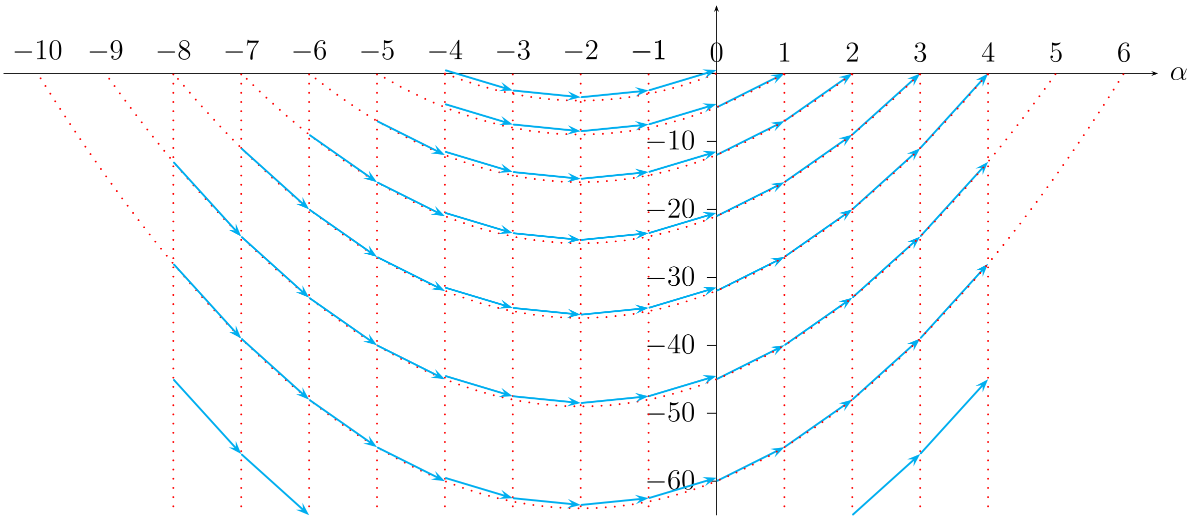


全部を一度に表示

スペクトルだけ分離すると



微分したときの対応関係を見ると



Dirichlet 条件を付けたときの固有関数については Hajmirzaahmad によって調べられていて [10] に Jacobi 多項式の場合が，[11] に Laguerre 多項式の場合が述べられている．従って新しい結果ではない．Hajmirzaahmad-Krall [12] に一般論が述べられているが，確率論的な境界の分類から整理したほうが分かりやすいように思う．Krall の本 [19] が総括的な本ではあろう．ただ，二つの系列が整然と並んでいるという描像は，物事を理解するのに有効であろうと思う．

[2013 年 4 月 2 日]

27. Fisher-Pareto 拡散過程

ここでは (III-2-b) $a = x(1+x)$, $I = [0,\infty)$ の場合を扱う．従って生成作用素は

(27.1)
$$L_{(\alpha,\beta)} = x(1+x)\frac{d^2}{dx^2} + ((\alpha+1)(1+x) + (\beta+1))x)\frac{d}{dx}$$

である．Hilbert 空間は $L^2([0,\infty); x^\alpha(1+x)^\beta\,dx)$ で考える．第 3節 の設定では $I = [0,\infty)$, $a = x(1+x)$, $\rho(x) = x^\alpha(1+x)^\beta$ ととったことになる．実際 (3.8) の計算から

$$\begin{aligned} b &= a' + a(\log\rho)' \\ &= [x(1+x)]' + x(1+x)(\alpha\log x + \beta\log(1+x))' \\ &= 1 + 2x + x(1+x)(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1+x}) \\ &= 1 + 2x + \alpha(1+x) + \beta x \\ &= (\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)x \end{aligned}$$

となり，(27.1) が成り立っていることが分かる．ρ は Fisher 分布や，Pareto 分布の（正規化されていないが）密度関数になるので対応する拡散過程を Fisher-Pareto 拡散過程と呼ぶことにする．

尺度関数 s は

$$s'(x) = \frac{1}{a(x)\rho(x)} = \frac{1}{x(1+x)x^\alpha(1+x)^\beta} = x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}$$

を満たす．そこで

$$m(x) = \int_1^x y^\alpha(1+y)^\beta\,dy \tag{27.2}$$

$$s(x) = \int_1^x y^{-\alpha-1}(1+y)^{-\beta-1}\,dy. \tag{27.3}$$

よって m の $x \to \infty$ での漸近挙動は

$$m(x)\begin{cases} \to \int_1^\infty x^\alpha(1+x)^\beta, & \alpha+\beta < -1, \\ \sim \log x, & \alpha+\beta = -1, \\ \sim \frac{1}{\alpha+\beta+1}x^{\alpha+\beta+1}, & \alpha+\beta > -1 \end{cases} \tag{27.4}$$

である．実際 $\alpha+\beta < -1$ のときは明らかで $\alpha+\beta = -1$ のときは L'Hôpital の定理を使って

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x y^\alpha(1+y)^\beta\,dy}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha(1+x)^\beta}{1/x} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1}(1+x)^\beta = 1$$

より従う．また $\alpha+\beta < -1$ のときは

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x y^\alpha(1+y)^\beta\,dy}{\log x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha(1+x)^\beta}{1/x} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha+1}(1+x)^\beta = 1$$

より分かる．

同様に s に関しては $x \to 0$ のとき

$$s(x)\begin{cases} \to \int_1^\infty y^{-\alpha-1}(1+y)^{-\beta-1}\,dy, & \alpha+\beta > -1, \\ \sim \log x, & \alpha+\beta = -1, \\ \sim -\frac{1}{\alpha+\beta+1}x^{-\alpha-\beta-1}, & \alpha+\beta < -1 \end{cases} \tag{27.5}$$

となる．

境界の分類

境界 $x = 0$ の分類は，基本的に Bessel のときと同じなので，

(27.6)

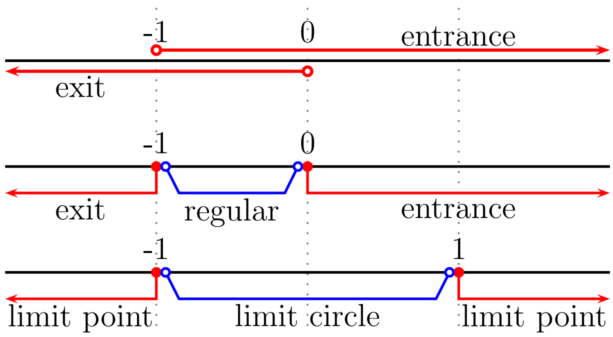
	$s(0)$	$m(0)$	$S(0)$	$M(0)$	boundary 0
$\alpha \geq 0$	$= -\infty$	$> -\infty$	$= \infty$	$< \infty$	non-exit, entrance
$-1 < \alpha < 0$	$> -\infty$	$> -\infty$	$< \infty$	$< \infty$	exit, entrance
$\alpha \leq -1$	$> -\infty$	$= -\infty$	$< \infty$	$= \infty$	exit, non-entrance

また，極限円，極限点の分類では

(27.7)

	boundary 0
$\alpha \geq 1$	limit point
$-1 < \alpha < 1$	limit circle
$\alpha \leq -1$	limit point

となる．まとめると次のようになる．



α による境界の分類

まず $\alpha+\beta<-1$ のとき，$-\alpha-\beta-2>-1$ であるから

$$\begin{aligned}S(\infty) &= \int_1^\infty (m(y)-m(1))y^{-\alpha-1}(1+y)^{-\beta-1}\,dy \\ &\sim \int_1^\infty y^\alpha(1+y)^\beta\,dy \int_1^\infty y^{-\alpha-1}(1+y)^{-\beta-1}\,dy = \infty.\end{aligned}$$

次に $\alpha+\beta=-1$ のときは

$$\begin{aligned}S(\infty) &= \int_1^\infty (m(y)-m(1))y^{-\alpha-1}(1+y)^{-\beta-1}\,dy \\ &\sim \int_1^\infty (\log y)y^{-\alpha-1}(1+y)^{-\beta-1}\,dy \\ &\sim \int_1^\infty (\log y)y^{-1}\,dy = \infty\end{aligned}$$

となる．さらに $\alpha+\beta>-1$ のときは

$$\begin{aligned}S(\infty) &= \int_1^\infty (m(y)-m(1))y^{-\alpha-1}(1+y)^{-\beta-1}\,dy \\ &\sim \frac{1}{\alpha+\beta+1}\int_1^\infty y^{\alpha+\beta+1}y^{-\alpha-1}(1+y)^{-\beta-1}\,dy \\ &\sim \frac{1}{\alpha+\beta+1}\int_1^\infty y^{-1}\,dy = \infty\end{aligned}$$

となり，いずれの場合も $S(\infty)=\infty$ となる．

同様に $M(\infty)=\infty$ となる．これは m と s の対応関係が互いに逆になっているから，m と s を入れ替えても同様の計算ができるからである．実際

$$\alpha \mapsto -\alpha-1$$

は α の代わりに $-\alpha-1$ を考えると

$$-\alpha-1 \mapsto -(-\alpha-1)-1=\alpha+1-1=\alpha$$

より，逆の対応関係を与えていることから分かる．以上を纏めると，境界 $x=\infty$ は常に non-exit, non-entrance である：

(27.8)

	$s(\infty)$	$m(\infty)$	$S(\infty)$	$M(\infty)$	boundary ∞
$\alpha+\beta>-1$	$<\infty$	$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$	non-exit, non-entrance
$\alpha+\beta=-1$	$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$	non-exit, non-entrance
$\alpha+\beta<-1$	$=\infty$	$<\infty$	$=\infty$	$=\infty$	non-exit, non-entrance

また，極限円，極限点の分類では，常に極限点である．

調和関数

次に基本的な調和関数（$L_{(\alpha,\beta)}$ の固有関数）を調べておこう．次のことが成り立つ．

命題 27.1. 次のことが成り立つ．

$$(L_{(\alpha,\beta)}+\alpha(\beta+1))[x^{-\alpha}]=0 \tag{27.9}$$

$$(L_{(\alpha,\beta)}+\beta(\alpha+1))[(1+x)^{-\beta}]=0 \tag{27.10}$$

$$(L_{(\alpha,\beta)}+\alpha+\beta)[x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}]=0 \tag{27.11}$$

証明 まず (27.9) から示す．

$$\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}[x^{-\alpha}] &= x(1+x)(-\alpha)(-\alpha-1)x^{-\alpha-2}+((\alpha+1)(x+1)+(\beta+1)x)(-\alpha)x^{-\alpha-1} \\
&= \alpha(\alpha+1)(1+x)x^{-\alpha-1}-\alpha(\alpha+1)(x+1)x^{-\alpha-1}-\alpha(\beta+1)x^{-\alpha} \\
&= -\alpha(\beta+1)x^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

次に (27.10) は

$$\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}[(1+x)^{-\beta}] &= x(1+x)(-\beta)(-\beta-1)x^{-\beta-2}+((\alpha+1)(x+1)+(\beta+1)x)(-\beta)(1+x)^{-\beta-1} \\
&= \beta(\beta+1)x(1+x)^{-\beta-1}-\beta(\beta+1)x(x+1)^{-\beta-1}-\beta(\alpha+1)(1+x)^{-\beta} \\
&= -\beta(\alpha+1)(1+x)^{-\beta}.
\end{aligned}$$

最後に (27.11) は

$$L_{(\alpha,\beta)}[x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}]$$

$$
\begin{aligned}
&= x(1+x)[x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}]'' + ((\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x)[x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}]' \\
&= x(1+x)[\alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-2}(1+x)^{-\beta} + 2\alpha\beta x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1} + \beta(\beta+1)x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta-2}] \\
&\quad + ((\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x)[-\alpha x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta} - \beta x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta-1}] \\
&= \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta+1} + 2\alpha\beta x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} + \beta(\beta+1)x^{-\alpha+1}(1+x)^{-\beta-1} \\
&\quad - \alpha(\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta+1} - (\alpha+1)\beta x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \\
&\quad - \alpha(\beta+1)x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} - \beta(\beta+1)x^{-\alpha+1}(1+x)^{-\beta-1} \\
&= \{2\alpha\beta - (\alpha+1)\beta - \alpha(\beta+1)\}x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \\
&= -(\alpha+\beta)x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}.
\end{aligned}
$$

これですべて示せた. □

Schrödinger 作用素との対応

第 6節で述べた Schrödinger 作用素との対応は，今の場合は次のようになる．まず，変換 $R\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ が $R'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ から

$$y = R(x) = \log(1 + 2x + 2\sqrt{x^2+x}). \tag{27.12}$$

実際微分して

$$R'(x) = \frac{2 + (x^2+x)^{-1/2}(2x+1)}{1 + 2x + 2\sqrt{x^2+x}} = \frac{2(x^2+x)^{1/2} + 2x + 1}{(x^2+x)^{1/2}(1 + 2x + 2\sqrt{x^2+x})} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

が確かめられる．$y = R(x)$ を逆に解いて

$$x = \frac{\cosh y - 1}{2} \tag{27.13}$$

が得られる．実際 (27.12) から

$$e^y = 1 + 2x + 2\sqrt{x^2+x}.$$

よって

$$e^y - 1 - 2x = 2\sqrt{x^2+x}.$$

両辺を 2 乗して

$$e^{2y} - 2(1+2x)e^y + 1 + 4x + 4x^2 = 4x^2 + 4x.$$

更に両辺に $e{-}y$ をかけて

$$e^y - 2(1+2x) + e^{-y} = 0.$$

これから

$$(1+2x) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cosh y.$$

後は容易．ここで次のことを注意しておく．

$$x(1+x) = \frac{\cosh y - 1}{2}\frac{\cosh y + 1}{2} = \frac{(\cosh y)^2 - 1}{4} = \frac{(\sinh y)^2}{4}$$

