リスクの数理

重川 一郎[1]

平成28 年2 月24 日

[1]e-mail: `ichiro@math.kyoto-u.ac.jp`, URL: `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/`
2015 年度 京都産業大学 後期講義

目 次

第1章　ランダム・ウォーク

この章では，最も簡単な確率過程としてランダム・ウォークを扱う．但し，確率論の枠組みを使うので，確率空間について概観しておく．

1.　確率空間

確率論を数学的に述べるための，基本的な枠組みである確率空間について述べる．Ω を一般的な集合とする．

可測空間

定義 1.1. Ω の部分集合を要素とする集合族 $\mathscr{F}$ が次の性質をみたすとき **σ-集合体** (σ-field) という：

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathscr{F}$.

(2) $A \in \mathscr{F} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{F}$

(3) $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

集合 Ω に σ-集合体 $\mathscr{F}$ を付加した空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ を**可測空間**という．一般に位相空間 S に対して開集合をすべて含む最小の σ-集合体が一意に定まる．これを **Borel σ-集合体** (位相的 σ-集合体と呼ばれることも多い) とよび，以下 $\mathscr{B}(S)$ と記す．$(S, \mathscr{B}(S))$ は可測空間となる．S が位相空間の場合は特に断らなければ，σ-集合体として $\mathscr{B}(S)$ をとる．$S = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$ などが典型的なものである．

命題 1.2. $\mathscr{F}$ を σ-集合体とするとき，次のことが成り立つ：

(1) $A, B \in \mathscr{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathscr{F}$.

(2) $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

証明　(1)： $A \setminus B = A \cap B^c$ より明らか.

(2)： 条件から

$$A_n^c \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathscr{F} \Longrightarrow \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big)^c \in \mathscr{F}$$

ここで de Morgan の法則を使って

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

より，求める結果を得る． □

確率空間

基本的に σ-集合体では加算個の演算が自由にできる．確率論では可測空間に，確率 P を付加したものを考える．

定義 1.3. 可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の測度 P で $P(\Omega) = 1$ をみたすものを**確率測度** (probability measure) という．すなわち次の条件がみたされる：

(1) $P\colon \mathscr{F} \to [0,1]$, $P(\Omega) = 1$.

(2) $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ が互いに素 $(A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$ であるとき，

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n) \tag{1.1}$$

が成り立つ．

これらを組にした $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を**確率空間** (probability space) という．

Ω を**全事象**，または**標本空間** (sample space) という．Ω の要素 ω を**根元事象** (elementary event) または**標本** (sample) という．$\mathscr{F}$ の要素 A を**事象** (event) といい，その補集合 $A^c = \Omega \setminus A$ を余事象 (complementary event) という．$A \cap B$ を積事象，$A \cup B$ を和事象，$\emptyset$ を空事象と呼ぶ．

例 1.1. サイコロ投げの場合
確率空間として次のものを準備すればよい．

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^{\mathbb{N}} \ni \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots).$$

ω_n は 1, 2, …, 6 のいずれかで，n 回目に出た目を表す．確率は η_1, η_2, …, η_n を与えて

$$P(\omega_1 = \eta_1, \omega_2 = \eta_2, \ldots, \omega_n = \eta_n) = \frac{1}{6^n}$$

と定めればよい．これが実際に σ-加法的に拡張できることは明らかではないが，Kolmogorov の拡張定理と呼ばれる定理により証明できる．

命題 1.4. 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ において次のことが成り立つ：

(1) $A \subseteq B \Longrightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(3) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \le P(B)$.

(4) 任意の $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ に対し $P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$.

(5) $A_n \uparrow A$ (i.e., $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$) のとき，$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

(6) $A_n \downarrow A$ (i.e., $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$) のとき，$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

証明　(1)：$B = A + B \setminus A$ (disjoint union) より明らか.
(2)：$A^c = \Omega \setminus A$ と $P(\Omega) = 1$ から明らか.
(3)：(1) と確率の正値性から明らか.
(4)：$B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ $(n = 2, 3, \ldots)$ とおく．B_i は互いに素で

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad B_i \subseteq A_i.$$

よって，完全加法性から

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

より，求める結果を得る.
(5)：

$$P(A) = P(A_n) + \sum_{k=n}^{\infty} P(A_{k+1} \setminus A_k).$$

収束性から $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_{k+1} \setminus A_k) \to 0$ が成り立つので求める結果を得る.
(6)：de Morgan の法則と (5) を用いればよい.　□

2.　確率変数

確率変数

定義 2.1. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．Ω から $\mathbb{R}$ への写像 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{\omega; X(\omega) \le a\} \in \mathscr{F}$ が成り立つとき，X を**確率変数**と呼ぶ.

定義 2.2. (確率変数の分布)　X を確率変数とするとき，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 $P \circ X^{-1}$ (即ち $(P \circ X^{-1})(B) = P[X^{-1}(B)]$ で定義される $\mathbb{R}$ 上の確率測度）を X の**分布**といい，P^X で表わす.

定義 2.3. 2つの確率変数 X, Y ((必ずしも同一確率空間上で定義されている必要はない) に対し，$P^X = P^Y$ が成り立つとき，X と Y は**同分布をもつ** (同法則である) といい，

$$X \overset{d}{=} Y, \quad \text{あるいは} \quad X \overset{\mathscr{L}}{\approx} Y$$

と表わす.

3.　1次元ランダム・ウォーク

単純ランダム・ウォーク

定義 3.1. 時間 $t \in \mathbb{T}$ をパラメーターとして持つ確率変数の族 (X_t) を**確率過程**という．$\mathbb{T}$ として $[0,\infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\}$ などがよく使われる．$[0,\infty)$ のとき連続時間，$\mathbb{Z}_+$ のとき離散時間という．

以下では $\mathbb{Z}_+$ の場合のみを扱う．この場合は t の代わりに n を用いる．

定義 3.2. X_1, X_2,... を i.i.d. で各分布は

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = -1) = q = 1 - p \tag{3.1}$$

で与えられているベルヌーイ列とする．1 が成功，-1 が失敗を表し，成功の確率が p である．このとき

$$S_n = S_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{3.2}$$

で定まる確率過程 (S_n) を**単純ランダム・ウォーク**という．S_0 を加えるのは，出発点に任意性を持たせるためである．また S_0 は X_1, X_2,... とは独立であるとする．$P(\ |S_0 = x)$ を P_x とかく．即ち P_x は x から出発するランダム・ウォークの確率である．
$p = q = \frac{1}{2}$ のとき，単純ランダム・ウォークは**対称**であるという．

推移確率

命題 3.3. $u_n = P_0(S_n = 0)$ と置くと，n が奇数のときは $u_n = 0$ で n が偶数 $n = 2m$ のときは

$$u_{2m} = \binom{2m}{m} p^m q^m \tag{3.3}$$

である．

証明　0 から出発したランダム・ウォークが $S_n = 0$ となるためには，$X_i = 1$ となる i の個数と，$X_i = -1$ となる i の個数が等しいことが必要十分である．この個数を m とすれば，$n = 2m$ で，この組み合わせは $\binom{2m}{m}$ でそれぞれの確率は 1 となるのが m 個で確率は p^m，-1 となるのが m 個で確率は q^m. これらを掛け合わせて，求める結果を得る． □

$P_0(S_n = k)$ を計算しよう．$X_i = 1$ が m 回，$X_i = -1$ が l 回だとすると $m - l = k$, $m + l = n$ だから $m = \frac{n+k}{2}$, $l = \frac{n-k}{2}$ である．よって

$$P_0(S_n = k) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$$

但し，$\frac{n+k}{2}$ が 0 から n までの整数のときという条件が必要で，それ以外のときは確率は 0 である．

$$p(x,y) = P_x(S_1 = y)$$

を推移確率と呼ぶ．ランダム・ウォークの場合は

$$p(x,y) = \begin{cases} p & y = x+1 \\ q & y = x-1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

である．この推移確率を一般化したものをマルコフ連鎖と呼ぶ．以下の再帰性の問題は，マルコフ連鎖の枠組みで論じることができるが，ランダム・ウォークの場合に限定する．但し，可能な限り一般のマルコフ連鎖の場合にも通用する証明を与える．その方が議論の流れが分かり易いからである．

4.　再帰性，非再帰性

定義 4.1. 単純ランダム・ウォーク S_n に対し

$$P_0(S_n = 0 \text{ となる } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ が無限個存在する}) = 1 \tag{4.1}$$

が成り立つとき**再帰的**，成り立たないとき**非再帰的**と呼ぶ．また確率 $P_0(S_n = 0$ となる $n \geq 1$ が存在する$)$ を**再帰確率**と呼ぶ．出発点をずらせば，0 のとき再帰的であれば，任意の $x \in \mathbb{N}$ に対して $P_x(S_n = x$ となる $n \in \mathbb{Z}_+$ が無限個存在する$) = 1$ が成立する．

(4.1) で無限個存在するという条件が現れたが，これを i.o. (infinitely often) と略記する．従って $S_n = 0$, i.o. とかく．

ここで確率変数 τ_x を

$$\tau_x = \min\{n \geq 1;\, S_n = x\} \tag{4.2}$$

で定める．右辺が空集合のときは $\tau_x = \infty$ とする．これは停止時刻と呼ばれる典型的なものである．再帰確率は $P_0(\tau_0 < \infty)$ に等しいことは明らか.