なので

$$\sqrt{x(1+x)} = \frac{\sinh y}{2}. \tag{27.14}$$

また

$$x + (1+x) = 1 + 2x = \cosh y \tag{27.15}$$

である．

　また (6.8) から

$$\phi(y)^2 = \rho(x)\sqrt{a(x)} = x^{\alpha+1/2}(1+x)^{\beta+1/2} \tag{27.16}$$

である．更に

$$(\log\phi(y))' = \frac{2b(x) - a'(x)}{4\sqrt{a(x)}} = \frac{2(\alpha+\beta+1)x + 2\alpha + 1}{2\sqrt{x(x+1)}}.$$

ここで (27.13), (27.14) を使えば

$$\begin{aligned}(\log\phi(y))' &= \frac{(\alpha+\beta+1)(\cosh y - 1) + 2\alpha + 1}{\sinh y} \\ &= \frac{(\alpha+\beta+1)\cosh y + \alpha - \beta}{\sinh y}\end{aligned}$$

なので，(6.10) から

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{A}}u &= u''(y) + \frac{2(\alpha+\beta+1)x + 2\alpha + 1}{2\sqrt{x(x+1)}}u'(y) \\ &= u''(y) + \frac{(\alpha+\beta+1)\cosh y + \alpha - \beta}{\sinh y}u'(y)\end{aligned}$$

が得られる．ここでもう一度，$x = R^{-1}(y)$ であることを注意しておこう．

　ここから Schrödinger 作用素との対応は (6.11) から

$$V(y) = \frac{\phi''(y)}{\phi(y)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}b'(x) - \frac{1}{4}a''(x) + \frac{(2b(x)-a'(x))(2b(x)-3a'(x))}{16a(x)} \\
&= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2) - \frac{1}{2} + \frac{((2\alpha+1)(1+x)+(2\beta+1)x)((2\alpha-1)(1+x)+(2\beta-1)x)}{16x(1+x)} \\
&= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1) + \left\{\frac{2\alpha+1}{x} + \frac{2\beta+1}{1+x}\right\}\frac{(2\alpha-1)(1+x)+(2\beta-1)x}{16} \\
&= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1) + \frac{1}{16}\Big\{(2\alpha+1)(2\alpha-1)(1+\frac{1}{x}) + (2\alpha+1)(2\beta-1) \\
&\quad + (2\beta+1)(2\alpha-1) + (2\beta+1)(2\beta-1)\frac{x}{x+1}\Big\} \\
&= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1) + \frac{1}{16}\{(2\alpha+1)(2\alpha-1) + (2\alpha+1)(2\beta-1) \\
&\quad + (2\beta+1)(2\alpha-1) + (2\beta+1)(2\beta-1)\} \\
&\quad + (2\alpha+1)(2\alpha-1)\frac{1}{x} - (2\beta+1)(2\beta-1)\frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1) + \frac{1}{16}\{4\alpha^2-1+4\alpha\beta-2\alpha+2\beta-1+4\alpha\beta+2\alpha-2\beta-1+4\beta^2-1\} \\
&\quad + (4\alpha^2-1)\frac{1}{x} - (4\beta^2-1)\frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1) + \frac{1}{16}\{4\alpha^2+8\alpha\beta+4\beta^2-4\} + (4\alpha^2-1)\frac{1}{x} - (4\beta^2-1)\frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{4}(2\alpha+2\beta+2) + \frac{1}{4}(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-1) + (4\alpha^2-1)\frac{1}{x} - (4\beta^2-1)\frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{4}(2\alpha+2\beta+1+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) + (4\alpha^2-1)\frac{1}{x} - (4\beta^2-1)\frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2 + (4\alpha^2-1)\frac{1}{x} - (4\beta^2-1)\frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2 + \frac{2(4\alpha^2-1)}{\cosh y - 1} - \frac{2(4\beta^2-1)}{\cosh y + 1}
\end{aligned}
$$

次の図式が可換になる．

$$
\begin{array}{ccc}
L^2([0,\infty); x^\alpha(1+x)^\beta\,dx) & \xrightarrow{\mathfrak{A}} & L^2([0,\infty); x^\alpha(1+x)^\beta\,dx) \\
{\scriptstyle R^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle R^*} \\
L^2([0,\infty); y^{\alpha+1/2}(1+y)^{\beta+1/2}\,dy) & \xrightarrow{\frac{d^2}{dy^2}+2(\log\phi)'\frac{d}{dy}} & L^2([0,\infty); y^{\alpha+1/2}(1+y)^{\beta+1/2}\,dy) \\
{\scriptstyle U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle U} \\
L^2([0,\infty); dy) & \xrightarrow{\frac{d^2}{dy^2}-V} & L^2([0,\infty); dy)
\end{array}
\tag{27.17}
$$

28. Fisher-Pareto 拡散過程のスペクトル

さていよいよスペクトルを求めて行こう．境界 0 の条件によって分類していく．

$\alpha > -1$ のとき

$\alpha > -1$ は entrance-Neumann 条件に対応する．この場合のスペクトルについて述べるために次の様に定義する．$n \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ に対し

$$\lambda_n(\alpha,\beta) = \Big(n - \frac{|\beta|+\beta}{2}\Big)\Big(n + \alpha - \frac{|\beta|-\beta}{2} + 1\Big) = \begin{cases}(n-\beta)(n+\alpha+1), & \beta \geq 0,\\ n(n+\alpha+\beta+1), & \beta \leq 0.\end{cases} \tag{28.1}$$

と定義する．このときスペクトルは次で与えられる．

定理 28.1. $L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは，本質的スペクトルが

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{(\alpha,\beta)}) = \Big(-\infty, -\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}\Big] \tag{28.2}$$

で，点スペクトルは (28.1) で定義される λ_n を用いて

$$\sigma_{\mathrm{p}}(L_{(\alpha,\beta)}) = \{\lambda_n(\alpha,\beta);\, 0 \leq n < \Big[\frac{-\alpha+|\beta|-1}{2}\Big]\} \tag{28.3}$$

で与えられる．

証明 (i) $\beta \leq \alpha$ のとき

ポテンシャル V を

$$V(y) = \frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2 + \frac{2(4\alpha^2-1)}{\cosh y - 1} - \frac{2(4\beta^2-1)}{\cosh y + 1} \tag{28.4}$$

とおくと，$L_{(\alpha,\beta)}$ は $\triangle - V$ とユニタリー同値であった．そこで $\alpha \geq \frac{1}{2}$, $-\alpha \leq \beta \leq \alpha$ の条件で考えると

$$V \geq \frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2$$

で，

$$\lim_{y\to\infty} V(y) = \frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2$$

となるから，$\triangle - V$ のスペクトルは $\Big(-\infty, -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2\Big]$ であることがわかる．このとき $L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルも同じである．

次に Stein's pair を使うと，$L_{(\alpha,\beta)}$ と $L_{(\alpha+1,\beta+1)} + (\alpha+\beta+2)$ は 0 以外では同じスペクトルを持つ．本質的スペクトルを考えれば

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{(\alpha,\beta)}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(L_{(\alpha+1,\beta+1)} + (\alpha+\beta+2))$$

であり，

$$-\frac{1}{4}(\alpha+1+\beta+1+1)^2 + (\alpha+\beta+2) = -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1+2)^2 + (\alpha+\beta+2)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\{(\alpha+\beta+1)^2 + 4(\alpha+\beta+1) + 4\} \\
&\quad + (\alpha+\beta+2) \\
&= -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2
\end{aligned}
$$

から，$L_{(\alpha+1,\beta+1)}$ の本質的スペクトルの情報から

$$\sigma_{\text{ess}}(L_{(\alpha,\beta)}) = \left(-\infty, -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2\right]$$

であることが従う．

次に点スペクトルを考える．$n \geq 1$ のとき

$$\lambda_n(\alpha,\beta) = \lambda_{n-1}(\alpha+1,\beta+1) + (\alpha+\beta+2)$$

が成り立っていることを見よう．実際

$$
\begin{aligned}
\lambda_{n-1}(\alpha+1,\beta+1) + (\alpha+\beta+2) &= (n-1)(n-1+\alpha+1+\beta+1+1) + (\alpha+\beta+2) \\
&= (n-1)(n+\alpha+\beta+1+1) + (\alpha+\beta+2) \\
&= \{n(n+\alpha+\beta+1) + n - n - \alpha - \beta - 1 - 1\} \\
&\quad + (\alpha+\beta+2) \\
&= n(n+\alpha+\beta+1) \\
&= \lambda_n(\alpha,\beta).
\end{aligned}
$$

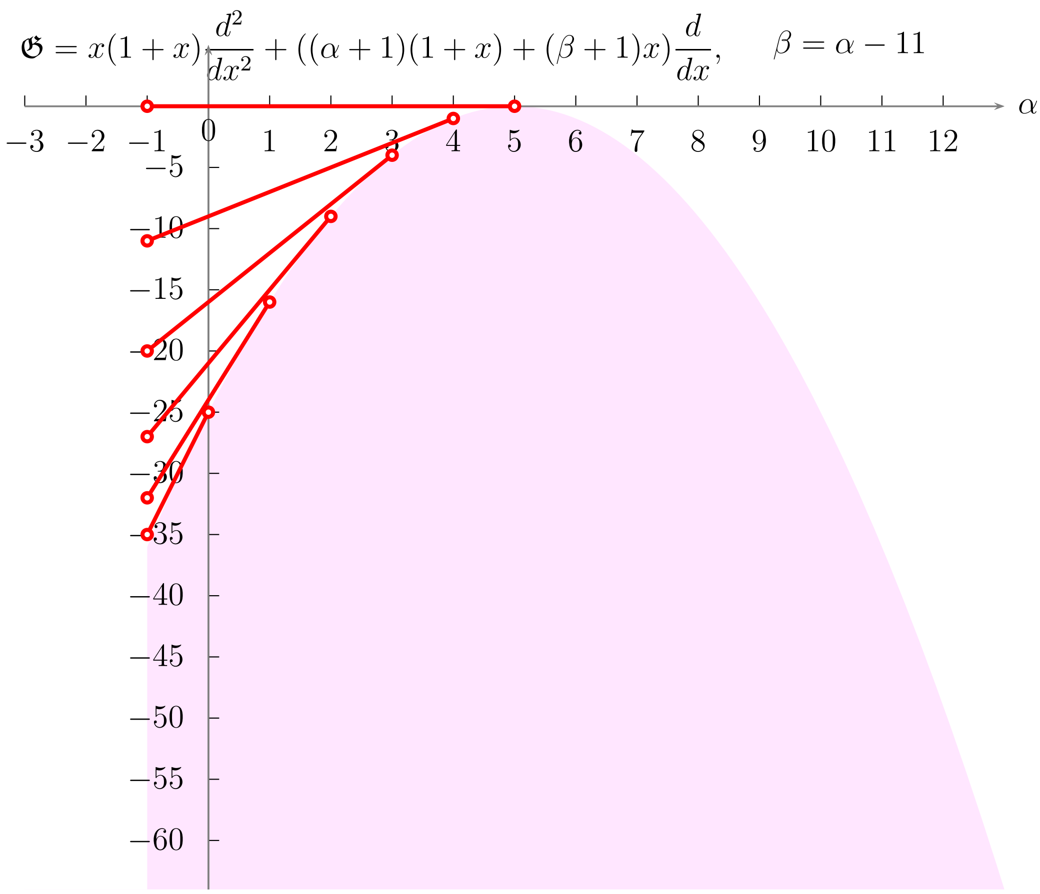
である．したがって 0 以外では $(\alpha+1,\beta+1)$ の点スペクトルの情報から (α,β) の時の点スペクトルが分かる．また $\alpha > -1$, $\alpha+\beta+1 < 0$ のときのみ m は有限測度になるので，1 が固有値 0 に対する固有関数となり，$\lambda_0(\alpha,\beta) = 0$ を固有値として加える必要がある．n の条件も

$$n < \left[\frac{-\alpha-\beta-1}{2}\right]$$

と

$$n - 1 < \left[\frac{-(\alpha+1)-(\beta+1)-1}{2}\right] = \left[\frac{-\alpha-\beta-1}{2}\right] - 1$$

が同じであることからわかる．これで，$L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは $L_{(\alpha+1,\beta+1)}$ のスペクトルの情報から完全に決定される．つまり $\alpha > -1$ かつ $\beta < \alpha$ の場合が証明できた．



(ii) $\beta \geq \alpha$ の場合

(27.10) から $(L_{(\alpha,\beta)}(1+x)^{-\beta} = -\beta(\alpha+1)(1+x)^{-\beta}$ であるから $\varphi(x) = (1+x)^{-\beta}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}(\varphi f) &= (L_{(\alpha,\beta)}\varphi)f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f + 2x(1+x)(-\beta)(1+x)^{-\beta-1}f' \\
&= -\beta(\alpha+1)\varphi f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f - 2\beta x\varphi f' \\
&= -\beta(\alpha+1)\varphi f + \varphi\{x(1+x)f'' + ((\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)x)f')\} - 2\beta x\varphi f' \\
&= -\beta(\alpha+1)\varphi f + \varphi\{x(1+x)f'' + ((\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)x - 2\beta x)f')\} \\
&= -\beta(\alpha+1)\varphi f + \varphi\{x(1+x)f'' + ((\alpha+1)(1+x) + (-\beta+1)x)f')\} \\
&= -\beta(\alpha+1)\varphi f + \varphi L_{(\alpha,-\beta)}f \\
&= \varphi(L_{(\alpha,-\beta)} - \beta(\alpha+1))f.
\end{aligned}
$$

また $J\colon L^2([0,\infty); x^\alpha(1+x)^{-\beta}\,dx) \to L^2([0,\infty); x^\alpha(1+x)^{\beta}\,dx)$ を

$$
Jf = \varphi f
$$

で定めると

$$
\int_0^\infty (Jf)^2 x^\alpha(1+x)^\beta\,dx = \int_0^\infty f^2(1+x)^{-2\beta}x^\alpha(1+x)^\beta\,dx
$$

$$= \int_0^\infty f^2 x^\alpha (1+x)^{-\beta}\, dx$$

だから J はユニタリー作用素となり次の図式が可換になる．

$$\begin{array}{ccc} L^2([0,\infty); x^\alpha(1+x)^\beta\, dx) & \xrightarrow{L_{(\alpha,\beta)}} & L^2([0,\infty); x^\alpha(1+x)^\beta\, dx) \\ {\scriptstyle J}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle J} \\ L^2([0,\infty); x^\alpha(1+x)^{-\beta}\, dx) & \xrightarrow{L_{(\alpha,-\beta)}-\beta(\alpha+1)} & L^2([0,\infty); x^\alpha(1+x)^{-\beta}\, dx) \end{array} \tag{28.5}$$

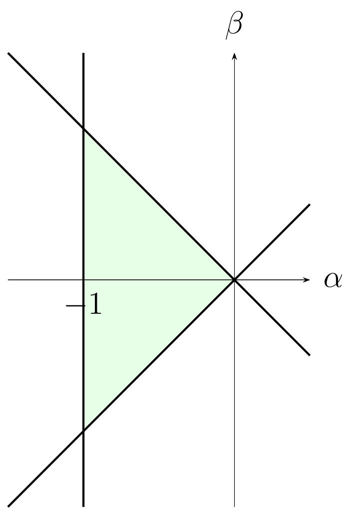
これから $L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは $L_{(\alpha,-\beta)} - \beta(\alpha+1)$ のスペクトルと同じになる．本質的スペクトルは

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(\alpha-\beta+1)^2 - \beta(\alpha+1) &= -\frac{1}{4}(\alpha+\beta-2\beta)^2 - \beta(\alpha+1) \\ &= -\frac{1}{4}\{(\alpha+\beta+1)^2 - 4\beta(\alpha+\beta+1) + 4\beta^2\} - \beta(\alpha+1) \\ &= -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2 \end{aligned}$$

から $\left(-\infty, -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2\right]$ であることが分かる．点スペクトルは

$$\begin{aligned} \lambda_n(\alpha,\beta) &= \lambda_n(\alpha,-\beta) - \beta(\alpha+1) \\ &= n(n+\alpha-\beta+1) - \beta(\alpha+1) \\ &= (n-\beta)(\alpha+1) + n(n-\beta) \\ &= (n-\beta)(n+\alpha+1) \end{aligned}$$

となって，定理の主張が成り立つ．但し，次の領域 $\alpha > -1, \beta < \alpha+1, \beta > \alpha-1$ でのスペクトルは定まらない．



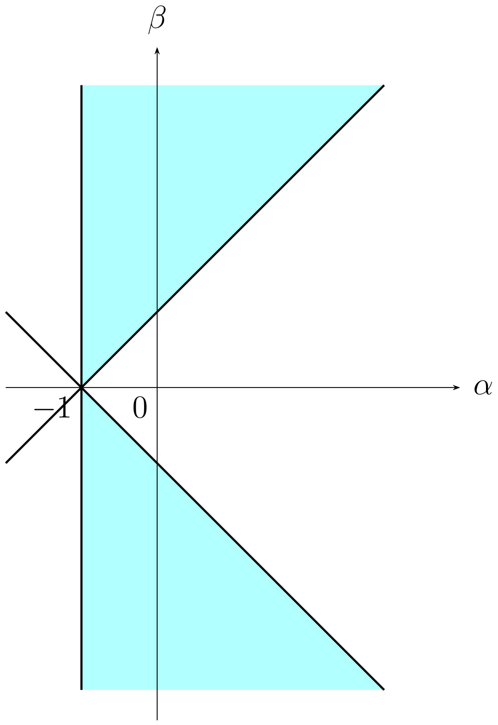
対称性では得られない領域

そこで Stein's pair から $L_{(\alpha,\beta)}$ と $L_{(\alpha+1,\beta+1)}+\alpha+\beta+2$ が 0 以外では同じスペクトルを持つことを使う．本質的スペクトルの部分は $\beta<\alpha$ の場合と同じ計算が成り立つ．点スペクトルに関しては

$$\begin{aligned}\lambda_n(\alpha+1,\beta+1)+\alpha+\beta+2 &= (n+\alpha+1+1)(n-\beta-1)+\alpha+\beta+2\\ &= (n+\alpha+1)(n-\beta)-(n+\alpha+1)+n-\beta-1+\alpha+\beta+2\\ &= (n+\alpha+1)(n-\beta)\end{aligned}$$

となって，これは $\lambda_n(\alpha,\beta)$ の表示と同じである．$\alpha+\beta+1<0$ の場合は定数関数が固有値 0 の固有関数であることが直接確かめられるので，そのことは使う必要がある．これで $\alpha>-1$ の場合は，すべての場合が示された． $\square$

Entrance-Neuman のときの点スペクトルが現れる領域は次のようになる。



$\alpha<0$ のとき

$\alpha<0$ は Exit-Dirichlet 条件に対応する．この場合のスペクトルについて述べるために次の様に定義する．$n\in\mathbb{N}:=\{1,2,\ldots\}$ に対し

$$\xi_n(\alpha,\beta)=\Big(n-\frac{|\beta|-\beta}{2}\Big)\Big(n-\alpha-\frac{|\beta|+\beta}{2}+1\Big)=\begin{cases}n(n-\alpha-\beta-1), & \beta\ge 0,\\ (n+\beta)(n-\alpha-1), & \beta\le 0.\end{cases}\tag{28.6}$$

と定義する．n は 1 から始めている．この方が対称性が分かりやすいだろうとの見地からである．このときスペクトルは次で与えられる．

定理 28.2. $L_{\alpha,\beta}$ のスペクトルは，本質的スペクトルが

$$\sigma_{\text{ess}}(L_{\alpha,\beta}) = \Big(-\infty, -\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}\Big] \tag{28.7}$$

で，点スペクトルは (28.6) で定義される ξ_n を用いて

$$\sigma_{\text{p}}(L_{(\alpha,\beta)}) = \{\xi_n(\alpha,\beta);\ 1 \le n < \Big[\frac{\alpha+|\beta|+1}{2}\Big]\} \tag{28.8}$$

で与えられる．

証明 この場合も β によって場合を分ける．
(i) $\beta \le -\alpha$ の場合
(27.9) から $(L_{(\alpha,\beta)}[x^{-\alpha} = -\alpha(\beta+1)x^{-\alpha}$ であるから $\varphi(x) = x^{-\alpha}$ とおくと

$$\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}(\varphi f) &= (L_{(\alpha,\beta)}\varphi)f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f + 2x(1+x)(-\alpha)x^{-\alpha-1}f' \\
&= -\alpha(\beta+1)\varphi f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f - 2\alpha(1+x)\varphi f' \\
&= -\alpha(\beta+1)\varphi f + \varphi\{x(1+x)f'' + ((\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x)f')\} \\
&\quad - 2\alpha(1+x)\varphi f' \\
&= -\alpha(\beta+1)\varphi f + \varphi\{x(1+x)f'' + ((\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x - 2\alpha(1+x))f')\} \\
&= -\alpha(\beta+1)\varphi f + \varphi\{x(1+x)f'' + ((-\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x)f')\} \\
&= -\alpha(\beta+1)\varphi f + \varphi L_{(-\alpha,\beta)}f \\
&= \varphi(L_{(-\alpha,\beta)} - \alpha(\beta+1))f.
\end{aligned}$$

また $J\colon L^2([0,\infty); x^{-\alpha}(1+x)^\beta\,dx) \to L^2([0,\infty); x^{\alpha}(1+x)^\beta\,dx)$ を

$$Jf = \varphi f$$

で定めると

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (Jf)^2 x^\alpha(1+x)^\beta\,dx &= \int_0^\infty f^2 x^{-2\alpha}x^\alpha(1+x)^\beta\,dx \\
&= \int_0^\infty f^2 x^{-\alpha}(1+x)^\beta\,dx
\end{aligned}$$

だから J はユニタリー作用素となり次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
L^2([0,\infty); x^{\alpha}(1+x)^\beta\,dx) \arrow[r, "L_{(\alpha,\beta)}"] & L^2([0,\infty); x^{\alpha}(1+x)^\beta\,dx) \\
L^2([0,\infty); x^{-\alpha}(1+x)^\beta\,dx) \arrow[u, "J"] \arrow[r, "L_{(-\alpha,\beta)}-\alpha(\beta+1)"] & L^2([0,\infty); x^{-\alpha}(1+x)^\beta\,dx) \arrow[u, "J"']
\end{tikzcd} \tag{28.9}$$

これから $L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは $L_{(-\alpha,\beta)} - \alpha(\beta+1)$ のスペクトルと同じになる．本質的スペクトルは

$$-\frac{1}{4}(-\alpha+\beta+1)^2 - \alpha(\beta+1) = -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1-2\alpha)^2 - \alpha(\beta+1)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\{(\alpha+\beta+1)^2 - 4\alpha(\alpha+\beta+1) + 4\alpha^2\} - \alpha(\beta+1) \\
&= -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2
\end{aligned}
$$

から $\left(-\infty, -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2\right]$ であることが分かる．

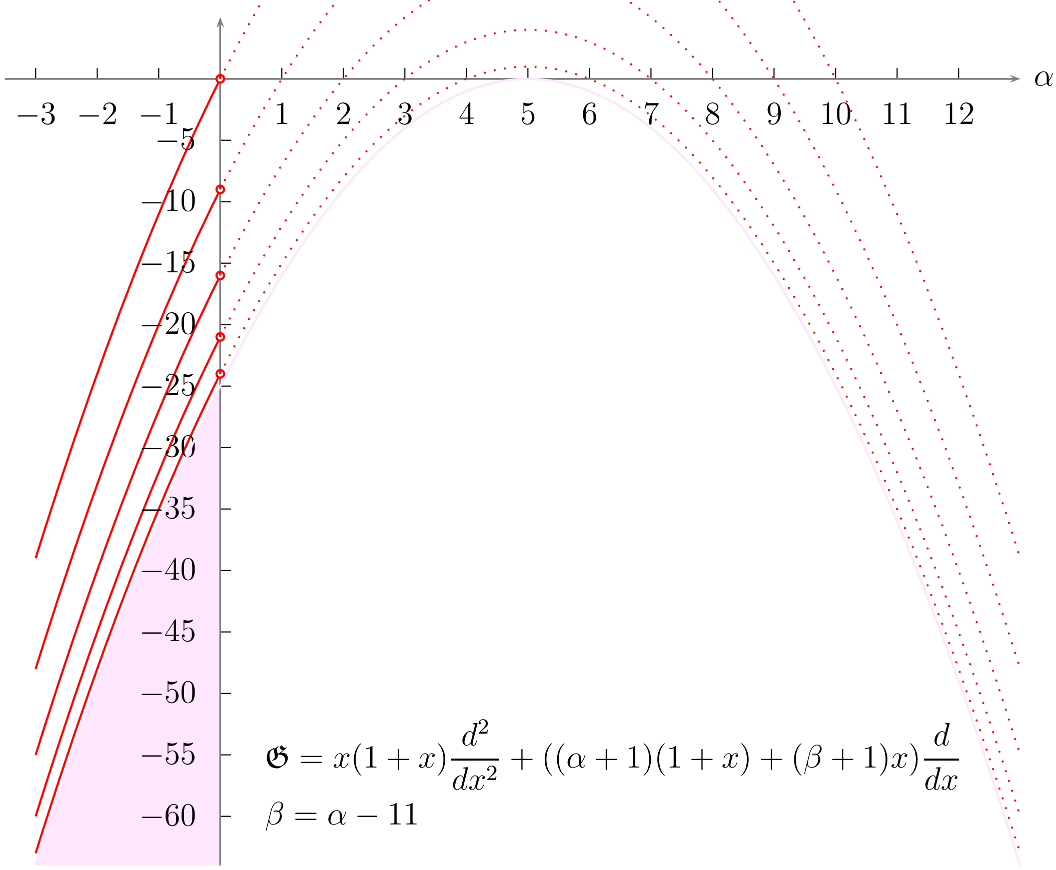
点スペクトルは，点スペクトルが現れるのが $\beta \leq 0$ の場合のみなので $\beta \leq 0$ として計算すると

$$
\begin{aligned}
\xi_n(\alpha,\beta) &= \lambda_{n-1}(-\alpha,\beta) - \alpha(\beta+1) \\
&= (n-1)(n-\alpha-1+\beta+1) - \alpha(\beta+1) \\
&= (n-1)(n-\alpha-1) + (n-1)(\beta+1) - \alpha(\beta+1) \\
&= (n-1)(n-\alpha-1) + (n-\alpha-1)(\beta+1) \\
&= (n+\beta)(n-\alpha-1)
\end{aligned}
$$

となって，定理の主張が成り立つ．n の範囲も

$$
0 \leq n-1 < \left[\frac{\alpha-\beta-1}{2}\right] = \left[\frac{\alpha-\beta+1}{2}\right] - 1
$$

で (28.8) と一致する．



(ii) $\beta \geq -\alpha$ の場合

(27.11) から $(L_{(\alpha,\beta)}x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} = -(\alpha+\beta))x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}$ であるから $\varphi(x) = x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}(\varphi f) &= (L_{(\alpha,\beta)}\varphi)f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f + 2x(1+x)\{-\alpha x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta} - \beta x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta-1}\}f' \\
&= -(\alpha+\beta)\varphi f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f - (2\alpha(1+x) - 2\beta x)\varphi f' \\
&= -(\alpha+\beta)\varphi f + \varphi\{x(1+x)f'' + ((\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)x)f')\} \\
&\quad - (2\alpha(1+x) - 2\beta x)\varphi f' \\
&= -(\alpha+\beta)\varphi f \\
&\quad + \varphi\{x(1+x)f'' + ((\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)x - 2\alpha(1+x) - 2\beta x)f')\} \\
&= -(\alpha+\beta)\varphi f + \varphi\{x(1+x)f'' + ((-\alpha+1)(1+x) + (-\beta+1)x)f')\} \\
&= -(\alpha+\beta)\varphi f + \varphi L_{(-\alpha,-\beta)}f
\end{aligned}
$$

$$= \varphi(L_{(-\alpha,-\beta)} - (\alpha + be))f.$$

また $J\colon L^2([0,\infty); x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\,dx) \to L^2([0,\infty); x^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx)$ を

$$Jf = \varphi f$$

で定めると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (Jf)^2 x^\alpha (1+x)^\beta\,dx &= \int_0^\infty f^2 x^{-2\alpha}(1+x)^{-2\beta} x^\alpha (1+x)^\beta\,dx \\ &= \int_0^\infty f^2 x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\,dx\end{aligned}$$