定理 4.2. 単純ランダム・ウォークの再帰確率に関して次が成立する．

$$P_0(\tau_0 < \infty) = 1 - |p - q|. \tag{4.3}$$

従って対称な場合のみ再帰的である．

証明　事象 A_n を

$$A_n = \{S_n = 0\}$$

で定めると

$$P_0(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P_0(A_n \cap \{\tau = k\}).$$

ところで

$$P_0(A_n \cap \{\tau_0 = k\}) = P_0(\tau_0 = k) P_0(A_{n-k})$$

が成り立つ．従って $u_n = P_0(A_n)$, $f_k = P_0(\tau_0 = k)$ とおくと

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}, \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots$$

が成り立つ．そこで，関数 U, F を次のように定義する．

$$U(s) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n, \qquad F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n.$$

これらの関数は母関数と呼ばれている．$u_0 = 1$, $f_0 = 0$ である．また $|u_n| \le 1$, $|f_n| \le 1$ だから $|s| < 1$ で収束している．よって

$$\begin{aligned}
U(s) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n s^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k} s^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k s^k u_{n-k} s^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_k s^k u_{n-k} s^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k \sum_{n=k}^{\infty} u_{n-k} s^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k \sum_{m=0}^{\infty} u_m s^m \\
&= F(s) U(s).
\end{aligned}$$

これから

$$F(s) = 1 - \frac{1}{U(s)} \tag{4.4}$$

ここで一般2項係数 $\binom{-1/2}{m}$ を用いる．

$$\binom{-1/2}{m} = \frac{(-1/2)(-1/2-1)\ldots(-1/2-m+1)}{m!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2^m(-1)^m m!} \\
&= \frac{(2m)!}{2 \cdot 4 \cdots (2m) \cdot 2^m(-1)^m m!} \\
&= \frac{(2m)!}{2^{2n}(-1)^m (m!)^2} \\
&= \binom{2m}{m} 2^{-2m}(-1)^m.
\end{aligned}
$$

命題 3.3 から

$$
\begin{aligned}
U(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} s^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2m}{m} p^m q^m s^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-1/2}{m} 2^{2m}(-1)^m p^m q^m s^{2m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-1/2}{m} (-4pqs^2) \\
&= (1-4pqs^2)^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

ここで一般 2 項展開

$$
(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} t^n
$$

を使った．さらに (4.4) から

$$
F(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}.
$$

もとの問題に帰って

$$
\begin{aligned}
P_0(\tau_0 < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(\tau = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_k \\
&= \lim_{s \uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} f_k s^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s\uparrow 1} F(s) \\
&= \lim_{s\uparrow 1}(1-\sqrt{1-4pqs^2}) \\
&= (1-\sqrt{1-4pq}) \\
&= 1-\sqrt{(p+q)^2-4pq} \\
&= 1-\sqrt{(p-q)^2} \\
&= 1-\sqrt{(p-q)^2} \\
&= 1-|p-q|.
\end{aligned}
$$

□

上の証明の中に出てきた関数を使うと，対称なランダム・ウォークに対し $E_0[\tau_0]=\infty$ が示せる．ただし E_0 は P_0 に関する積分を表す.

$$E_0[\tau_0]=\sum_{n=1}^{\infty} nf_n = \lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=1}^{\infty} nf_n s^{n-1} = \lim_{s\uparrow 1} F'(s).$$

$p=q=\frac{1}{2}$ のときは $F(s)=1-\sqrt{1-s^2}$ だから

$$F'(s)=\frac{s}{1-s^2}\to\infty \quad \text{as } s\uparrow 1$$

一度原点に戻れば，そこから新たにランダム・ウォークが始まることになるから，対称なランダム・ウォークは無限回原点に帰ってくることになる.

x から y への到達確率を

$$\rho_{xy}=P_x(\tau_y<\infty) \tag{4.5}$$

で定める．対称なランダム・ウォークに対し $\rho_{xy}=1$ を示す．これは任意の点 x から，任意の点 y に確率 1 で到達可能であることを示している.

命題 4.3. $\rho_{xx}=1$, $\rho_{xy}>0$ ならば $\rho_{yx}=1$ が成立する.

証明　まず $\rho_{yx}<1$, $\rho_{xy}>0$ ならば $\rho_{xx}<1$ を示す.

$$K=\min\{n=1,2,\dots ;\ P_x(S_n=y)>0\}$$

と定める．このとき

$$P_x(\tau_x=\infty)\ge P_x(S_K=y)P_y(\tau_x=\infty)$$

右辺は x から出発して K で y に至り，その後 x に帰ることがないことを意味している．K の取りかたから K より前では x を通ることがないので，上の不等式が成り立つ．条件 $\rho_{yx}<1$, $\rho_{xy}>0$ から

$$P_x(S_K=y)P_y(\tau_x=\infty)>0$$

なので $P_x(\tau_x = \infty) > 0$ すなわち $\rho_{xx} < 1$ が従う．

さて，これを使って命題の証明を背理法で行う．$\rho_{yx} < 1$ であれば，$\rho_{xx} < 1$ となり，$\rho_{xx} = 1$ に矛盾する． □

対称なランダム・ウォークを考えると，任意の x, y に対して $\rho_{xx} = 1$, $\rho_{xy} > 0$ が成立するから上の命題から $\rho_{yx} = 1$ が成立する．

5. 破産問題

A と B と二人のプレーヤがいて，初期資産を A は a だけ，B は $N - a$ だけ持っているとする．但し $0 \le a \le N$ とする．この二人がゲームをして，勝てば 1 だけ得て，負ければ 1 を失う（-1 を得ると考える）．A が勝つ確率を p, B が勝つ確率を q とする．A, B どちらかの資産が 0 になればそこでゲームは終わりである．A の立場で見ると，ランダム・ウォークが a から出発して，0 か N に到達すると，そこで停止することと同じである．このようなとき，0 と N は吸収壁であるという．停止時刻 σ_x を

$$\sigma_x = \min\{n = 0, 1, 2, \dots ; S_n = x\} \tag{5.1}$$

で定める．右辺が空集合のときは $\sigma_x = \infty$ とする．これは (4.2) で定めた τ_x と似ているが，σ_x の場合は $n = 0, 1, 2, \dots$ と $n = 0$ の場合が含まれていることに注意しよう．

前節の結果から $0 \le a \le N$ のとき $P_a(\sigma_0 \wedge \sigma_N < \infty) = 1$ が成り立つ．$\wedge$ は min を表す．

定理 5.1. $0 \le a \le N$ のとき次が成立する．

$$P_a(\sigma_N < \sigma_0) = \begin{cases} \dfrac{(q/p)^a - 1}{(q/p)^N - 1}, & p \ne q, \\ a/N, & p = q = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{5.2}$$

証明 a から出発すると確率 p で $a+1$ に移動し，確率 q で $a-1$ に移動する．それ以後は，やはりランダム・ウォークであるから

$$P_a(S_\sigma = N) = pP_{a+1}(S_\sigma = N) + qP_{a-1}(S_\sigma = N)$$

が成り立つ．$v(a) = P_a(S_\sigma = N)$ とおけば

$$v(a) = pv(a+1) + qv(a-1)$$

が成立する．

これは 3 項間漸化式が成り立つことを意味している．方程式

$$x = px^2 + q$$

を解いて

$$px^2 - x + q = px^2 - (p+q)x + q = (px - q)(x - 1) = 0$$

なので特性方程式の根は 1 と q/p である．$p=q$ のとき重根であることに注意すれば一般解は

$$v(a)=\begin{cases}\alpha+\beta(q/p)^a, & p\neq q\\ \alpha+\beta a, & p=q\end{cases}$$

境界条件として $v(0)=0, v(N)=1$ で係数を決めれば求める結果を得る． □

次に $\sigma_0\wedge\sigma_N$ の期待値を計算しよう．これはゲームが終了するまでの平均の時間を表している．

定理 5.2. $0\leq a\leq N$ のとき次が成立する．

$$E_a[\sigma_0\wedge\sigma_N]=\begin{cases}\dfrac{1}{p-q}\left(N\dfrac{(q/p)^a-1}{(q/p)^N-1}-a\right), & p\neq q\\ a(N-a), & p=q=\frac{1}{2}\end{cases} \tag{5.3}$$

証明　a から出発すると確率 p で $a+1$ に移動し，確率 q で $a-1$ に移動する．それ以後は，やはりランダム・ウォークであるから

$$E_a[\sigma_0\wedge\sigma_N]=pE_{a+1}[1+\sigma_0\wedge\sigma_N]+qE_{a-1}[1+\sigma_0\wedge\sigma_N]$$

が成り立つ．$e(a)=E_a[\sigma_0\wedge\sigma_N]$ とおくと

$$e(a)=p(1+e(a+1))+q(1+e(a-1))$$

あるいは

$$pe(a+1)-e(a)+qe(a-1)=-1.$$

特殊解は

$$p(a+1)-a+q(a-1)=p-q$$

から $p\neq q$ のときは $e(a)=-\frac{1}{p-q}a$ が特殊解．$p=q$ のときは $-a^2$ を考えると

$$-p(a+1)^2+a^2-q(a-1)^2=-p(a^2+2a+1)+a^2-q(a^2-2a+1)=-p-q=-1$$

となり，特殊解であることが分かる．従って一般解は次の形である

$$e(a)=\begin{cases}\alpha+\beta(q/p)^a-\frac{1}{p-q}a, & p\neq q\\ \alpha+\beta a-a^2, & p=q.\end{cases}$$

ここで境界条件 $e(0)=e(N)=0$ を加味して求める結果を得る． □

次に，再び全空間 $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ でのランダム・ウォークを考える．そして $\sigma_0<\infty$ となる確率を求めよう．

定理 5.3. $a \geq 0$ として次が成立する．

$$P_a(\sigma_0 < \infty) = \begin{cases} (q/p)^a, & p > q, \\ 1, & p \leq q. \end{cases} \tag{5.4}$$

証明 a から出発すると確率 p で $a+1$ に移動し，確率 q で $a-1$ に移動する．それ以後は，やはりランダム・ウォークであるから

$$P_a(\sigma_0 < \infty) = pP_{a+1}(\sigma_0 < \infty) + qP_{a-1}(\sigma_0 < \infty)$$

$\pi(a) = P_a(\sigma_0 < \infty)$ とおくと

$$\pi(a) = p\pi(a+1) + q\pi(a-1)$$

よって一般解は

$$\pi(a) = \begin{cases} \alpha + \beta(q/p)^a, & p \neq q, \\ \alpha + \beta a, & p = q. \end{cases}$$