だから J はユニタリー作用素となり次の図式が可換になる．

$$\begin{array}{ccc} L^2([0,\infty); x^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx) & \xrightarrow{L_{(\alpha,\beta)}} & L^2([0,\infty); x^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx) \\ {\scriptstyle J}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle J} \\ L^2([0,\infty); x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\,dx) & \xrightarrow{L_{(-\alpha,-\beta)}-(\alpha+\beta)} & L^2([0,\infty); x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\,dx) \end{array} \tag{28.10}$$

これから $L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは $L_{(-\alpha,-\beta)} - (\alpha+\beta)$ のスペクトルと同じになる．本質的スペクトルは

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}(-\alpha-\beta+1)^2 - (\alpha+\beta) \\ &\qquad = -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1-2\alpha-2\beta)^2 - \alpha - \beta \\ &\qquad = -\frac{1}{4}\{(\alpha+\beta+1)^2 - 4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) + 4(\alpha+\beta)^2\} - \alpha - \beta \\ &\qquad = -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2\end{aligned}$$

から $\left(-\infty, -\frac{1}{4}(\alpha+\beta+1)^2\right]$ であることが分かる．

点スペクトルは，$\beta \geq 0$ に注意して計算すると

$$\begin{aligned}\xi_n(\alpha,\beta) &= \lambda_{n-1}(-\alpha,-\beta) - (\alpha+\beta) \\ &= (n-1)(n-\alpha-1-\beta+1) - (\alpha+\beta) \\ &= n(n-\alpha-\beta) - (n-\alpha-\beta) - (\alpha+\beta) \\ &= n(n-\alpha-\beta) - n \\ &= n(n-\alpha-\beta-1)\end{aligned}$$

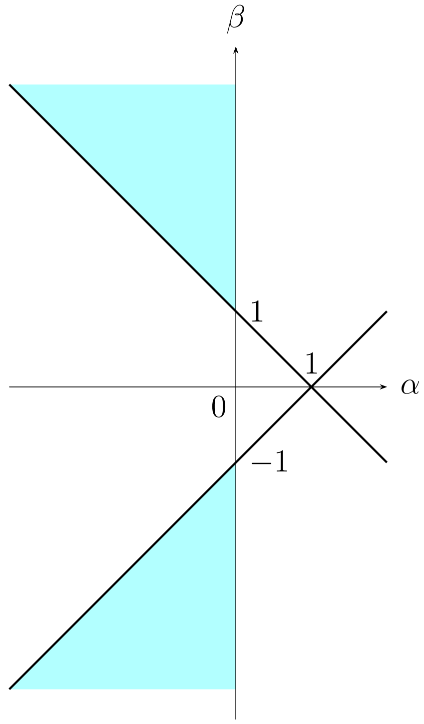
となって，定理の主張が成り立つ．n の範囲も

$$0 \leq n-1 < \left[\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right] = \left[\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right] - 1$$

で (28.8) と一致する．

以上ですべての場合が示せた． □

Exit-Dirichlet のときの点スペクトルが現れる領域は次のようになる。



固有関数と Stein の対応

固有関数について考えてみよう．固有関数は (25.29) で定義した関数 K で表される．本質的に超幾何関数であった．再記すれば

$$K(x) = K(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(-\gamma, \alpha + \beta + \gamma + 1; \alpha + 1; x) \tag{28.11}$$

で $F = F_1^2$ は超幾何関数である．基本は次の関係式である

$$L_{(\alpha,\beta)}[K(\alpha, \beta, \gamma; -x)] = \gamma(\gamma + \alpha + \beta + 1)K(\alpha, \beta, \gamma; -x) \tag{28.12}$$

である．これから固有関数の候補になることは想像できるだろう．この等式は次のように確認できる．

$$\begin{aligned}
&L_{(\alpha,\beta)}[K(\alpha, \beta, \gamma; -x)] \\
&\qquad = x(1 + x)\frac{d^2}{dx^2}[K(\alpha, \beta, \gamma; -x)] + \{(\alpha + 1)(1 + x) + (\beta + 1)x\}\frac{d}{dx}[K(\alpha, \beta, \gamma; -x)] \\
&\qquad = x(1 + x)K''(\alpha, \beta, \gamma; -x) - \{(\alpha + 1)(1 + x) + (\beta + 1)x\}K'(\alpha, \beta, \gamma; -x) \\
&\qquad = -(-x)(1 - (-x))K''(\alpha, \beta, \gamma; -x) \\
&\qquad\quad - \{(\alpha + 1)(1 - (-x)) - (\beta + 1)(-x)\}K'(\alpha, \beta, \gamma; -x) \\
&\qquad = -y(1 - y)K''(\alpha, \beta, \gamma; y) - \{(\alpha + 1)(1 - y) - (\beta + 1)y\}K'(\alpha, \beta, \gamma; y) \quad (y = -x) \\
&\qquad = \gamma(\gamma + \alpha + \beta + 1)K(\alpha, \beta, \gamma; y) \quad (\because (25.33))
\end{aligned}$$

$$= \gamma(\gamma+\alpha+\beta+1)K(\alpha,\beta,\gamma;-x).$$

$\gamma = n \in \mathbb{Z}_+$ のとき K は多項式であった．

固有値を持つのは 4 つのパターンがあるので，場合分けをしていく．特に Stein の対応を見るわけだが，$D = \frac{d}{dx}$ に対して

$$-D^* = x(1+x)\frac{d}{dx} + \{(\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x\} \tag{28.13}$$

であった．

(I) $\alpha > -1$, $\beta < -\alpha-1$ のとき．

このとき $\rho(x) = x^\alpha(1+x)^\beta$ は $x \to \infty$ のとき order は $x^{\alpha+\beta}$ である．$\gamma = n \in \mathbb{Z}_+$ のとき，K^2 は x^{2n} の order で $2n+\alpha+\beta < -1$ であれば L^2 可積分性が成立する．これは即ち

$$n < \frac{-\alpha-\beta-1}{2}$$

であり，これが (28.3) で出てきた条件である，固有値は $n(n+\alpha+\beta+1)$ である．

Stein の対応を見て行こう．

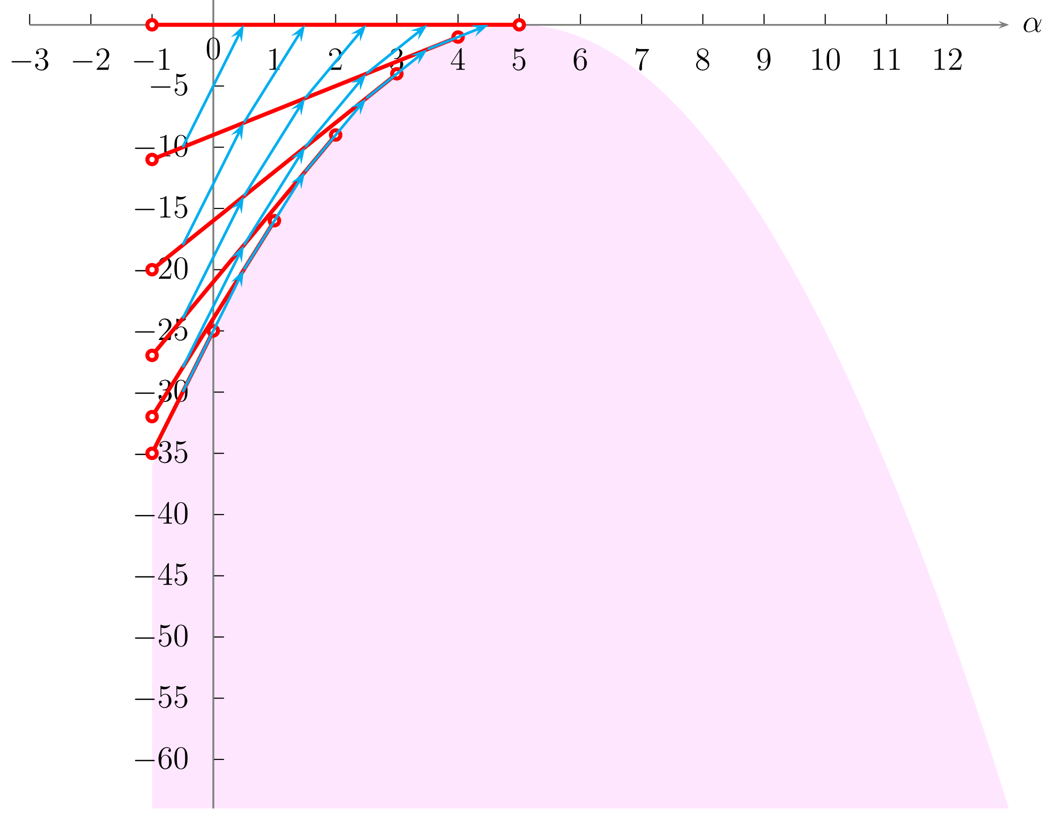
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[K(\alpha,\beta,n;-x)] &= -K'((\alpha,\beta,n;-x)\\ &= n(n+\alpha+\beta+1)K((\alpha+1,\beta+1,n-1;-x). \quad (\because (25.38))\end{aligned}$$

これに $-D^*$ を作用させると

$$\begin{aligned}&-D^*[K(\alpha+1,\beta+1,n-1;-x)]\\ &\quad= x(1+x)\frac{d}{dx}[K(\alpha+1,\beta+1,n-1;-x)]\\ &\qquad+\{(\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x\}K(\alpha+1,\beta+1,n-1;-x)\\ &\quad= -x(1+x)K'(\alpha+1,\beta+1,n-1;-x)\\ &\qquad+\{(\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x\}K(\alpha+1,\beta+1,n-1;-x)\\ &\quad= y(1-y)K'(\alpha+1,\beta+1,n-1;y)\\ &\qquad+\{(\alpha+1)(1-y)-(\beta+1)y\}K(\alpha+1,\beta+1,n-1;y) \quad (y=-x)\\ &\quad= K(\alpha,\beta,n;y) \quad (\because\ (25.41))\\ &\quad= K(\alpha,\beta,n;-x).\end{aligned}$$

これで元に戻った．

$$\mathfrak{G} = x(1+x)\frac{d^2}{dx^2} + ((\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)x)\frac{d}{dx}, \qquad \beta = \alpha - 11$$



Fisher-Pareto のスペクトル

(II) $\alpha > -1$, $\beta > \alpha + 1$ のとき．

この場合は $(1+x)^{-\beta}K(\alpha, -\beta, n; -x)$ が固有関数になる．微分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[(1+x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,n;-x)] \\
&\quad = -\beta(1+x)^{-\beta-1}K(\alpha,-\beta,n;-x) - (1+x)^{-\beta}K'(\alpha,-\beta,n;-x) \\
&\quad = -(1+x)^{-\beta-1}\{\beta K(\alpha,-\beta,n;-x) + (1+x)K'(\alpha,-\beta,n;-x)\} \\
&\quad = -(1+x)^{-\beta-1}\{\beta K(\alpha,-\beta,n;y) + (1-y)K'(\alpha,-\beta,n;y)\} \quad (y=-x) \\
&\quad = -(1+x)^{-\beta-1}\{(1-y)K'(\alpha,-\beta,n;y) - (-\beta)K(\alpha,-\beta,n;y)\} \\
&\quad = -(1+x)^{-\beta-1}\{-(\alpha+n+1)(-\beta+n)\}K(\alpha+1,-\beta-1,n;y) \quad (\because\ (25.40)) \\
&\quad = (n+\alpha+1)(n-\beta)(1+x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x)
\end{aligned}$$

となり，再び固有関数が得られた．共役に関しては

$$\begin{aligned}
&-D^*[(1+x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x)] \\
&\quad = x(1+x)\frac{d}{dx}[(1+x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \{(\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x\}(1+x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x) \\
&= x(1+x)(-\beta-1)(1+x)^{-\beta-2}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x) \\
&\quad - x(1+x)(1+x)^{-\beta-1}K'(\alpha+1,-\beta-1,n;-x) \\
&\quad + (\alpha+1)(1+x)^{-\beta}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x) \\
&\quad + (\beta+1)x(1+x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x) \\
&= -(\beta+1)x(1+x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x) - (1+x)^{-\beta}xK'(\alpha+1,-\beta-1,n;-x) \\
&\quad + (\alpha+1)(1+x)^{-\beta}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x) \\
&\quad + (\beta+1)x(1+x)^{-\beta-1}K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x) \\
&= (1+x)^{-\beta}\{-xK'(\alpha+1,-\beta-1,n;-x)+(\alpha+1)K(\alpha+1,-\beta-1,n;-x)\} \\
&= (1+x)^{-\beta}\{yK'(\alpha+1,-\beta-1,n;y)+(\alpha+1)K(\alpha+1,-\beta-1,n;y)\} \quad (y=-x) \\
&= (1+x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,n;y) \quad (\because\ (25.39)) \\
&= (1+x)^{-\beta}K(\alpha,-\beta,n;-x)
\end{aligned}
$$

となって，元に戻った．

(III) $\alpha<0,\ \beta<\alpha-1$ のとき．

この場合は $x^{-\alpha}K(-\alpha,\beta,n-1;-x)$ が固有関数になる．微分すると

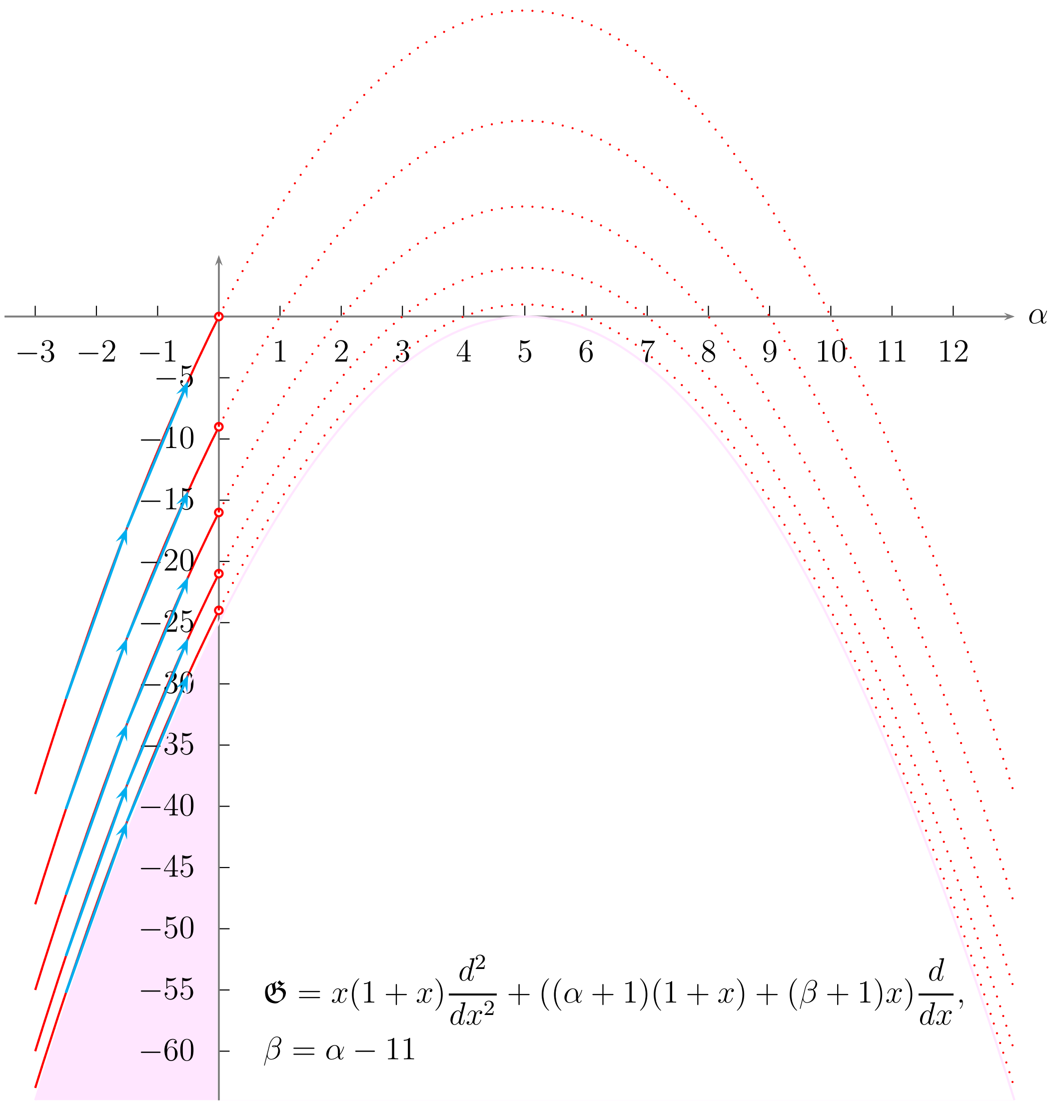
$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[x^{-\alpha}K(-\alpha,\beta,n-1;-x)] \\
&\qquad = -\alpha x^{-\alpha-1}K(-\alpha,\beta,n-1;-x) - x^{-\alpha}K'(\alpha,-\beta,n-1;-x) \\
&\qquad = x^{-\alpha-1}\{-\alpha K(-\alpha,\beta,n-1;-x) - xK'(\alpha,-\beta,n-1;-x)\} \\
&\qquad = x^{-\alpha-1}\{-\alpha K(-\alpha,\beta,n-1;y) + yK'(\alpha,-\beta,n-1;y)\} \quad (y=-x) \\
&\qquad = x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;y) \quad (\because\ (25.39)) \\
&\qquad = x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x)
\end{aligned}
$$

となり，再び固有関数が得られた．共役に関しては

$$
\begin{aligned}
&-D^*[x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x)] \\
&\quad = x(1+x)\frac{d}{dx}[x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x)] \\
&\qquad + \{(\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)x\}x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x) \\
&\quad = x(1+x)(-\alpha-1)x^{-\alpha-2}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x) \\
&\qquad - x(1+x)x^{-\alpha-1}K'(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x) \\
&\qquad + (\alpha+1)(1+x)x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x) \\
&\qquad + (\beta+1)x^{-\alpha}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x) \\
&\quad = -(\alpha+1)(1+x)x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x) \\
&\qquad - (1+x)x^{-\alpha}K'(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x) \\
&\qquad + (\alpha+1)(1+x)x^{-\alpha-1}K(-\alpha-1,\beta+1,n-1;-x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (\beta+1)x^{-\alpha}K(-\alpha-1, \beta+1, n-1; -x) \\
&= x^{-\alpha}\{-(1+x)K'(-\alpha-1, \beta+1, n-1; -x) + (\beta+1)K(-\alpha-1, \beta+1, n-1; -x)\} \\
&= -x^{-\alpha}\{(1-y)K'(-\alpha-1, \beta+1, n-1; y) \\
&\quad - (\beta+1)K(-\alpha-1, \beta+1, n-1; y)\} \quad (y = -x) \\
&= -x^{-\alpha}\{-(-\alpha-1+n-1+1)(\beta+1+n-1)\}K(-\alpha, \beta, n-1; y) \quad (\because\ (25.40)) \\
&= (n-\alpha-1)(n+\beta)x^{-\alpha}K(-\alpha, \beta, n-1; -x)
\end{aligned}
$$

となって，元に戻った．



Fisher-Pareto のスペクトル

(IV) $\alpha < 0$, $\beta > -\alpha + 1$ のとき．

この場合は $x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}K(-\alpha, -\beta, n-1; -x)$ が固有関数になる．微分すると

$$\frac{d}{dx}[x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}K(-\alpha, -\beta, n-1; -x)]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\alpha x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta}K(-\alpha,-\beta,n-1;-x) - \beta x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha,-\beta,n-1;-x) \\
&\quad - x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}K'(-\alpha,-\beta,n-1;-x) \\
&= x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}\{-\alpha(1-y)K(-\alpha,-\beta,n-1;y) \\
&\quad - (-\beta)yK(-\alpha,\beta,n-1;-x) + y(1-y)K'(-\alpha,-\beta,n-1;y)\} \\
&= x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;y) \\
&= x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x)
\end{aligned}
$$

となり，再び固有関数が得られた．共役に関しては

$$
\begin{aligned}
&-D^*[x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x)] \\
&\quad = x(1+x)\frac{d}{dx}[x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x)] \\
&\qquad + \{(\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)x\}x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\quad = x(1+x)(-\alpha-1)x^{-\alpha-2}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\qquad + x(1+x)(-\beta-1)x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-2}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\qquad - x(1+x)x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}K'(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\qquad + (\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\qquad + (\beta+1)x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\quad = -(\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\qquad - (\beta+1)x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\qquad - x(1+x)x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}K'(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\qquad + (\alpha+1)x^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\qquad + (\beta+1)x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\quad = -x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}K'(-\alpha-1,-\beta-1,n;-x) \\
&\quad = -x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\{-n(n-\alpha-1-\beta-1+1)\}K(-\alpha,-\beta,n-1;-x) \quad (\because\ (25.38)) \\
&\quad = n(n-\alpha-\beta-1)x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}K(-\alpha,-\beta,n-1;-x)
\end{aligned}
$$

となって，元に戻った．

以上で，すべての場合の Stein の対応が確かめられた．

29. Student 拡散過程

ここでは (III-3) $a = 1 + x^2$, $I = (-\infty, \infty)$ の場合を扱う．生成作用素は

$$
L_{(\alpha,\beta)} = (1+x^2)\frac{d^2}{dx^2} + (2(\alpha+1)x + 2\beta)\frac{d}{dx} \tag{29.1}
$$

の形で考える．第 3節 の設定では $I = (-\infty, \infty)$, $a = 1 + x^2$, $\rho(x) = (1+x^2)^{\alpha}e^{2\beta\arctan x}$ ととったことになる．

$$
\log\rho = \alpha\log(1+x^2) + 2\beta\arctan x
$$

なので

$$(\log\rho)' = \frac{2\alpha x}{1+x^2} + \frac{2\beta}{1+x^2} = \frac{2\alpha x + 2\beta}{1+x^2}$$

となる．(3.8) の計算から

$$\begin{aligned} b &= a' + a(\log\rho)' \\ &= (1+x^2)' + (1+x^2)\frac{2\alpha x + 2\beta}{1+x^2} \\ &= 2x + 2\alpha x + 2\beta \\ &= 2(\alpha+1)x + 2\beta \end{aligned}$$

となり，(29.1) が成り立っていることが分かる．ρ は $\beta = 0$ のとき Student の t-分布の密度関数になるので対応する拡散過程を Student 拡散過程と呼ぶことにする．Hilbert 空間は $L^2((-\infty,\infty);(1+x^2)^\alpha e^{2\beta\arctan x}\,dx)$ で考える．

尺度関数 s は

$$s'(x) = \frac{1}{a(x)\rho(x)} = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2)^\alpha e^{2\beta\arctan x}} = (1+x^2)^{-\alpha-1}e^{-2\beta\arctan x}$$

を満たす．そこで

$$m(x) = \int_0^x (1+u^2)^\alpha e^{2\beta\arctan u}\,du \tag{29.2}$$

$$s(x) = \int_0^x (1+u^2)^{-\alpha-1}e^{-2\beta\arctan u}\,du \tag{29.3}$$

よって m の $x\to\infty$ での漸近挙動は

$$m(x)\begin{cases} \sim \dfrac{e^{\beta\pi}}{2\alpha+1}x^{2\alpha+1}, & \alpha > -\frac{1}{2}, \\ \sim e^{\beta\pi}\log x, & \alpha = -\frac{1}{2}, \\ \to \int_0^\infty (1+u^2)^\alpha e^{2\beta\arctan u}\,du & \alpha < -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{29.4}$$

である．実際 $\alpha < -\frac{1}{2}$ のときは明らかで $\alpha = -\frac{1}{2}$ のときは l'Hospital の定理を使って

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x (1+u^2)^{-1/2}e^{2\beta\arctan u}\,du}{\log x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)^{-1/2}e^{2\beta\arctan x}}{1/x} = e^{\beta\pi}$$

より従う．また $\alpha > -\frac{1}{2}$ のときは

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x (1+u^2)^\alpha e^{2\beta\arctan u}\,du}{x^{2\alpha+1}/(2\alpha+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)^\alpha e^{2\beta\arctan x}}{x^{2\alpha}} = e^{\beta\pi}$$

より分かる．

同様に s に関しては $x\to\infty$ のとき

$$s(x)\begin{cases}\to\int_0^\infty(1+u^2)^{-\alpha-1}e^{-2\beta\arctan u}\,du & \alpha>-\frac{1}{2},\\ \sim e^{-\beta\pi}\log x, & \alpha=-\frac{1}{2},\\ \sim\dfrac{e^{-\beta\pi}}{-2\alpha-1}x^{-2\alpha-1}, & \alpha<-\frac{1}{2}\end{cases}\tag{29.5}$$

となる．

境界の分類

境界 $\infty, -\infty$ ともに non-exit, non-entrance である．同様にできるので ∞ の方だけ見る．

$\alpha>-\frac{1}{2}$ のとき

$$\int_0^\infty s(x)dm(x)\sim\int_0^\infty c(1+x^2)^\alpha e^{2\beta\arctan x}\,dx=\infty.\quad(\because\ 2\alpha>-1)$$

$\alpha=-\frac{1}{2}$ のとき

$$\int_0^\infty s(x)dm(x)\sim\int_0^\infty(\log x)(1+x^2)^{-1/2}e^{2\beta\arctan x}\,dx=\infty.$$

$\alpha<-\frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^\infty s(x)dm(x)&\sim\int_0^\infty\frac{1}{-2\alpha-1}x^{-2\alpha-1}(1+x^2)^\alpha e^{2\beta\arctan x}\,dx\\&\sim\int_0^\infty\frac{1}{-2\alpha-1}x^{-1}e^{2\beta\arctan x}\,dx\\&=\infty.\end{aligned}$$

よってすべての場合で ∞ になる．

纏めると次のようになる．

(29.6)

	$s(\infty)$	$m(\infty)$	$S(\infty)$	$M(\infty)$	boundary ∞
$\alpha>-\frac{1}{2}$	$<\infty$	$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$	non-exit, non-entrance
$\alpha=-\frac{1}{2}$	$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$	$=\infty$	non-exit, non-entrance
$\alpha<-\frac{1}{2}$	$=\infty$	$<\infty$	$=\infty$	$=\infty$	non-exit, non-entrance

また，当然極限円である．

調和関数

次に基本的な調和関数（$L_{(\alpha,\beta)}$ の固有関数）を調べておこう．次のことが成り立つ．

命題 29.1. 次のことが成り立つ．

$$(L_{(\alpha,\beta)}+2\alpha)[(1+x^2)^{-\alpha}e^{-2\beta\arctan x}]=0\tag{29.7}$$

証明 φ を

(29.8) $$\varphi(x) = (1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x}$$

で定義する．log をとって

$$\log \varphi(x) = -\alpha \log(1+x^2) - 2\beta \arctan x$$

微分して

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{-2\alpha x}{1+x^2} - \frac{2\beta}{1+x^2} = \frac{-2\alpha x - 2\beta}{1+x^2}.$$

これから

(29.9) $$(1+x^2)\varphi'(x) = -2(\alpha x + \beta)\varphi(x).$$

両辺を微分して

$$2x\varphi'(x) + (1+x^2)\varphi''(x) = -2\alpha\varphi(x) - 2(\alpha x + \beta)\varphi'(x).$$

整理して

$$(1+x^2)\varphi''(x) + 2x\varphi'(x) + 2(\alpha x + \beta)\varphi'(x) = -2\alpha\varphi(x).$$