境界条件 $\pi(0) = 1$ があるから

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 & p \neq q, \\ \alpha = 1 & p = q. \end{cases}$$

よって

$$\pi(a) = \begin{cases} \beta(q/p)^a + 1 - \beta & p \neq q, \\ 1 + \beta a & p = q. \end{cases}$$

$\pi(a)$ は，0 と 1 の間にあるから，$p = q$ のときは $\beta = 0$ がわかる．$p < q$ のときは $a \to \infty$ のとき $(q/p)^a \to \infty$ だからやはり $\beta = 0$ である．

$p > q$ のときに β を求めよう．そのために $\pi(a) = \pi_{p,q}(a)$ と p, q を明示する．$P_0(\tau_0 < \infty) = 1 - |p - q|$ であった．0 から出発すると確率 p で 1 に移動し，確率 q で -1 に移動するから

$$P_0(\tau_0 < \infty) = pP_1(\tau_0 < \infty) + qP_{-1}(\tau_0 < \infty)$$

ところで $P_1(\tau_0 < \infty) = P_1(\sigma_0 < \infty) = \pi_{p,q}(1)$．$P_{-1}$ は鏡像を考えれば，上向き，下向きの確率が逆になるから $P_{-1}(\tau_0 < \infty) = \pi_{q,p}(1)$ が成立する．従って

$$1 - |p - q| = p\pi_{p,q}(1) + q\pi_{q,p}(1)$$

が成立している．$p > q$ のときは $\pi_{q,p}(1) = 1$ を示しているので

$$1 - (p - q) = p\pi_{p,q}(1) + q$$

より

$$\pi_{p,q}(1) = q/p.$$

したがってこの条件を使えば $\beta(q/p) + 1 - \beta = q/p$ から $\beta = 1$ がわかる． □

平均を計算すると

定理 5.4. $a > 0$ のとき次が成立する．

$$E_a[\sigma_0] = \begin{cases} \infty & p \geq q \\ \frac{a}{q-a} & p < q \end{cases} \tag{5.5}$$

証明　これは単に 定理 5.2 で $N \to \infty$ とすればよい．$p > q$ の場合はほぼ明らかだから $p \leq q$ の場合を考えると，$N \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{p-q}\left(N\frac{(q/p)^a - 1}{(q/p)^N - 1} - a\right) \to \frac{-a}{p-q}, \qquad (p < q \text{ のとき})$$

$$a(N-a) \to \infty, \qquad (p = q \text{ のとき})$$

となる．□

最後に $a \geq 0$ のとき $p \leq q$ のときは $P_a(\sigma_0 < \infty) = 1$ で必ず破産することを意味している．σ_0 までの最大値を M とする．即ち

$$M = \max\{S_0, S_1, \ldots, S_{\sigma_0}\} \tag{5.6}$$

とおいて，M の期待値を $p = q$ のとき計算してみよう．この問題は逆に考えて，$p = q$ のとき，必ず初期状態より増えた状態に到達するが，そのとき，借金がどれくらいになるか，という問題を考えることになる．

定理 5.5. $p = q$, $a > 0$ として次が成立する．

$$E_a[M] = \infty. \tag{5.7}$$

証明

$$P_a(M < N) = P_a(\sigma_0 < \sigma_N) = (N-a)/N.$$

よって

$$\begin{aligned} P_a(M = N) &= P_a(M < N+1) - P_a(M < N) \\ &= \frac{N+1-a}{N+1} - \frac{N-a}{N} \\ &= \frac{(N+1-a)N - (N-a)(N+1)}{N(N+1)} \\ &= \frac{N^1 + N - aN - N^2 + aN - N + a}{N(N+1)} \\ &= \frac{a}{N(N+1)} \end{aligned}$$

これから

$$E_a[M] = \sum_{N=a}^{\infty} N\frac{a}{N(N+1)} = \sum_{N=a}^{\infty}\frac{a}{N+1} = \infty$$

がわかる．□

これから $p = q$ のとき，必ず利得を得ることができるが，その時の借金の期待値が $-\infty$ になることがわかる.

Notes

- 破産の問題は Grimmett-Welsh [2] を参照した.

第2章　オプションの価格付け

1.　2項モデル

この節では，2項モデルを中心にオプションの価格付けについて述べる．

オプション

時刻を $t = 0, 1, \ldots, T$ とし，株価を S_t とする．正確には S_t は一単位あたりの値段である．また株の売買は一単位以下のものも許すものとする．例えば 0.5 株買う，ということを認める．

コールオプション: 満期時 T に行使価格 K で，決められた数の株を買う権利
プットオプション: 満期時 T に行使価格 K で，決められた数の株を売る権利

コールオプションの場合に解説を加えよう．株は1株だけ買うことに固定しておく．満期時の株価は S_T である．$S_T \leq K$ であれば，市場で価格 S_T で売られている株を，それより高い値段の K で買う必要はない．損をするだけである．従ってこの場合は権利は行使されず，利得は 0 である．$S_T > K$ のときに意味を持つ．このときは安い値段の K で買うことが出来るのであるから，権利を行使して，K を支払って株を買い，直ちに市場価格の S_T で売却すれば $S_T - K$ の利得が得られる．従ってこのコールオプションの価値は $(S_T - K)_+$ と考える．プットの場合も同様である．数式で書けば

コールオプション: $H = (S_T - K)_+$
プットオプション: $H = (K - S_T)_+$

ここで H は，言わば満期時 T における価格である．しかし，オプションは時刻 0 で売りに出される．従って未来の時刻 T での商品を，現時点 0 で価格付けをする必要がある．それがオプションの価格付けの問題である．オプション H の時刻 0 における価格を $\pi(H)$ と表すことにする．この $\pi(H)$ をどのように求めるかが，この章の主題である．

オプションのような商品を**派生証券** (derivative secureity) と呼ぶ．株式そのもの（これを原資産という）ではなく，それから派生したもの，という意味である．また株価の変動に応じて支払いが変動するので，**条件付き請求権** (contingent claim) とも呼ばれる．

単期間モデル: コールオプションの例

時刻は 0 と 1 のみとする．株価の変動を $\{S_t\}, t = 0, 1$ で表す．$S_0 = 10$ として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p \\ 7.5, & \text{確率 } 1-p \end{cases}$$

とした場合に，コールオプション $H = (S_1 - K)_+$ の $K = 15$ の場合の価格を考えよう．
価格を平均と考えると

$$E[(S_1 - K)_+] = (20 - 15) \times p + 0 \times (1 - p) = 5p$$

である．従来はこれが価格と考えられてきた．$p = 0.5$ ならば，2.5 が価格である．
実際には価格は 1 とすべきことを以下に述べる．全体の見通しを与えるために，目標をはっきりさせておこう．次のことを示すことがこの講義の目標である．

- オプションの価格は同値マルチンゲール測度での平均で与えられる．
- 市場が viable (no arbitrage) $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度が存在
- viable な市場が完備 $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度は一意的
- オプションを複製する戦略によってヘッジできる

無裁定条件

「元手 0 から出発して正の利得を得る」という取引を**裁定取引** (arbitrage) という．**裁定機会**と呼ばれることもある．この様な裁定取引が存在しない，というのが経済の基本的な原則である．これを

- **無裁定条件** (no arbitrage)

と呼ぶ．no free lunch という用語も使われる．
以後この無裁定の条件から価格が決まってくることを見ていく．また確率論的な意味づけも与える．

コール・プットパリティ

無裁定の条件の使い方の例として，コール・プットパリティを証明してみよう．
コール $(S_T - K)_+$ と プット $(K - S_1)_+$ を考え，更に利子で時間とともに $(1+\rho)^t$ の割合で預金が増えていくとする．これは時間とともにお金の価値が変っていくことを意味する．さてコールとプットの時刻 t における価格を C_t, P_t とする．すると次の関係 (コール・プットパリティと呼ばれる) が成立する：

$$C_t - P_t = S_t - (1 + \rho)^{-(T-t)}K. \tag{1.1}$$

これを見るために時刻 t において次の二つの状況を考えてみよう．

1. コールを買い，プットを売る．
2. 株を 1 単位買い，金を $(1 + \rho)^{-(T-t)}K$ だけ借りる．

これから出発して時刻 T での状態を考えてみると

1. $C_T - P_T = (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+$ 所有
2. $S_T - (1+\rho)^{(T-t)}(1+\rho)^{-(T-t)}K$ だけ所有

どちらも $S_T - K$ だけ所有している．

(1.1) が成立しなければ，時刻 t のときに差額が生じる．従ってこの差額を利用して裁定機会が生じることになる．よって，無裁定の条件から等号が成立しなければならない．

ポートフォリオ

株 S_t のほかに銀行からの資金の貸し借りも含めた状況を考える．銀行との取引を一種の証券と考え B_t で表す．B_t は**安全証券** (riskless security) と呼ばれることがある．これに対して株の方は**危険証券** (risky security) と呼ばれる．B_t もやはり単価であり，B_t を持っていることは，銀行に預金していることに相当する．B_t はお金そのものと考えた方が分かりやすいので以下ではそのような解釈で話を進めていく．また以下では $B_t = (1+\rho)^t$ とする．ρ は利率である．B_t の保有量を η_t とし，S_t の保有量を θ_t とするとき (η_t, θ_t) を**ポートフォリオ**と呼ぶ．これは配分の比率を表している．

一つ注意しておくが，η_t, θ_t は負になってもよい．η_t が負のときは借金をしている状態であり，θ_t が負のときは空売りをしている状態である．空売りとは，持っていない株を売ることである．現実的には空売りは，将来買い戻すことを約束して，証券会社から株を借りてそれを売るという行為である．そういう負債をいくらでも認めていることになる．