左辺は $L_{(\alpha,\beta)}\varphi$ なので，これが求める結果である． □

Stein's pair

さて，Stein's pair を考えると

$$b' = 2(\alpha+1)$$

であるから

(29.10) $$\mathfrak{A}u = au'' + bu' = (1+x^2)u'' + (2(\alpha+1)x + 2\beta)u',$$

(29.11) $$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{A}}u &= au'' + (a'+b)u' + b'u \\ &= (1+x^2)u'' + (2(\alpha+2)x + 2\beta)u' + 2(\alpha+1)u.\end{aligned}$$

$\hat{\mathfrak{A}}$ の 1 階の部分は α の代わりに $\alpha+1$ を代入した形になっている．即ち

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= L_{(\alpha,\beta)}, \\ \hat{\mathfrak{A}} &= L_{(\alpha+1,\beta)} + 2(\alpha+1)\end{aligned}$$

である．$D = \frac{d}{dx}\colon L^2((-\infty,\infty);(1+x^2)^{\alpha}e^{2\beta\arctan x}\,dx) \to L^2((-\infty,\infty);(1+x^2)^{\alpha}e^{2\beta\arctan x}\,dx)$ としたとき

(29.12) $$-D^*\theta = a\theta' + b\theta = (1+x^2)\theta' + (2(\alpha+1)x + 2\beta)\theta$$

である．第 7節 で述べたことは，$L_{(\alpha,\beta)}$ と $L_{(\alpha+1,\beta)} + 2(\alpha+1)$ は 0 以外では同じスペクトルを持ち，固有関数の対応は微分で与えられる，ということであった．以下このことを具体的に，固有値，固有関数を見ながら見ていこう．作用素 $L_{(\alpha,\beta)}$ は次をみたすことを注意しておこう．

(29.13) $$L_{(\alpha,\beta)}(fg) = (L_{(\alpha,\beta)}f)g + fL_{(\alpha,\beta)}g + 2(1+x^2)f'g'.$$

Schrödinger 作用素との対応

第 6節で述べた Schrödinger 作用素との対応は，今の場合は次のようになる．まず，変換 $R\colon (-\infty,\infty) \to (\infty,\infty)$ が $R'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ から

$$y = R(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}du = \log(x+\sqrt{1+x^2}) = \sinh^{-1} x \tag{29.14}$$

実際微分して

$$\begin{aligned} R'(x) &= (\log(x+\sqrt{1+x^2}))' \\ &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

が確かめられる．$y = R(x)$ を逆に解いて

$$\begin{aligned} x+\sqrt{1+x^2} &= e^y \\ \sqrt{1+x^2} &= e^y - x \\ 1+x^2 &= e^{2y} - 2xe^y + x^2 \\ 2xe^y &= e^{2y} - 1 \end{aligned}$$

よって

$$x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sinh y.$$

これから

$$\sqrt{1+x^2} = \cosh y.$$

も得られる．

次に (6.8) のように $\phi(y)^2 = \rho(x)\sqrt{a(x)}$ で変換しよう．即ち

$$\phi(y) = (1+x^2)^{(\alpha+1)/2} e^{\beta \arctan x}.$$

対応する生成作用素は (6.10) で与えられるから

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{A}}u &= u''(y) + \frac{2b(x)-a'(x)}{2\sqrt{a(x)}}u'(y) \\ &= u''(y) + \frac{4(\alpha+1)x+4\beta-2x}{2\sqrt{1+x^2}}u'(y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= u''(y) + \frac{(2\alpha+1)x + 2\beta}{\sqrt{1+x^2}} u'(y) \\
&= u''(y) + \Big\{(2\alpha+1)\frac{\sinh y}{\cosh y} + 2\beta\frac{1}{\sinh y}\Big\} u'(y)
\end{aligned}
$$

となる．

さらに Schrödinger 作用素との対応は (6.13) から

$$
\begin{aligned}
V(y) &= \frac{1}{2}b'(x) - \frac{1}{4}a''(x) + \frac{(2b(x)-a'(x))(2b(x)-3a'(x))}{16a(x)} \\
&= \frac{1}{2}2(\alpha+1) - \frac{1}{4}2 + \frac{(4(\alpha+1)x+4\beta-2x)(4(\alpha+1)x+4\beta-6x)}{16(1+x^2)} \\
&= \alpha + \frac{1}{2} + \frac{((2\alpha+2-1)x+2\beta)((2\alpha+2-3)x+2\beta)}{4(1+x^2)} \\
&= \alpha + \frac{1}{2} + \frac{((2\alpha+1)x+2\beta)((2\alpha-1)x+2\beta)}{4(1+x^2)} \\
&= \alpha + \frac{1}{2} + \frac{((4\alpha^2-1)x^2+8\alpha\beta x+4\beta^2)}{4(1+x^2)} \\
&= \alpha + \frac{1}{2} + \frac{((4\alpha^2-1)(1+x^2)+8\alpha\beta x-(4\alpha^2-1)+4\beta^2)}{4(1+x^2)} \\
&= \alpha + \frac{1}{2} + \alpha^2 - \frac{1}{4} + \frac{2\alpha\beta x}{1+x^2} + \frac{4\beta^2-4\alpha^2+1}{4(1+x^2)} \\
&= (\alpha+\frac{1}{2})^2 + \frac{2\alpha\beta x}{1+x^2} + \frac{4\beta^2-4\alpha^2+1}{4(1+x^2)} \\
&= (\alpha+\frac{1}{2})^2 + \frac{2\alpha\beta\sinh y}{\cosh^2 y} + \frac{4\beta^2-4\alpha^2+1}{4\cosh^2 y}.
\end{aligned}
$$

このポテンシャルは Grosche [9] p. 251 の Hyperbolic Barrier Potential と呼ばれているものである．

30. Student 拡散過程のスペクトル

さていよいよスペクトルを求めて行こう．

$\alpha < -\frac{1}{2}$ のとき

Stein's pair の考え方から $L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは $L_{(\alpha+1,\beta)}+2(\alpha+1)$ と同じであった．但し，固有値 0 については何もわからない．ただ $L_{(\alpha+1,\beta)}f=0$ の解は 1 か s であるので，可能性があるのは 1 のみで，これが L^2 になるのは $\alpha<-\frac{1}{2}$ のとき，かつそのときに限る．従ってこれは個別に考えればよい．

このときスペクトルは次で与えられる．

定理 30.1. $L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは，本質的スペクトルが

$$
\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{(\alpha,\beta)}) = \Big(-\infty, -(\alpha+\frac{1}{2})^2\Big] \tag{30.1}
$$

で，点スペクトルは $\alpha < -\frac{1}{2}$ のとき

$$\lambda_n(\alpha) = n(n+2\alpha+1), \quad 0 \le n < -\alpha - \frac{1}{2} \tag{30.2}$$

で与えられ，$\alpha > \frac{1}{2}$ のとき

$$\xi_n(\alpha) = n(n-2\alpha-1), \quad 1 \le n < \alpha + \frac{1}{2} \tag{30.3}$$

で与えられる．$-\frac{1}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2}$ のときは点スペクトルは存在しない．

証明 $L_{(\alpha,\beta)}$ は Schrödinger 作用素 $\triangle - V$ とユニタリー同値であった．ここでポテンシャル V は

$$V(y) = (\alpha+\frac{1}{2})^2 + \frac{2\alpha\beta\sinh y}{\cosh^2 y} + \frac{4\beta^2-4\alpha^2+1}{4\cosh^2 y} \tag{30.4}$$

で与えられる．

$$\lim_{|y|\to\infty} V(y) = (\alpha+\frac{1}{2})^2$$

なので $\triangle - V$ は本質的スペクトル

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\triangle - V) = \Big(-\infty, -(\alpha+\frac{1}{2})^2\Big]$$

を持つ．V は $(\alpha+\frac{1}{2})^2$ より小さな値を取りうるから $\triangle - V$ は $-(\alpha+\frac{1}{2})^2$ より大きな点スペクトルを持つ可能性がある．それを見極めていこう．$\alpha = -\frac{1}{2}$ のとき $\sigma_{\mathrm{ess}}(\triangle - V) = (-\infty, 0]$ でもともと $L_{(-1/2,\beta)}$ は非正であったから，他に点スペクトルはない．また $L_{(1/2,\beta)} + 2(-\frac{1}{2}+1) = L_{(1/2,\beta)} + 1$ は $L_{(-1/2,\beta)}$ と 0 以外は同じスペクトルを持つ．従って $\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{(1/2,\beta)}) = (-\infty, -1]$ が分かる．Schrödinger 作用素の方で見ると，$\alpha = -\frac{1}{2}$ のときに

$$\int_{\mathbb{R}} \{f'(x)^2 + f(x)^2 V(x)\}\, dx \ge 0$$

が成り立ち，$\alpha = \frac{1}{2}$ のときに

$$\int_{\mathbb{R}} \{f'(y)^2 + f(y)^2 V(y)\}\, dy \ge \int_{\mathbb{R}} f(y)^2\, dy$$

が成り立つ．f は台がコンパクトな C^1-級の関数である．V の具体的な形を考慮すると

$$F(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \Big\{ f'(y)^2 + f(y)^2 \Big(\frac{2\alpha\beta\sinh y}{\cosh^2 y} + \frac{4\beta^2-4\alpha^2+1}{4\cosh^2 y} \Big) \Big\}\, dy$$

とおくと $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ で $F(\alpha) \ge 0$ が成立している．F を次のように考えると

$$F(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f'(y)^2\, dy + \alpha \int_{\mathbb{R}} f(y)^2 \frac{2\alpha\beta\sinh y}{\cosh^2 y}\, dy + \int_{\mathbb{R}} f(y)^2 \frac{4\beta^2+1}{4\cosh^2 y}\, dy$$

$$- 4\alpha^2 \int_{\mathbb{R}} f(y)^2 \frac{1}{4\cosh^2 y}\, dy$$

なので，F は上に凸の二次関数である．よって凸性から $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ に対し $F(\alpha) \geq 0$ が成立している．即ち

$$\int_{\mathbb{R}} \{f'(x)^2 + f(x)^2 V(x)\}\, dx \geq (\alpha + \frac{1}{2})^2 \int_{\mathbb{R}} f(x)^2\, dx$$

が成立していることになる．これは $\triangle - V$ が $-(\alpha + \frac{1}{2})^2$ より大きなところにスペクトルを持たないということを意味する．従って $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ では $\triangle - V$ は本質的スペクトルのみで $\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{(\alpha,\beta)}) = \left(-\infty, -(\alpha+\frac{1}{2})^2\right]$ が成り立つ．

ここから，Stein's pair を使って $\alpha < -\frac{1}{2}$ に対してスペクトルの情報が得られる．$L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは $L_{(\alpha+1,\beta)} + 2(\alpha+1)$ と 0 を除いて同じであった．本質的スペクトルに関しては $\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{(\alpha+1,\beta)}) = \left(-\infty, -(\alpha+\frac{1}{2})^2\right]$ だとすると

$$-(\alpha+1+\frac{1}{2})^2 + 2(\alpha+1) = -(\alpha+\frac{1}{2})^2 - 2(\alpha+\frac{1}{2}) - 1 + 2(\alpha+1) = -(\alpha+\frac{1}{2})^2$$

となって，$\sigma_{\mathrm{ess}}(L_{(\alpha,\beta)}) = \left(-\infty, -(\alpha+\frac{1}{2})^2\right]$ が成り立つことが分かる．

点スペクトルに関しては

$$\begin{aligned}
\lambda_{n-1}(\alpha+1) + 2(\alpha+1) &= (n-1)(n-1+2\alpha+2+1) + 2(\alpha+1) \\
&= (n-1)(n+2\alpha+1+1) + 2(\alpha+1) \\
&= n(n+2\alpha+1) + n - n - 2\alpha - 1 - l + 2(\alpha+1) \\
&= n(n+2\alpha+1) \\
&= \lambda_n(\alpha)
\end{aligned}$$

となって，$\alpha+1$ のときの点スペクトルから α のときの点スペクトルの情報が得られる．n の範囲も

$$n - 1 < -(\alpha+1) - \frac{1}{2} = -\alpha - \frac{1}{2} - 1$$

となって $n < -\alpha - \frac{1}{2}$ と同じである．これで $\alpha \leq \frac{1}{2}$ の場合はスペクトルが分かった．

さて，(29.7) から $L_{(\alpha,\beta)}[(1+x^2)^{-\alpha}e^{-2\beta\arctan x}] = -2\alpha(1+x^2)^{-\alpha}e^{-2\beta\arctan x}$ であった．$\varphi(x) = (1+x^2)^{-\alpha}e^{-2\beta\arctan x}$ とおくと (29.9) から $(1+x^2)\varphi'(x) = -2(\alpha x+\beta)\varphi$ である．

$$\begin{aligned}
L_{(\alpha,\beta)}(\varphi f) &= (L_{(\alpha,\beta)}\varphi)f + \varphi L_{(\alpha,\beta)}f + 2(1+x^2)\varphi' f' \\
&= -2\alpha\varphi f + \varphi L_{(\alpha,\beta)} f - 4(\alpha x+\beta)\varphi f' \\
&= -2\alpha\varphi f + \varphi\{(1+x^2)f'' + (2(\alpha+1)x + 2\beta)f')\} - 2\varphi(\alpha x+\beta)f' \\
&= -2\alpha\varphi f + \varphi\{(1+x^2)f'' + (2(\alpha+1)x + 2\beta - 4(\alpha x+\beta)f')\} \\
&= -2\alpha\varphi f + \varphi\{(1+x^2)f'' + (2(-\alpha+1)x - 2\beta)f')\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\alpha\varphi f + \varphi L_{-\alpha,-\beta} f\} \\
&= \varphi(L_{(-\alpha,-\beta)} - 2\alpha) f.
\end{aligned}
$$

また $J\colon L^2(\mathbb{R}; (1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x}\, dx) \to L^2(\mathbb{R}; (1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x}\, dx)$ を

$$
Jf = \varphi f
$$

で定めると

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} (Jf)^2 (1+x^2)^{\alpha} e^{2\beta \arctan x}\, dx\, dx = \int_{\mathbb{R}} f^2 (1+x^2)^{-2\alpha} e^{-4\beta \arctan x} (1+x^2)^{\alpha} e^{2\beta \arctan x}\, dx \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} f^2 (1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x}\, dx
\end{aligned}
$$