さらに，

$$V_t = \eta_t B_t + \theta_t S_t$$

を**価値過程** (value process) と呼ぶ．富過程 (wealth process) とも呼ばれる．資金の運用による，資産の状態を表している．ポートフォリオに対しては

$$\eta_t B_t + \theta_t S_t = \eta_{t+1} B_t + \theta_{t+1} S_t$$

を仮定する．これが満たされるとき**自己充足的**または**自己資金調達** (self-financing) であるいう．別のところからの資金の貸し借りはない，ということである．このようにポートフォリオを組んで，満期時点で V_T を $H = (S_T - K)_+$ に等しくなるようにすることを考える．この操作を**複製** (duplication) という．

$V_T = H$ となるようなポートフォリオ (η_t, θ_t) が存在するとき，このときの V_0 がこのオプションの価格となる．このことを以下見ていくことにする．

単期間のポートフォリオ

単期間モデルの場合に戻る．また簡単のため $B_t = 1$ として，利率が 0 の場合を考える．今は $T = 1$ なので，(η_1, θ_1) だけ考えればいいので (η, θ) と表す．すると

$$V_0 = \eta + \theta S_0$$

$$V_1 = \eta + \theta S_1$$

$H = V_1$ となる (η, θ) を求めたい．S_1 は二つの場合があるので

$$S_1(\omega_+) = 20,$$
$$S_1(\omega_-) = 7.5,$$

とすると

$$H(\omega_+) = 5,$$
$$H(\omega_-) = 0$$

である．

$$H(\omega) = \eta + \theta S_1(\omega)$$

を解けばよい．即ち

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 7.5\theta \end{cases}$$

図式的に表すと

$$\begin{array}{ccccc} S_0 & & S_1 & H & \\ & \nearrow & 20 & 5 & 5 = \eta + 20\theta \\ 10 & & & & \\ & \searrow & 7.5 & 0 & 0 = \eta + 7.5\theta \end{array}$$

これを解いて

$$\eta = -3, \quad \theta = 0.4$$

$V_0 = \eta + \theta S_0$ に代入して

$$V_0 = -3 + 0.4 \times 10 = 1$$

が求める価格である．

- オプションを売る側 (writer) で考えてみる．
  - $t = 0$ のとき
    - ∗ オプションを 1 で売る　　1
    - ∗ 銀行から 3 を借りる　　3
    - ∗ 株を 0.4 株買う　0.4×10　-4

- $t = 1$ のとき

$S_1 = 20$ のとき	
* 買い手がオプションを行使して 15 で株を買いに来る	15
* 株を 0.6 株買う　0.6×20	-12
* 銀行へ 3 返済	-3
* 1 株を買い手に引き渡す	
$S_1 = 7.5$ のとき	
* 0.4 株売る　0.4×7.5	3
* 銀行へ 3 返済する	-3

価格が $\pi(H) > 1$ であれば，1 を元手に上のことを実行すれば，$\pi(H) - 1$ が手許に残る．(つまりこれが裁定機会である．) 売り手有利．$\longrightarrow \pi(H) > 1$ ではありえない．

- 買い手 (buyer) 場合を考えてみる

- $t = 0$ のとき

* -0.4 株購入 $= 0.4$ 株売る (空売り)　0.4×10	4
* 3 を銀行へ預金	-3
* 1 でオプションを購入	-1

- $t = 1$ のとき

$S_1 = 20$ のとき	
* 銀行から 15 借りる	15
* 15 でオプションを行使して 1 株買う	-15
* $1 - 0.4 = 0.6$ 株売る　0.6×20	12
* 銀行へ 12 返済	-12
$S_1 = 7.5$ のとき	
* 銀行から 3 引き出す	3
* 0.4 株買う　0.4×7.5	-3

価格が $\pi(H) < 1$ であれば，時刻 0 で $\pi(H)$ を支出して (借金して) このオプションを買えば満期時に 1 だけ得られるので，(借金を返済しても) 手許に $1 - \pi(H)$ 残る．(つまりこれが裁定機会である．) 買い手に有利．$\longrightarrow \pi(H) < 1$ ではありえない．

最後に注意として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p \\ 5, & \text{確率 } 1-p \end{cases}$$

の場合を考えてみよう．これは行使価格を 15 とすると，株価が上がっときに利得 5 を得，株価が下がった時には利得 0 であるから，現象的には前のものと全く同じになる．ただ前の

ものとの違いは，変動の幅が大きいことである．このとき

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 5\theta \end{cases}$$

を解いて

$$\eta = -\frac{5}{3}, \quad \theta = \frac{1}{3}$$

$V_0 = \eta + \theta S_0$ に代入して

$$V_0 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} \times 10 = \frac{5}{3}.$$

これは，前の場合の価格 1 より高くなっている．このように，価格の変動が大きいと (volatility が大きいという) 価格は一般に高くなる．

単期間 3 項モデル

$S_0 = 10$ として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p_1 \\ 10, & \text{確率 } p_2 \\ 7.5, & \text{確率 } p_3 \end{cases}$$

となる場合を考えてみよう．このとき行使価格を $K = 15$ としてコールオプション $(S_1 - K)_+$ の複製を作ることを考える．2 項の場合と同様にすると，次の方程式を解かなければならない．

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 10\theta, \\ 0 = \eta + 7.5\theta. \end{cases}$$

明らかにこの場合は解が存在しない．このように，複製が必ずしも可能でないものが存在するとき，**非完備市場**という．このときにはリスク中立測度は無限に存在し，別の基準を導入しなければ一意的には決まらない．このような場合は困難が伴うので，ここではどんな複製も可能な**完備市場**のみを扱う．

リスク中立測度

単期間二値モデルを一般的な枠組みで考える．安全証券の方は $B_t = (1+\rho)^t$ であるとする．$\beta = (1+\rho)^{-1} \leq 1$ を割引率という．異なった時間の価格はこの割引率を勘案した形で考える必要がある．S_0, S_1 を株価とする．S_1 は

$$S_1(\omega_+), \quad S_1(\omega_-)$$

の二値とする．$P(\omega_+) = p$, $P(\omega_-) = 1 - p$ とする．p は価格付けに直接には関係しない．オプションを H として H の価格付けを考える．

価値過程は

$$\begin{aligned} V_0 &= \eta + \theta S_0 \\ V_1 &= \beta^{-1}\eta + \theta S_1. \end{aligned}$$

$V_1 = H$ としたいので $H = \beta^{-1}\eta + \theta S_1$.

$$H(\omega_+) = \beta^{-1}\eta + \theta S_1(\omega_+) \tag{1}$$

$$H(\omega_-) = \beta^{-1}\eta + \theta S_1(\omega_-) \tag{2}$$

これを解いて

$$\theta = \frac{H(\omega_+) - H(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}$$

また $(1) \times S_1(\omega_-) - (2) \times S_1(\omega_+)$ としてこれを解いて

$$\begin{aligned} S_1(\omega_-)H(\omega_+) - S_1(\omega_+)H(\omega_-) &= \beta^{-1}\eta(S_1(\omega_-) - S_1(\omega_+)) \\ \eta &= \frac{\beta(S_1(\omega_+)H(\omega_-) - S_1(\omega_-)H(\omega_+))}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \end{aligned}$$

と求まる．従って V_0 は

$$\begin{aligned} V_0 &= \eta + \theta S_0 \\ &= \frac{\beta(S_1(\omega_+)H(\omega_-) - S_1(\omega_-)H(\omega_+))}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} + \frac{H(\omega_+) - H(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} S_0 \\ &= \frac{S_0 - \beta S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} H(\omega_+) + \frac{\beta S_1(\omega_+) - S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} H(\omega_-) \\ &= \beta \left\{ \frac{\beta^{-1}S_0 - S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} H(\omega_+) + \frac{S_1(\omega_+) - \beta^{-1}S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} H(\omega_-) \right\} \\ &= \beta(qH(\omega_+) + (1-q)H(\omega_-)). \end{aligned}$$

ここで

$$q = \frac{\beta^{-1}S_0 - S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \tag{1.2}$$

とおいた (これは H には関係していないことに注意しよう)．即ち，確率 Q を

$$Q(\{\omega_+\}) = q, \quad Q(\{\omega_-\}) = 1 - q$$

と定めれば

$$\pi(H) = V_0 = E^Q[\beta H].$$

これは，価格がある確率に関する期待値で表されている，ということを意味している．但し，これはもともとの確率とは異なっている．この確率測度を**リスク中立測度**と呼ぶ．

この測度の意味を考えよう．そのために期待値 $E^Q[\beta S_1]$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
E^Q[\beta S_1] &= \beta S_1(\omega_+)q + \beta S_1(\omega_-)(1-q) \\
&= \beta S_1(\omega_+)\frac{\beta^{-1}S_0 - S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} + \beta S_1(\omega_-)\frac{S_1(\omega_+) - \beta^{-1}S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \\
&= \frac{S_1(\omega_+)S_0 - \cancel{\beta S_1(\omega_+)S_1(\omega_-)} + \cancel{\beta S_1(\omega_-)S_1(\omega_+)} - S_1(\omega_-)S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \\
&= \frac{(S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-))S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \\
&= S_0
\end{aligned}
$$

となり，これは $S_0, \beta S_1$ がマルチンゲールになっていることを意味する．即ち，リスク中立測度は，(割り引いた) 株価過程がマルチンゲールになる様な測度なのである．そのために**同値マルチンゲール測度**とも呼ばれる．

ここで，情報ということについて少し解説しておこう．最初の例からも分かるように，ポートフォリオを組む場合に，未来の情報は使えない．時刻 0 の時点では，時刻 1 の状態は分からない．株価が上がることがあらかじめ分かっていれば，現時点で買っておくのが有利に決まっている．そういうことはない訳である．ただ，このモデルの場合もそうであるが，未来の株価の分布は事前に分かっているということは注意しておいたほうが良いだろう．最初の例の場合，株価が時刻 1 で 20 になるか 7.5 になるかのどちらかであるということは，未来のことであるにも拘らず知っているのである．少なくともそういうことを前提にして理論は組み立てられている．モデルを立てるということはそういうことで，株価は 11 になったり，12 になったりはしないということを知っていることになる．20 になるか 7.5 になるかのどちらかなのである．そして，その確率が p と $1-p$ であることも知っている．つまり分布を事前に知っているのである（未来のことであるにも拘らず）．おそらく誤解はないと思うが，このことは注意しておく．

オプションの価格を決める場合に，元の確率ではなく，同値マルチンゲール測度での平均が価格を決めるわけだが，元の確率は 20 になるか 7.5 になるかのどちらかである，ということだけは影響している．それが「同値」という意味で，同値マルチンゲール測度にしても，株価が 11 になるとか， 12 になるとかは許容していない．

2.　多期間 2 項モデル＝CRR モデル

株価過程 $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_T$ を次で定める：

$$
S_t = \begin{cases} (1+b)S_{t-1} & \text{確率 } p \\ (1+a)S_{t-1} & \text{確率 } 1-p \end{cases}
$$

安全証券と，価値過程は

$$
B_t = (1+\rho)^t, \quad V_t = \eta_t B_t + \theta_t S_t
$$

で定める．(η_t, θ_t) は $(t-1, t]$ でのポートフォリオを表す．$a < \rho < b$ を仮定しておく．これは無裁定の条件に対応する．

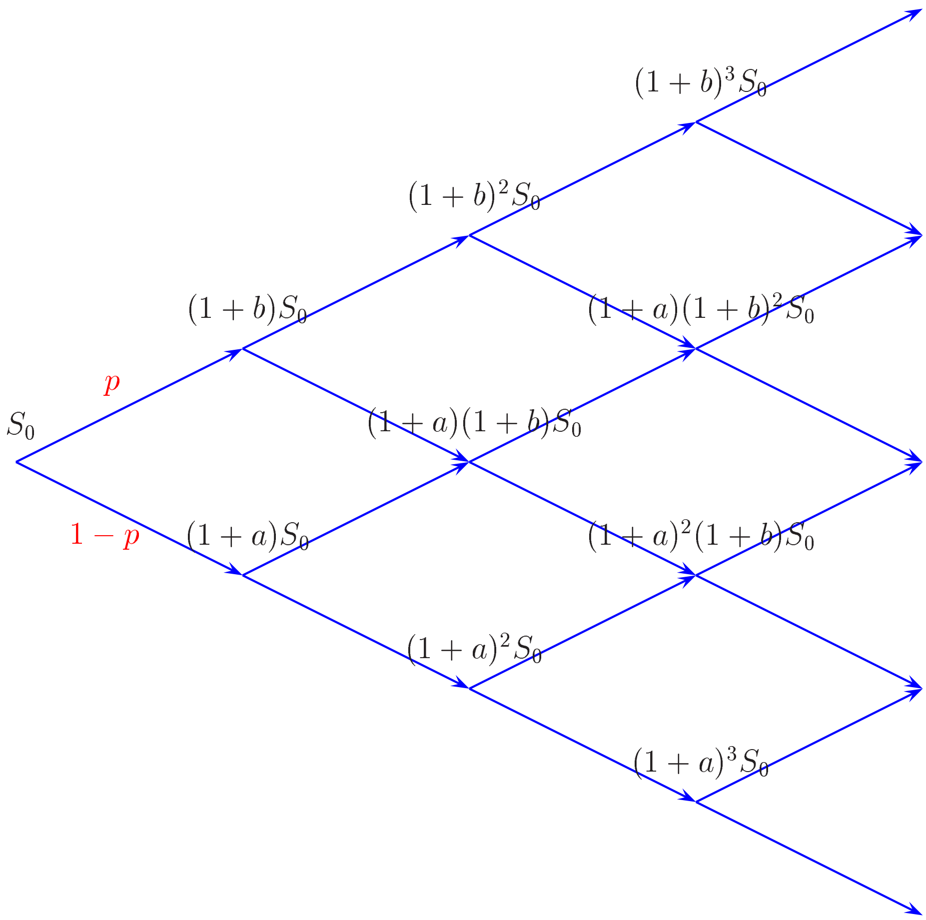

図 2.1: CRR モデル

単期間のときは，(1.2) から

$$\beta = (1+\rho)^{-1}, \quad q = \frac{\beta^{-1} S_0 - (1+a) S_0}{(1+b) S_0 - (1+a) S_0} = \frac{\rho - a}{b - a}$$

とおくと，価格は

$$V = E^Q[\beta H] = \beta(q H_b + (1-q) H_a)$$

であった．これを 2 期間の時に次のように考える．

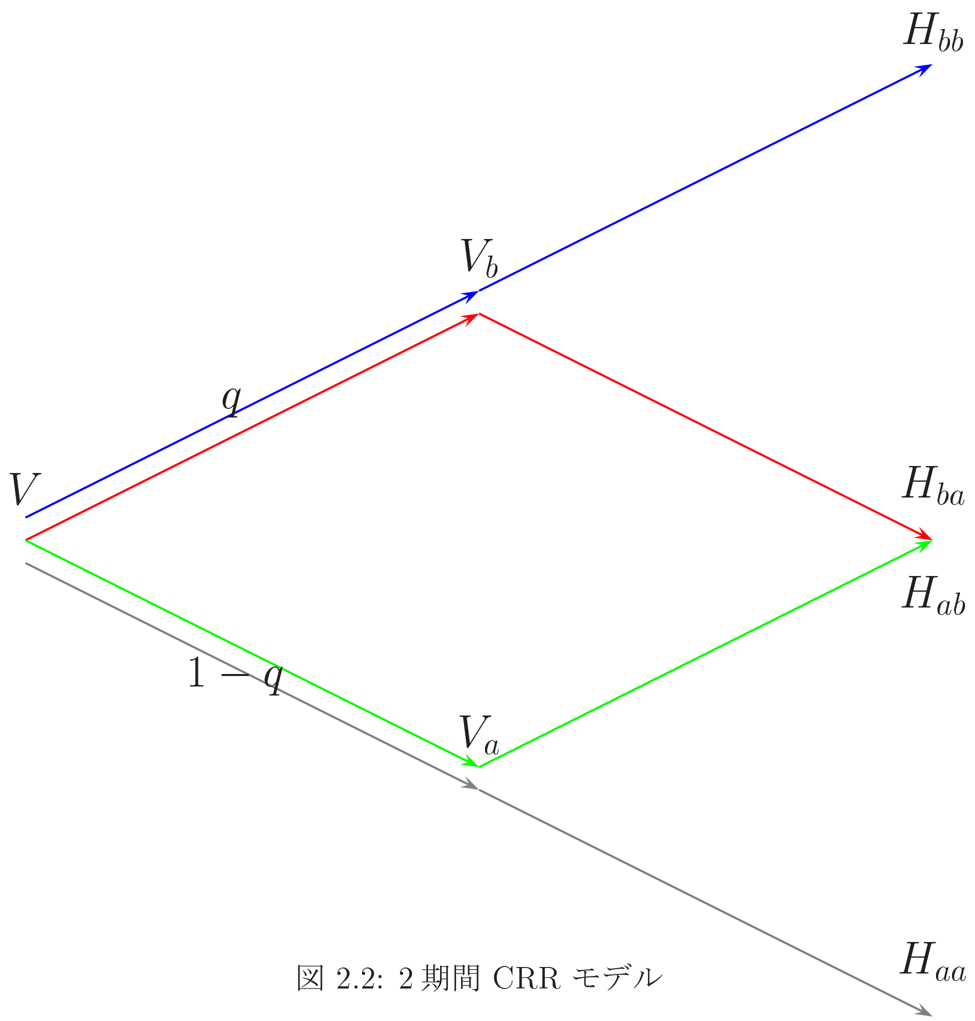

図 2.2: 2 期間 CRR モデル

オプション H の時刻 $T-2$ における価格を V_{T-2} を帰納的に求めることが出来る．まず時刻 $T-1$ のとき，図の V_a, V_b は

$$V_b = \beta(qH_{bb} + (1-q)H_{ba}) \tag{2.1}$$

$$V_a = \beta(qH_{ab} + (1-q)H_{aa}). \tag{2.2}$$

さらに V_b, V_a をオプションと見て，時刻 $T-2$ における価格は

$$V = \beta(qV_b + (1-q)V_a) \tag{2.3}$$

(2.3) へ (2.1), (2.2) を代入して

$$V = \beta^2(q^2H_{bb} + q(1-q)H_{ba} + (1-q)qH_{ab} + (1-q)^2H_{aa}) \tag{2.4}$$

が得られる．$S_{T-2} = S$ として，コールオプション $H = (S_T - K)_+$ の場合を考えると

$$V = \beta^2\{q^2((1+b)^2S - K)_+ + 2q(1-q)((1+a)(1+b)S - K)_+$$

$$+(1-q)^2((1+a)^2S-K)_+\} \tag{2.5}$$

が得られることになる．

CRR 公式

以上の手続きを繰り返すと，価格として次のものが得られる．

$$\begin{aligned}
V_0 &= \beta^T \sum_{t=0}^{T} \binom{T}{t} q^t(1-q)^{T-t}((1+b)^t(1+a)^{T-t}S_0-K)_+ \\
&= S_0(1+\rho)^{-T}\sum_{t=A}^{T}\binom{T}{t} q^t(1-q)^{T-t}(1+b)^t(1+a)^{T-t} - K(1+\rho)^{-T}\sum_{t=A}^{T}\binom{T}{t}q^t(1-q)^{T-t} \\
&= S_0\sum_{t=A}^{T}\binom{T}{t}q^t(1-q)^{T-t}\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right)^t\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right)^{T-t} - K(1+\rho)^{-T}\sum_{t=A}^{T}\binom{T}{t}q^t(1-q)^{T-t}
\end{aligned}$$