だから J はユニタリー作用素となり次の図式が可換になる．

$$
\begin{array}{ccc}
L^2(\mathbb{R}; (1+x^2)^{\alpha} e^{2\beta \arctan x}\, dx) & \xrightarrow{L_{(\alpha,\beta)}} & L^2(\mathbb{R}; (1+x^2)^{\alpha} e^{2\beta \arctan x}\, dx) \\
{\scriptstyle J}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle J} \\
L^2(\mathbb{R}; (1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x}\, dx) & \xrightarrow{L_{(-\alpha,-\beta)}-2\alpha} & L^2(\mathbb{R}; (1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x}\, dx)
\end{array} \tag{30.5}
$$

これから $L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは $L_{(-\alpha,-\beta)} - 2\alpha$ のスペクトルと同じになる．よって

$$
\begin{aligned}
\xi_n(\alpha,\beta) &= \lambda_{n-1}(-\alpha,-\beta) - 2\alpha \\
&= (n-1)(n-1-2\alpha+1) - 2\alpha \\
&= (n-1)(n-2\alpha) - 2\alpha \\
&= n(n-2\alpha) - n + 2\alpha - 2\alpha \\
&= n(n-2\alpha) - n \\
&= n(n-2\alpha-1)
\end{aligned}
$$

となり (30.4) が得られる．n の範囲も

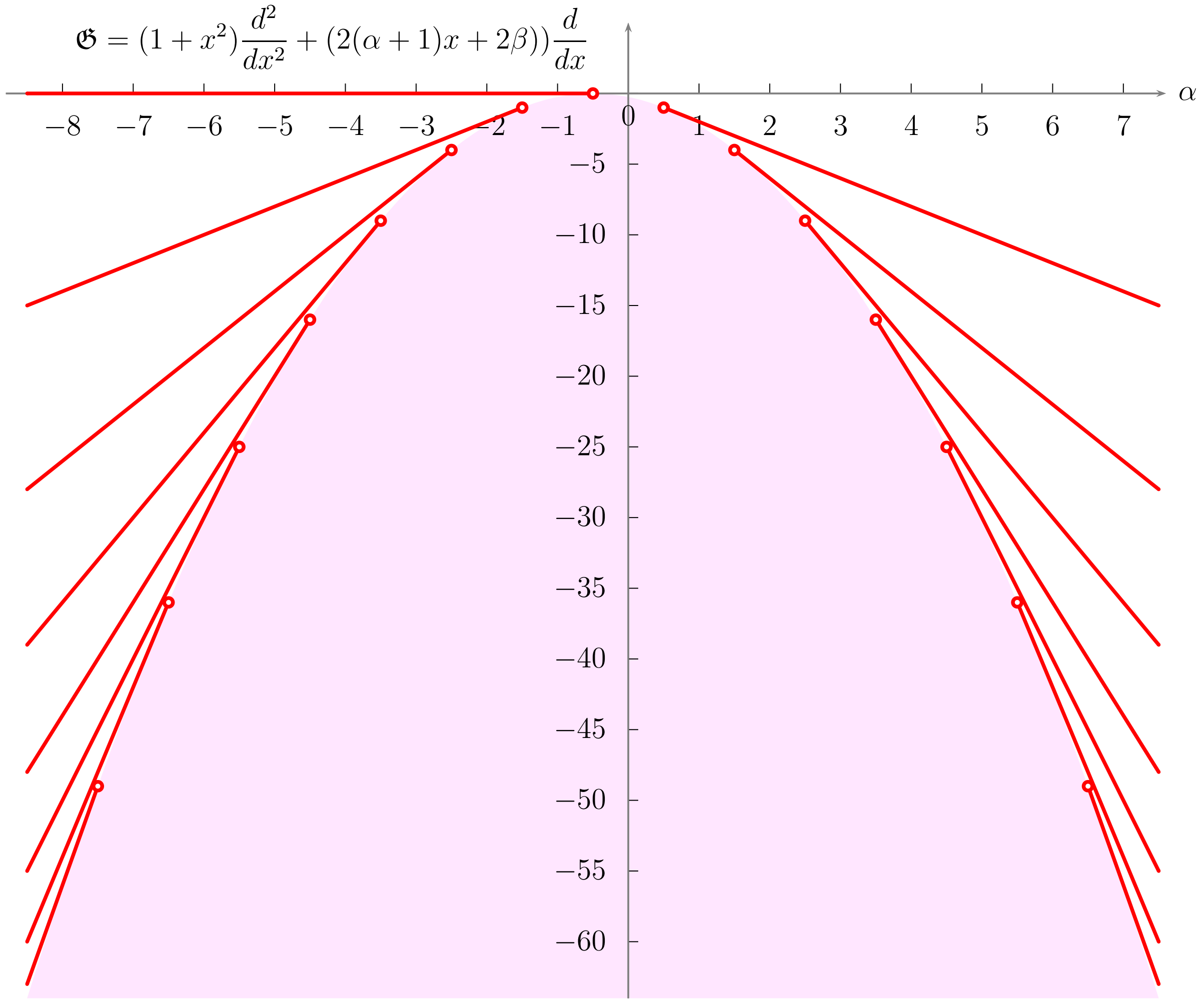
$$
n-1 < -(-\alpha) - \frac{1}{2} = \alpha + \frac{1}{2} - 1
$$

なので (30.4) で与えた範囲と一致する．

　最後に念のため，Stein の対応を確認しておこう．$L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルと $L_{(\alpha+1,\beta)} + 2(\alpha+1)$ が同じことを見る．

$$
\begin{aligned}
\xi_{n+1}(\alpha+1,\beta) + 2(\alpha+1) &= (n+1)(n+1-2\alpha-2-1) + 2(\alpha+1) \\
&= (n+1)(n-2\alpha-1-1) + 2(\alpha+1) \\
&= n(n-2\alpha-1) + n - 2\alpha - 1 - n - 1 + 2(\alpha+1) \\
&= n(n-2\alpha-1) \\
&= \xi_n(\alpha,\beta).
\end{aligned}
$$

□



固有関数と Stein の対応

固有関数について考えてみよう．固有関数は (25.29) で定義した関数 K で表される．ただし，今度は複素数を変数として考える．またパラメーターも複素数まで拡張したもので考える．もう一度かくと

$$K(x)=K(\alpha,\beta,\gamma;x)=F(-\gamma,\alpha+\beta+\gamma+1;\alpha+1;x) \tag{30.6}$$

で $F=F_1^2$ は超幾何関数である．関数 $K(\eta,\overline{\eta},\gamma;z)$ を考える．η と z は複素数である．γ は実数にしておく．$K=K(\eta,\overline{\eta},\gamma;z)$ は次の微分方程式を満たしている．K のパラメーターは $K(\eta,\overline{\eta},\gamma;z)$ のときは省略することがある．

$$z(1-z)K''+\{(\eta+1)(1-z)-(\overline{\eta}+1)z\}K'=-\gamma(\gamma+\eta+\overline{\eta}+1)K \tag{30.7}$$

ここで

$$z=\frac{1-ix}{2} \tag{30.8}$$

とおいて，次の関数を考える．さて，x を実変数として次の関数を考える．

$$x \mapsto K\Big(\eta, \overline{\eta}, \gamma; \frac{1-ix}{2}\Big). \tag{30.9}$$

後で使うので，この関数の性質をまとめておく．

命題 30.2. $z = \frac{1-ix}{2}$, $\eta = \alpha + i\beta$ とするとき，$K(z) = K(\eta, \overline{\eta}, \gamma; z)$ として次のことが成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\Big[K\Big(\eta, \overline{\eta}, \gamma; \frac{1-ix}{2}\Big)\Big] = \frac{i}{2}\gamma(\gamma+2\alpha+1)K\Big(\eta+1, \overline{\eta}+1, \gamma-1; \frac{1-ix}{2}\Big). \tag{30.10}$$

$$\begin{aligned}\Big((1+x^2)\frac{d}{dx} + (2\alpha x + 2\beta)\Big)K\Big(\eta, \overline{\eta}, \gamma; \frac{1-ix}{2}\Big)&\\ = -2iK\Big(\eta-1, \overline{\eta}-1, \gamma+1; \frac{1-ix}{2}\Big)&\end{aligned} \tag{30.11}$$

$$\Big((1+x^2)\frac{d^2}{dx^2} + (2(\alpha+1)x + 2\beta)\frac{d}{dx}\Big)K\Big(\frac{1-ix}{2}\Big) = \gamma(\gamma+2\alpha+1)K\Big(\frac{1-ix}{2}\Big). \tag{30.12}$$

証明 $z = \frac{1-ix}{2}$ だから

$$1 - z = 1 - \frac{1-ix}{2} = \frac{1+ix}{2} = \overline{z}$$

が成り立つ．さらに

$$z(1-z) = z\overline{z} = |z|^2 = \frac{1+x^2}{4}. \tag{30.13}$$

また

$$\eta(1-z) - \overline{\eta}z = \eta\overline{z} - \overline{\eta}z$$

は純虚数になる．実際 $\eta = \alpha + i\beta$ として計算すると

$$\begin{aligned}\eta(1-z) - \overline{\eta}z &= (\alpha+i\beta)\frac{1+ix}{2} - (\alpha-i\beta)\frac{1-ix}{2}\\ &= \frac{i}{2}\{(\alpha+i\beta)(x-i) + (\alpha-i\beta)(x+i)\}\\ &= \frac{i}{2}(\alpha x + \beta + i(-al+\beta) + (\alpha x+\beta) + i(\alpha - \beta x))\\ &= \frac{i}{2}(2\alpha x + 2\beta)\\ &= i(\alpha x + \beta).\end{aligned}$$

即ち

$$2\alpha x + 2\beta = -2i\{\eta(1-z) - \overline{\eta}z\} \tag{30.14}$$

が得られる．

x で微分して

$$\frac{d}{dx}\Big[K\Big(\eta,\overline{\eta},\gamma;\frac{1-ix}{2}\Big)\Big] = -\frac{i}{2}K'\Big(\eta,\overline{\eta},\gamma;\frac{1-ix}{2}\Big) = -\frac{i}{2}K'(\eta,\overline{\eta},\gamma;z). \tag{30.15}$$

ここで (25.38) から

$$\begin{aligned} K'(\eta,\overline{\eta},\gamma;z) &= -\gamma(\gamma+\eta+\overline{\eta}+1)K(\eta+1,\overline{\eta}+1,\gamma-1;z) \\ &= -\gamma(\gamma+2\alpha+1)K(\eta+1,\overline{\eta}+1,\gamma-1;z) \end{aligned}$$

なので

$$\frac{d}{dx}\Big[K\Big(\eta,\overline{\eta},\gamma;\frac{1-ix}{2}\Big)\Big] = \frac{i}{2}\gamma(\gamma+2\alpha+1)K\Big(\eta+1,\overline{\eta}+1,\gamma-1;\frac{1-ix}{2}\Big)$$

となって，(30.10) が得られる．さらに

$$\begin{aligned} &\Big((1+x^2)\frac{d}{dx}+(2\alpha x+2\beta)\Big)K\Big(\eta,\overline{\eta},\gamma;\frac{1-ix}{2}\Big) \\ &\quad = (1+x^2)\frac{d}{dx}\Big[K\Big(\eta,\overline{\eta},\gamma;\frac{1-ix}{2}\Big)\Big]+(2\alpha x+2\beta)K\Big(\eta,\overline{\eta},\gamma;\frac{1-ix}{2}\Big) \\ &\quad = 4z(1-z)\Big(-\frac{i}{2}\Big)K'(\eta,\overline{\eta},\gamma;z)-2i(\eta(1-z)-\overline{\eta}z)K(\eta,\overline{\eta},\gamma;z) \\ &\qquad\qquad (\because\ (30.13),\ (30.14)\ \text{と}\ (30.15)) \\ &\quad = -2i\{z(1-z)K'(\eta,\overline{\eta},\gamma;z)+(\eta(1-z)-\overline{\eta}z)K(\eta,\overline{\eta},\gamma;z)\} \\ &\quad = -2iK(\eta-1,\overline{\eta}-1,\gamma+1;z) \quad (\because\ (25.41)) \\ &\quad = -2iK\Big(\eta-1,\overline{\eta}-1,\gamma+1;\frac{1-ix}{2}\Big). \end{aligned}$$

ここで η に $\eta+1$ を代入し，γ に $\gamma-1$ を代入すると

$$\begin{aligned} &\Big((1+x^2)\frac{d}{dx}+(2(\alpha+1)x+2\beta)\Big)K\Big(\eta+1,\overline{\eta}+1,\gamma-1;\frac{1-ix}{2}\Big) \\ &\quad = -2iK\Big(\eta,\overline{\eta},\gamma;\frac{1-ix}{2}\Big). \end{aligned}$$

となる．ここで (30.10) を使うと

$$K\Big(\eta+1,\overline{\eta}+1,\gamma-1;\frac{1-ix}{2}\Big) = \frac{-2i}{\gamma(\gamma+2\alpha+1)}\frac{d}{dx}\Big[K\Big(\eta,\overline{\eta},\gamma;\frac{1-ix}{2}\Big)\Big]$$

であるから

$$\begin{aligned} &\Big((1+x^2)\frac{d}{dx}+(2\alpha x+2\beta)\Big)\frac{-2i}{\gamma(\gamma+2\alpha+1)}\frac{d}{dx}\Big[K\Big(\eta+1,\overline{\eta}+1,\gamma-1;\frac{1-ix}{2}\Big)\Big] \\ &\quad = -2iK\Big(\eta,\overline{\eta},\gamma;\frac{1-ix}{2}\Big) \end{aligned}$$

となり，これは (30.12) を意味する． □

次に，固有関数の具体的な表示を与えよう．

(I) $\alpha < -\frac{1}{2}$ のとき

$\gamma = n$ のとき，$K(\frac{1-ix}{2})$ は多項式で，固有関数の可能性がある．$\gamma = n \in \mathbb{Z}_+$ のとき $K(\frac{1-ix}{2})$ は n 次の多項式である．$\alpha < -\frac{1}{2}$ のとき，$2n < -2\alpha - 1$ であれば，可積分性が成り立つので $K\Big(\dfrac{1-ix}{2}\Big) = K\Big(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, n; \dfrac{1-ix}{2}\Big)$ は固有関数である．但し実数値にするために $(-2i)^n K(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, n; \frac{1-ix}{2})$ の形で考える．これが実数値関数であることは後で示す．