ここで

$$A=\min\{k;\ S_0(1+b)^k(1+a)^{T-k}>K\}.$$

更に整理をしよう．

$$q=\frac{\rho-a}{b-a},\quad q'=q\frac{1+b}{1+\rho}$$

とおく．

$$\begin{aligned}
q\frac{1+b}{1+\rho}+(1-q)\frac{1+a}{1+\rho} &= q\frac{b-a}{1+\rho}+\frac{1+a}{1+\rho} \\
&= \frac{\rho-a}{b-a}\frac{b-a}{1+\rho}+\frac{1+a}{1+\rho} \\
&= \frac{\rho-a}{b-a}\frac{\rho-a}{1+\rho}+\frac{1+a}{1+\rho}=1
\end{aligned}$$

であるから

$$q'\in(0,1),\quad 1-q'=(1-q)\frac{1+a}{1+\rho}$$

である．従って

$$\begin{aligned}
V_0 &= S_0\sum_{t=A}^{T}\binom{T}{t}(q')^t(1-q')^{T-t}-K(1+\rho)^{-T}\sum_{t=A}^{T}\binom{T}{t}q^t(1-q)^{T-t} \\
&= S_0\Psi(A;T,q')-K(1+\rho)^{-T}\Psi(A;T,q) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

ここで

$$\Psi(m;n,p)=\sum_{j=m}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}.$$

(2.6) は Cox-Ross-Rubinstein (CRR) の公式と呼ばれている

ヘッジ

一般の時刻 t に対しては

$$\begin{aligned} V_t &= \beta^{T-t}\sum_{s=0}^{T-t}\binom{T-t}{s}q^s(1-q)^{T-t-s}((1+b)^s(1+a)^{T-t-s}S_t-K)_+ \\ &= S_t\Psi(A_t;T-t,q')-K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_t;T-t,q) \end{aligned} \tag{2.7}$$

が成り立つ．但し

$$A_t=\min\{k;S_t(1+b)^k(1+a)^{T-t-k}>K\}.$$

ここで $(t-1,t]$ でのポートフォリオを (η_t,θ_t) とすると

$$V_t=\eta_t(1+\rho)^t+\theta_tS_t$$

V_t は (2.7) から S_t から決まるが，S_t は S_{t-1} と，$(t-1,t]$ における変動で決まる．今の場合の 2 項モデルでは $S_t=(1+b)S_{t-1}$ か $S_t=(1+a)S_{t-1}$ のどちらになるかで決まる．対応する価格を V_t^b, V_t^a とすれば

$$\begin{aligned} V_t^b &= \eta_t(1+\rho)^t+\theta_t(1+b)S_{t-1}, \\ V_t^a &= \eta_t(1+\rho)^t+\theta_t(1+a)S_{t-1} \end{aligned}$$

であるから

$$\theta_t=\frac{V_t^b-V_t^a}{(b-a)S_{t-1}},\quad \eta_t=\frac{(1+b)V_t^a-(1+a)V_t^b}{(1+\rho)^t(b-a)} \tag{2.8}$$

となる．

ここで (2.7) を用いて具体的に計算すると，

$$\begin{aligned} V_t^b &= S_{t-1}(1+b)\Psi(A_t^b;T-t,q')-K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_t^b;T-t,q) \\ V_t^a &= S_{t-1}(1+a)\Psi(A_t^a;T-t,q')-K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_t^a;T-t,q) \end{aligned}$$

である．但し

$$\begin{aligned} A_t^b &= \min\{k;S_{t-1}(1+b)(1+b)^k(1+a)^{T-t-k}>K\} \\ A_t^a &= \min\{k;S_{t-1}(1+b)^k(1+a)(1+a)^{T-t-k}>K\} \end{aligned}$$

である．これを少し変形すると

$$\begin{aligned} A_t^b &= \min\{k;S_{t-1}(1+b)^{k+1}(1+a)^{T-t-k}>K\} \\ &= \min\{k-1;S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-t-k+1}>K\} \\ &= \min\{k-1;S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-(t-1)-k}>K\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \min\{k; S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-(t-1)-k} > K\} - 1 \\
&= A_{t-1} - 1
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
A_t^a &= \min\{k; S_{t-1}(1+b)^k(1+a)(1+a)^{T-t-k} > K\} \\
&= \min\{k; S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-t-k+1} > K\} \\
&= \min\{k; S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-(t-1)-k} > K\} \\
&= A_{t-1}
\end{aligned}
$$

である．これから

$$
\begin{aligned}
V_t^b &= S_{t-1}(1+b)\Psi(A_{t-1}-1; T-t, q') - K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}-1; T-t, q) \\
V_t^a &= S_{t-1}(1+a)\Psi(A_{t-1}; T-t, q') - K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}; T-t, q).
\end{aligned}
$$

これで V_t^b, V_t^a が S_{t-1} であらわされていることが分かる．これをさらに (2.8) へ代入すれば，θ_t, η_t が S_{t-1} の関数として表されていることが分かる．具体的に計算すると

$$
\begin{aligned}
V_t^b - V_t^a &= S_{t-1}(1+b)\Psi(A_{t-1}-1; T-t, q') - K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}-1; T-t, q) \\
&\quad - S_{t-1}(1+a)\Psi(A_{t-1}; T-t, q') + K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}; T-t, q) \\
&= S_{t-1}(1+b)\{\Psi(A_{t-1}; T-t, q') + \binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1}\} \\
&\quad - K(1+\rho)^{-(T-t)}\{\Psi(A_{t-1}; T-t, q) + \binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}\} \\
&\quad - S_{t-1}(1+a)\Psi(A_{t-1}; T-t, q') + K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}; T-t, q) \\
&= S_{t-1}(b-a)\Psi(A_{t-1}; T-t, q') \\
&\quad + S_{t-1}(1+b)\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1} \\
&\quad - K(1+\rho)^{-(T-t)}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\theta_t &= \frac{V_t^b - V_t^a}{(b-a)S_{t-1}} \\
&= \Psi(A_{t-1}; T-t, q') + \frac{1+b}{b-a}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1} \\
&\quad - \frac{K(1+\rho)^{-(T-t)}}{(b-a)S_{t-1}}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}.
\end{aligned}
$$

η_t を計算するには

$$
(1+b)V_t^a - (1+a)V_t^b
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+b)S_{t-1}(1+a)\Psi(A_{t-1}; T-t, q') \\
&\quad - (1+b)K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}; T-t, q) \\
&\quad - (1+a)S_{t-1}(1+b)\{\Psi(A_{t-1}; T-t, q') + \binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1}\} \\
&\quad + (1+a)K(1+\rho)^{-(T-t)}\{\Psi(A_{t-1}; T-t, q)\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}\} \\
&= -(b-a)K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}; T-t, q) \\
&\quad - (1+a)(1+b)S_{t-1}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1} \\
&\quad + (1+a)K(1+\rho)^{-(T-t)}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\eta_t &= \frac{(1+b)V_t^a - (1+a)V_t^b}{(1+\rho)^t(b-a)} \\
&= -K(1+\rho)^{-T}\Psi(A_{t-1}; T-t, q) \\
&\quad - \frac{(1+a)(1+b)}{(1+\rho)^t(b-a)}S_{t-1}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1} \\
&\quad + \frac{(1+a)}{b-a}K(1+\rho)^{-T}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}.
\end{aligned}
$$

以上で θ_t, η_t は S_{t-1} の関数として表され，predictable であることが確かめられる．

コールオプションでは，満期時に売り手は価格 S_T の株を K で売らなければならない．S_t は K よりも大きい場合もあるのだから，何もしなければこの差額の分だけ損失を生む (最初にオプション料をを取っているから一部はそれで埋め合わせることができるが)．しかし上で述べた戦略をとれば，満期時にオプションを行使されてもそれに応じることが出来る．このようなリスクの回避策を**ヘッジ** (hedge) という．売り手側からすれば，この複製戦略を求めることが重要なのは明らかであろう．理論的な裏づけの必要性が理解されるであろう．

第3章　離散モデルの一般的枠組み

1.　取引戦略

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を与え，取引時刻を $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ とし，フィルトレイション $\{\mathscr{F}_t\}$, $t = 0, 1, 2 \ldots, T$ が与えられているとする．株価過程を (S_t) とし $\{\mathscr{F}_t\}$ 適合であるとする．株は d-種あり，$S^1, S^2, \ldots, S^d$ とする．さらに，安全証券として S^0 をおく．証券全体を $S = (S^0, S^1, S^2, \ldots, S^d)$ とおく．

S^0	安全証券 (riskless security)
$S^1, S^2, \ldots, S^d$	危険証券 (risky security) 例えば株

ここでは一般的な枠組みで考える．すなわち，Ω は有限集合ということは仮定しないし，また $\mathscr{F}_t$ は S の時刻 t までで生成される σ-field と一致することは，必ずしも仮定しない．$\beta_t = \frac{1}{S^0_t}$ を**割引率** (discount factor) と呼ぶ．通常 $S^0_t = (1+\rho)^t$ であることを仮定する．従って $\beta_t = (1+\rho)^{-t}$ である．しかしこのことは特にあとで必要になるわけではない．S^0 は deterministic である必要もない．異なる時刻での価格は基準が違うため，β_t をかけて調整しているわけである．時刻 t の時点での価値が 1 のものは，時刻 0 で β_t の価値を持つとみなす．

株の売買を行い，資産運用のモデルを立てよう．時刻 t における証券 S^0, $S^1, \ldots, S^d$ の保有量を

$$\theta_t = (\theta^0_t, \theta^1_t, \ldots, \theta^d_t)$$

で表す．これをポートフォリオと呼ぶ．またポートフォリオをどのように組替えていくかが**取引戦略** (trading strategy) となる．このときの**価値過程** (value process) を

$$V_0(\theta) = \theta_1 \cdot S_0, \tag{1.1}$$

$$V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \theta^i_t S^i_t, \quad t \geq 1 \tag{1.2}$$

で定める．時刻 $t-1$ の時点で保有量 θ_t を決め，$(t-1, t]$ の区間でこの保有量を保つ．時刻 t で，価値は $\theta_t \cdot S_t$ になる．この時点で新たな保有量 θ_{t+1} を決める．このように時刻 $t-1$ の段階で保有量 θ_t を決めていくことになる．つまり，θ_t を決めるには時刻 $t-1$ までの情報だけを使って決定されなければならない．そこで θ_t は $\mathscr{F}_{t-1}$ 可測である，という仮定をおく．このように一つ前の σ-field に関して可測な確率過程を**可予測** (predictable) な確率過程という．