さて，Stein の対応を確認しよう．$z = \frac{1-ix}{2}$, $\eta = \alpha + i\beta$ と表しておく．まず微分したときは

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\Big[(-2i)^n K\Big(\eta, \overline{\eta}, n; \frac{1-ix}{2}\Big)\Big] \\
&\qquad = (-2i)^n \frac{i}{2} n(n+2\alpha+1) K\Big(\eta+1, \overline{\eta}+1, n-1; \frac{1-ix}{2}\Big) \quad (\because\ (30.10)) \\
&\qquad = n(n+2\alpha+1)(-2i)^{n-1} K\Big(\eta+1, \overline{\eta}+1, n-1; \frac{1-ix}{2}\Big)
\end{aligned}$$

となって，同じ形になる．

逆の対応は

$$\begin{aligned}
&-D^*\Big[(-2i)^{n-1} K\Big(\eta+1, \overline{\eta}+1, n-1; \frac{1-ix}{2}\Big)\Big] \\
&\quad = \Big\{(1+x^2)\frac{d}{dx} + (2(\alpha+1)x - 2\beta)\Big\}\Big[(-2i)^{n-1} K\Big(\eta+1, \overline{\eta}+1, n-1; \frac{1-ix}{2}\Big)\Big] \\
&\quad = (-2i)^{n-1}(-2i) K\Big(\eta, \overline{\eta}, n; \frac{1-ix}{2}\Big) \quad (\because\ (30.11)) \\
&\quad = (-2i)^n K\Big(\eta, \overline{\eta}, n; \frac{1-ix}{2}\Big)
\end{aligned}$$

となって元に戻る．

(II) $\alpha > \frac{1}{2}$ のとき

$L_{(\alpha,\beta)}$ のスペクトルは $L_{(-\alpha,-\beta)} - 2\alpha$ と同じスペクトルで，同型対応は $f \mapsto (1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x} f$ で与えられる．$z = \frac{1-ix}{2}$, $\eta = \alpha + i\beta$ と表しておくと，固有関数は

$$(-2i)^{n-1}(1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x} K\Big(-\eta, -\overline{\eta}, n-1; \frac{1-ix}{2}\Big)$$

である．まず，微分してみると

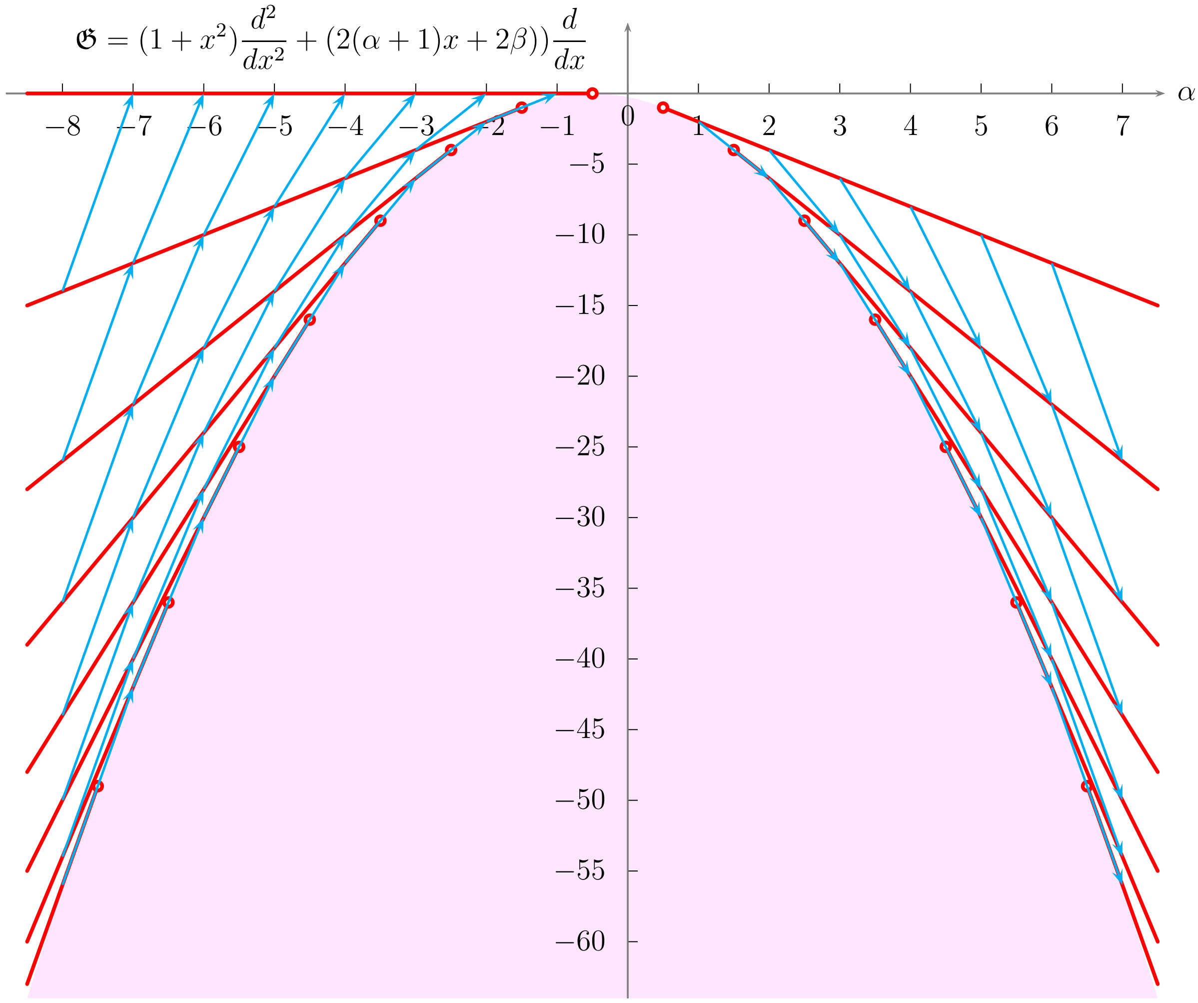
$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\Big[(-2i)^{n-1}(1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x} K\Big(-\eta, -\overline{\eta}, n-1; \frac{1-ix}{2}\Big)\Big] \\
&\quad = (-2i)^{n-1}\Big\{-\alpha(1+x^2)^{-\alpha-1}(2x) e^{-2\beta \arctan x} K\Big(-\eta, -\overline{\eta}, n-1; \frac{1-ix}{2}\Big) \\
&\qquad - 2\beta(1+x^2)^{-\alpha-1} e^{-2\beta \arctan x} K\Big(-\eta, -\overline{\eta}, n-1; \frac{1-ix}{2}\Big) \\
&\qquad + (1+x^2)^{-\alpha} e^{-2\beta \arctan x} \frac{d}{dx} K\Big(-\eta, -\overline{\eta}, n-1; \frac{1-ix}{2}\Big)\Big\} \\
&\quad = (-2i)^{n-1}(1+x)^{-\alpha-1} e^{-2\beta \arctan x}
\end{aligned}$$

$$\times\left((-2\alpha x-2\beta)+(1+x^2)\frac{d}{dx}\right)K\left(-\eta,-\overline{\eta},n-1;\frac{1-ix}{2}\right)$$
$$=(-2i)^{n-1}(1+x^2)^{-\alpha-1}e^{-2\beta\arctan x}(-2i)K\left(-\eta-1,-\overline{\eta}-1,n;\frac{1-ix}{2}\right)\quad(\because\ (30.11))$$
$$=(-2i)^{n}(1+x^2)^{-\alpha-1}e^{-2\beta\arctan x}K\left(-\eta-1,-\overline{\eta}-1,n;\frac{1-ix}{2}\right)$$

となって，同じ形になる．最後に逆の対応を見ると

$$-D^*\left[(-2i)^{n}(1+x^2)^{-\alpha-1}e^{-2\beta\arctan x}K\left(-\eta-1,-\overline{\eta}-1,n;\frac{1-ix}{2}\right)\right]$$
$$=\left((1+x^2)\frac{d}{dx}+(2(\alpha+1)x+2\beta)\right)$$
$$\left[(-2i)^{n}(1+x^2)^{-\alpha-1}e^{-2\beta\arctan x}K\left(-\eta-1,-\overline{\eta}-1,n;\frac{1-ix}{2}\right)\right]$$
$$=(1+x^2)(-2i)^n(-\alpha-1)(1+x^2)^{-\alpha-2}(2x)e^{-2\beta\arctan x}K\left(-\eta-1,-\overline{\eta}-1,n;\frac{1-ix}{2}\right)$$
$$+(1+x^2)(-2i)^n(-2\beta)(1+x^2)^{-\alpha-2}e^{-2\beta\arctan x}K\left(-\eta-1,-\overline{\eta}-1,n;\frac{1-ix}{2}\right)$$
$$+(1+x^2)(-2i)^n(1+x^2)^{-\alpha-1}e^{-2\beta\arctan x}\frac{d}{dx}\left[K\left(-\eta-1,-\overline{\eta}-1,n;\frac{1-ix}{2}\right)\right]$$
$$+(2(\alpha+1)x+2\beta)(1+x^2)^{-\alpha-1}e^{-2\beta\arctan x}K\left(-\eta-1,-\overline{\eta}-1,n;\frac{1-ix}{2}\right)$$
$$=(-2i)^n(1+x^2)^{-\alpha}e^{-2\beta\arctan x}\frac{d}{dx}\left[K\left(-\eta-1,-\overline{\eta}-1,n;\frac{1-ix}{2}\right)\right]$$
$$=(-2i)^n(1+x^2)^{-\alpha}e^{-2\beta\arctan x}\frac{i}{2}n(n-2(\alpha+1)+1)K\left(-\eta,-\overline{\eta},n-1;\frac{1-ix}{2}\right)$$
$$(\because\ (30.10))$$
$$=n(n-2\alpha-1)(-2i)^{n-1}(1+x^2)^{-\alpha}e^{-2\beta\arctan x}K\left(-\eta,-\overline{\eta},n-1;\frac{1-ix}{2}\right).$$

これで元に戻ったことが分かる．



参考文献

[1] R. Beals and R. Wong, "*Special functions*," Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] R. Beals and R. Wong, "*Special functions and orthogonal polynomials*," Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 153, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[3] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch and B. Simon, "*Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*," Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] E. B. Davies, "*Heat kernels and spectral theory*," Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[5] J-D. Deuschel and D. W. Stroock, "*Large deviations*," Academic Press, San Diego, 1989.

[6] H. Dym and H. P. McKean, Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem, Probability and Mathematical Statistics, Vol. 31, Academic Press, New York-London, 1976.

[7] W. Feller, "*An introduction to probability theory and its applications*," Vol. II. Second edition, John Wiley, New York-London-Sydney, 1971.

[8] M. Fukushima, T. Oshima and M. Takeda, "*Dirichlet forms and symmetric Markov processes*," Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.

[9] C. Grosche and F. Steiner, "*Handbook of Feynman path integrals*," Springer Tracts in Modern Physics, 145, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[10] M. Hajmirzaahmad, Jacobi polynomial expansions, *J. Math. Anal. Appl.*, **181** (1994), no. 1, 35–61.

[11] M. Hajmirzaahmad, Laguerre polynomial expansions, *J. Comput. Appl. Math.*, **59** (1995), no. 1, 25–37.

[12] M. Hajmirzaahmad and A. M. Krall, Singular second-order operators: the maximal and minimal operators, and selfadjoint operators in between, *SIAM Rev.*, **34** (1992), no. 4, 614–634.

[13] H. Hochstadt, "*The functions of mathematical physics*," Second edition, Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[14] 犬井 鉄郎, 特殊函数, 岩波書店, 1962.

[15] T. Kato, "*Perturbation theory for linear operators. Second edition,*" Second edition, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[16] A. Kolmogoroff, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, (German) Math. Ann., **104** (1931), no. 1, 415–458.

[17] A. Korzeniowski and D.W. Stroock, An example in the theory of hypercontractive semigroups. Proc. Amer. Math. Soc., **94** (1985), no. 1, 87–90.

[18] 小谷眞一, 俣野博, 微分方程式と固有関数展開, 岩波書店, 東京, 2006.

[19] A. M. Krall, "*Hilbert space, boundary value problems and orthogonal polynomials*," Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 133, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.

[20] N. N. Lebedev, "*Special functions and their applications*," Revised edition, Dover, New York, 1972.

[21] 蓑谷千凰彦, 統計分布ハンドブック, 朝倉書店, 2003.

[22] K. Pearson, Contributions to the mathematical theory of evolution. II. Skew variation in homogeneous material, *Philosophical Transactoins of the Royal society London*, Ser. A **186** (1895), 343-414.

[23] E. S. Pearson, "Karl Pearson's early statistical papers," Cambridge : At the Univ. Press, 1948.

[24] D. Revuz and M. Yor, "*Continuous martingales and Brownian motion*," Third edition, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1999.

[25] I. Shigekawa, L^p contraction semigroups for vector valued functions, *J. Funct. Anal.*, **147** No. 1, (1997), 69–108.

[26] I. Shigekawa, Littlewood-Paley inequality for a diffusion satisfying the logarithmic Sobolev inequality and for the Brownian motion on a Riemannian manifold with boundary, *Osaka J. Math.*, **39** (2002), 897–930.

[27] L. J. Slater, Confluent hypergeometric functions, Cambridge University Press, New York, 1960

[28] L. J. Slater, Generalized hypergeometric functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[29] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations, Oxford, at the Clarendon Press, 1946.

[30] G. N. Watson, "*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*," Cambridge University Press, Cambridge, 1944.

[31] D. Williams, "*Weighing the odds*," Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[32] A. I. Zayed, Handbook of function and generalized function transformations, Mathematical Sciences Reference Series, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.