一方，よく出てくる概念として適合というのもある．確率過程 (X_t) が $(\mathscr{F}_t)$ に**適合** (adapted) というのは，すべての t に対し X_t が $\mathscr{F}_t$ 可測のときをいう．可予測であれば適合で，可予測のほうが強い概念である．どちらの場合も，未来の情報を使うことが出来ないということは重要である．

さて，上に述べたように時刻 $t-1$ のときの価値が $\theta_t \cdot S_{t-1}$ であったものが，証券価格 S_t が変化することにより，時刻 t では $\theta_t \cdot S_t$ となる．この差額 $\theta_t \cdot S_t - \theta_t \cdot S_{t-1}$ を**利得**という (負の場合は損失である)．一般の確率過程 (X_t) に対して $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ の記法を使う．すると利得は

$$\theta_t \cdot \Delta S_t \tag{1.3}$$

と表される．これらの和として**利得過程** (gain process) G を次で定める:

$$G_0(\theta) = 0, \tag{1.4}$$

$$G_t(\theta) = \theta_1 \cdot \Delta S_1 + \theta_2 \cdot \Delta S_2 + \cdots + \theta_t \cdot \Delta S_t. \tag{1.5}$$

定義 1.1. 取引戦略 θ が次の条件をみたすとき，**自己資金調達** (self-financing) であるという (**自己充足的**と呼ばれることもある):

$$\theta_t \cdot S_t = \theta_{t+1} \cdot S_t, \quad 1 \leq t \leq T-1. \tag{1.6}$$

この条件は，時刻 t でポートフォリオを組み替えたとき，そのときの保有証券の価値 $\theta_t \cdot S_t$ と，新たに組み替えた保有証券の価値 $\theta_{t+1} \cdot S_t$ が等しくなることを要請している．つまり外部との資金の出し入れがなく，内部で閉じているということである．

self-financing の条件は $\theta_{t+1} \cdot S_t - \theta_t \cdot S_t = \Delta\theta_{t+1} \cdot S_t$ だから

$$\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0, \quad 2 \leq t \leq T. \tag{1.7}$$

とかくこともできる．self-financing の同値条件をまとめておこう．

命題 1.2. 次の条件は全て同値である:

$$\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0, \quad 2 \leq t \leq T, \tag{1.8}$$

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta S_t, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{1.9}$$

$$V_t(\theta) = V_0(\theta) + G_t(\theta), \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{1.10}$$

証明　まず (1.8) から (1.9) を導出しよう．(1.8) を仮定すると，$t = 2, \ldots, T$ のとき $\theta_t \cdot S_{t-1} = \theta_{t-1} \cdot S_{t-1}$ であるから

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t - \theta_{t-1} \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot S_t - \theta_t \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot \Delta S_t$$

が成り立つ．$t = 1$ のときは

$$\Delta V_1(\theta) = V_1(\theta) - V_0(\theta) = \theta_1 \cdot S_1 - \theta_1 \cdot S_0 = \theta_1 \cdot \Delta S_1$$

でやはり (1.9) が成立している．

次に (1.9) から (1.10) を示す．(1.9) が成り立っていると

$$\begin{aligned} V_t(\theta) &= V_0(\theta) + \sum_{s=1}^{t} \Delta V_s(\theta) \\ &= V_0(\theta) + \sum_{s=1}^{t} \theta_s \cdot \Delta S_s \\ &= V_0(\theta) + G_t(\theta). \quad (\because (1.3) \text{ の定義による}) \end{aligned}$$

これで (1.10) が示せている．

最後に (1.10) から (1.8) を導こう．(1.10) を仮定すると $t \geq 1$ のとき

$$\Delta V_t(\theta) = \Delta G_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta S_t.$$

一方 $t \geq 2$ のとき

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t - \theta_{t-1} \cdot S_{t-1}.$$

よって $t \geq 2$ のとき

$$\cancel{\theta_t \cdot S_t} - \theta_{t-1} \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot \Delta S_t = \cancel{\theta_t \cdot S_t} - \theta_t \cdot S_{t-1}.$$

従って

$$(\theta_t - \theta_{t-1}) \cdot S_{t-1} = 0$$

となり (1.8) が示せた． □

基準財

常に正の確率過程 (Z_t) を**基準財** (numéraire) と呼ぶ．S_t の代わりに $Z_t S_t$ で考える．この様な変更を行っても self-financing の条件は変らない．実際

$$\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\theta_t \cdot (Z_{t-1} S_{t-1}) = 0$$

であるからこのことはすぐに分かる．(Z_t) は単に基準を何に採るかということだけで，本質は何も変らない．ドルで表示するか，ユーロで表示するかといった違いでしかない．通常 $Z_t = (S_t^0)^{-1} = \beta_t$ ととるが，正であればなんでもいいわけで，$(S_t^1)^{-1}$ をとっても構わない．また S^0 を安全証券と呼んだが，数学的には特に意味があるわけではない．全部が危険証券だけでも本来いいわけである．

さて，以下では $Z_t = \beta_t$ ととり，

$$\overline{S}_t := \beta_t S_t$$

とおく．$(\overline{S}_t)$ は割り引かれた証券価格過程 (discounted security price process) と呼ばれる．$(\overline{S}_t)$ に対応する確率過程を $\overline{V}$, $\overline{G}$ とする:

$$\overline{V}_0(\theta) = \theta_1 \cdot \overline{S}_0 \tag{1.11}$$

$$\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \overline{S}_t, \quad t \geq 1 \tag{1.12}$$

$$\overline{G}_0(\theta) = 0, \tag{1.13}$$

$$\overline{G}_t(\theta) = \theta_1 \cdot \Delta\overline{S}_1 + \theta_2 \cdot \Delta\overline{S}_2 + \cdots + \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t. \tag{1.14}$$

命題 1.3 で見たように $\overline{S}$ に対しても次の条件は同値になる．

$$\Delta\theta_t \cdot \overline{S}_{t-1} = 0, \quad 2 \leq t \leq T, \tag{1.15}$$

$$\Delta\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{1.16}$$

$$\overline{V}_t(\theta) = \overline{V}_0(\theta) + \overline{G}_t(\theta), \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{1.17}$$

(1.15) は基準財の変更だけだから前に見たように self-financing の条件と同値である．従って上の条件は全て self-financing と同値である．また $\overline{V}$ に対しては

$$\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \overline{S}_t = \theta_t \cdot \beta_t S_t = \beta_t\, \theta_t \cdot S_t = \beta_t\, V_t(\theta)$$

が成り立っている．$\overline{G}_t(\theta)$ は $G_t(\theta)$ と単純な関係では結ばれていない．但し θ が self-financing の場合は (1.17) から

$$\begin{aligned}
\overline{G}_t(\theta) &= \overline{V}_t(\theta) - \overline{V}_0(\theta) \\
&= \beta_t V_t(\theta) - \beta_0 V_0(\theta) \\
&= \beta_t (V_0(\theta) + G_t(\theta)) - \beta_0 V_0(\theta) \\
&= \beta_t G_t(\theta) + (\beta_t - \beta_0) V_0(\theta)
\end{aligned}$$

となる．特に $V_0(\theta) = 0$ のときは $\overline{G}_t(\theta) = \beta_t G_t(\theta)$ が成り立つ．以下 $S_0^0 = 1$ を常に仮定する．このとき $\overline{V}_0(\theta) = V_0(\theta)$ となっていることに注意しよう．

$\overline{G}(\theta)$ には θ_t^0 の寄与がないので（このことは，$\overline{S}_t^0 = 1$, $t = 0, 1, \ldots, T$ から従う），self-financing のときには θ_t^0 は $V_0(\theta)$ と θ^i, $i = 1, \ldots, d$ から決まることが示せる．命題として述べておこう．

命題 1.3. V_0 と predictable process $\theta^1, \ldots, \theta^d$ が与えられたとき，predictable process θ^0 を

$$\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^d)$$

が self-financing であるように出来る．さらに θ^0 は次で一意的に定まる:

$$\theta_t^0 = V_0 + \sum_{u=1}^{t-1} (\theta_u^1 \Delta\overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta\overline{S}_u^d) - (\theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d). \tag{1.18}$$

証明 $\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^d)$ が self-financing であるとすると

$$\begin{aligned}\overline{V}_t(\theta) &= \theta_t^0 + \theta_t^1 \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_t^d = V_0 + \overline{G}_t \\ &= V_0 + \sum_{u=1}^{t} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d).\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}\theta_t^0 &= V_0 + \sum_{u=1}^{t} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d) - \theta_t^1 \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_t^d \\ &= V_0 + \sum_{u=1}^{t-1} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d) + (\theta_t^1 \Delta \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \Delta \overline{S}_t^d) - \theta_t^1 \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_t^d \\ &= V_0 + \sum_{u=1}^{t-1} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d) - \theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d\end{aligned}$$

となり，(1.18) が得られる．

逆に (1.18) が成立すれば，θ_t^0 は predictable で，上の式を逆にたどれば $\overline{V}_t(\theta) = V_0 + \overline{G}_t(\theta)$ が成立するから，self-financing であることが示せる． □

この命題は，self-financing なポートフォリオの作り方を示しているともいえる．

$\overline{V}_{t-1} = V_0 + \sum_{u=1}^{t-1} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d)$ であるから，時刻 $t-1$ での資産 $\overline{V}_{t-1}$ を使って，まず危険証券を $(\theta_t^1, \ldots, \theta_t^d)$ の配分で買う．その費用が $\theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d$ である．そしてその残額 $\overline{V}_{t-1} - (\theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d)$ を銀行に預ける．これが θ_t^0 である．θ_t^0 は正の時も負の時もあるので，負の時には銀行から借金していることになる．θ_t^0 は，他が決まれば自動的に決まるというのもこれからわかることで，この命題はそのことを言っているに過ぎない．帳尻合わせを銀行との貸し借りでやっているということで，self-financing というのは，ごく自然な資金の調達ということができる．ここで銀行預金は $\theta_t^0 \overline{S}_{t-1}^0$ であるが $\overline{S}_{t-1}^0 = 1$ だから θ_t^0 と同じであることも使っている．discount をしない式で書けば $\theta_t^0 S_{t-1}^0 = V_{t-1} - (\theta_t^1 S_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d S_{t-1}^d)$ である．

繰り返しになるが，$(\theta_t^0, \theta_t^1, \ldots, \theta_t^d)$ は時刻 $t-1$ の時点で決めるわけで，したがって (θ_t) は可予測でなければならない．

裁定機会

self-financing strategy の全体を SF とかく．

定義 1.4. 次を満たす self-financing な戦略を**裁定機会** (arbitrage opportunity) という．

$$V_0(\theta) = 0, \quad V_T(\theta) \geq 0, \quad E[V_T(\theta)] > 0.$$

$E[V_T(\theta)] > 0$ の条件は $P(V_T(\theta) > 0) > 0$ と同値である．

定義 1.5. 裁定機会が存在しなとき，市場は**成熟** (viable) と呼ばれる．これは

$$\theta \in \mathrm{SF} \text{ かつ } V_0(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_T(\theta) = 0$$

を意味する．

定義 1.4 では $V_T(\theta) \geq 0$ を仮定したが

$$V_0(\theta) = 0, \quad V_t(\theta) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad E[V_T(\theta)] > 0$$

が成り立つときは，強い意味での裁定機会という．

命題 1.6. 裁定機会が存在すれば，強い意味での裁定機会が存在する．

証明　θ を裁定機会とする．時刻 t を $V_t(\theta)$ が負になる部分がある最大の時刻とする．$A = \{\theta_t \cdot S_t < 0\}$ とおく．$A \in \mathscr{F}_t$, $P(A) > 0$ であり

$$\theta_u \cdot S_u \geq 0 \quad \text{for } u > t$$

が成り立つ．これから新しい戦略 ϕ を次のように作る．まず A^c では $\phi_u = 0$ とする．A 上では

$$\begin{aligned}
&\phi_u(\omega) = 0, \quad u \leq t \\
&\phi_u^0(\omega) = \theta_u^0(\omega) - \frac{\theta_t \cdot S_t}{S_t^0(\omega)}, \quad \phi_u^i(\omega) = \theta_u^i(\omega), \quad i = 1, \ldots, d, \ u > t
\end{aligned}$$

と定める．ϕ が predictable であることは明らか.

self-financing であることを見よう．A^c では $V_u(\phi) = 0$ だから明らか．あとは A 上で $\Delta\phi_{t+1} \cdot S_t = 0$ を示せばよい．($\Delta\phi_u$ と $\Delta\theta_u$ が異なるのは $u = t + 1$ のときだけだから．) A 上では

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{t+1}^0 &= \phi_{t+1}^0 = \theta_{t+1}^0 - \frac{\theta_t \cdot S_t}{S_t^0}, \\
\Delta\phi_{t+1}^i &= \theta_{t+1}^i, \quad i = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{t+1} \cdot S_t &= \Delta\phi_{t+1}^0 S_t^0 + \sum_{i=1}^{d} \Delta\phi_{t+1}^i S_t^i \\
&= (\theta_{t+1}^0 - \frac{\theta_t \cdot S_t}{S_t^0}) S_t^0 + \sum_{i=1}^{d} \theta_{t+1}^i S_t^i \\
&= \theta_{t+1}^0 S_t^0 - \theta_t \cdot S_t + \sum_{i=1}^{d} \theta_{t+1}^i S_t^i \\
&= \theta_{t+1} \cdot S_t - \theta_t \cdot S_t \\
&= 0
\end{aligned}$$

最後の等式で，θ が self-financing を使った．

次に $V_u(\phi) \geq 0$ と $P(V_T(\phi) > 0) > 0$ を示す．A^c では $V_u(\phi) = 0$ である．A 上では $u \leq t$ のときは $V_u(\phi) = 0$ である．$u > t$ のとき

$$\begin{aligned} V_u(\phi) = \phi_u \cdot S_u &= \theta_u^0 S_u^0 - \frac{(\theta_t \cdot S_t) S_u^0}{S_t^0} + \sum_{i=1}^d \theta_u^i S_u^i \\ &= \theta_u \cdot S_u - (\theta_t \cdot S_t) \frac{S_u^0}{S_t^0}. \end{aligned}$$

条件から $\theta_u \cdot S_u \geq 0$, $u > t$ で $(\theta_t \cdot S_t) < 0$, $S^0 \geq 0$ であるから $V_u(\phi) \geq 0$ が成り立つ．

最後に A 上で $V_T(\phi) > 0$ となることは $\theta_t \cdot S_t < 0$ より従う． □

条件付請求権 H を 1 つ固定する．H は単に $\mathscr{F}_T$ 可測な非負確率変数ということである．H は適当な $\theta \in \mathrm{SF}$ が存在して

$$V_T(\theta) = H \tag{1.19}$$

とできるとき，**複製可能** (attainable, replicable) という．このとき，viable の条件があれば，価値過程 $V_t(\theta)$ は一意に決まる．即ち $\theta, \theta' \in \mathrm{SF}$ が $V_T(\theta) = V_T(\theta') = H$ を満たすと，$V_t(\theta) = V_t(\theta')$ が全ての t で成立する．このことを示そう．この事実を経済学では**一物一価の法則**と呼ぶ．価格は一意的に決まるということである．そうでなければ，安い値段で買って，高い値段で売ればよいのだから裁定機会が存在することは直観的には明らかである．

命題 1.7. viable market で複製可能な H に対して，価値過程は一意的である．

証明 self-financing な許容 θ, ϕ がともに

$$V_T(\theta) = V_T(\phi) = H$$

を満たすとする．$V(\theta) \neq V(\phi)$ ならば $t_0 < T$ で

$$\begin{aligned} V_u(\theta) &= V_u(\phi), \quad u < t_0 \\ V_{t_0}(\theta) &\neq V_{t_0}(\phi) \end{aligned}$$

となる t_0 が取れる．$A = \{V_{t_0}(\theta) > V_{t_0}(\phi)\}$ とおく．$P(A) > 0$ として一般性を失わない．$X = V_{t_0}(\theta) - V_{t_0}(\phi)$ は $\mathscr{F}_{t_0}$ 可測である．さて常に安全証券 S^0 を 1 単位だけ所有しているという戦略を η とする．これは明らかに self-financing である．

新しい戦略 ψ を次で定める．

$$\begin{aligned} &\psi_u = 0 \quad u \leq t_0 \\ &\psi_u = (\beta_{t_0} X \eta_u - \theta_u + \phi_u) 1_A, \quad u > t_0 \end{aligned}$$

ψ が predictable であることは明らかである．self-financing の条件を確かめればよい．$u < t_0$ に対しては $\Delta\psi_{u+1} = 0$ だから明らか．$u > t_0$ に対しては，η, θ, ϕ すべて self-financing だから明らか．

$u = t_0$ のときだけ考えればよい．A^c では常に ψ は常に 0 なので明らか．A 上で考えよう．$\psi_{t_0} = 0$ だから $\psi_{t_0} \cdot S_{t_0} = 0$. また

$$\begin{aligned}
\psi_{t_0+1} \cdot S_{t_0} &= (\beta_{t_0} X \eta_{t_0+1} - \theta_{t_0+1} + \phi_{t_0+1}) \cdot S_{t_0} \\
&= \beta_{t_0} X S^0_{t_0} - \theta_{t_0+1} \cdot S_{t_0} + \phi_{t_0+1} \cdot S_{t_0} \\
&= \beta_{t_0} X S^0_{t_0} - \theta_{t_0} \cdot S_{t_0} + \phi_{t_0} \cdot S_{t_0} \qquad (\because \text{SF の条件 } \Delta\theta_{t_0+1} \cdot S_{t_0} = \Delta\phi_{t_0+1} \cdot S_{t_0} = 0) \\
&= (S^0_{t_0})^{-1}(V_{t_0}(\theta) - V_{t_0}(\phi)) S^0_{t_0} - V_{t_0}(\theta) + V_{t_0}(\phi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

両者から $\Delta\psi_{t_0} \cdot S_{t_0} = 0$ となるから，この場合も self-financing の条件が確かめられた．

さらに

$$V_T(\psi) = (\beta_{t_0} X S^0_T - V_T(\theta) + V_T(\phi)) 1_A = \beta_{t_0} X S^0_T 1_A.$$

以上で ψ が裁定機会であることが示されたので，viable であることに矛盾する．

最後に注意を与えておく．上の証明で $t_0 = 0$ の場合は少し注意が必要である．この場合は $\psi_0 = \psi_1$ と無条件に定義するので，上の定義とは食い違うことになるので，別個に確かめる必要がある．self-financing の条件は $u > 0$ で確かめればいいだけなので，これは上の証明がそのまま使える．$V_0(\psi) = 0$ だけ証明すればよい．

$$\begin{aligned}
V_0(\psi) &= \psi_1 \cdot S_0 = (\beta_0 X \eta_1 - \theta_1 + \phi_1) \cdot S_0 = (S^0_0)^{-1} X S^1_0 - \theta_1 \cdot S_0 + \phi_1 \cdot S_0 \\
&= X - V_0(\theta) + V_0(\phi) = 0
\end{aligned}$$

より，確かに成り立つ． □

2.　マルチンゲール

条件付き期待値

σ-field $\mathscr{G}$ が与えられたとき，$X \in L^1$ に対して，全ての $A \in \mathscr{G}$ に対し

$$E[X 1_A] = E[Y 1_A] \tag{2.1}$$

となる $\mathscr{G}$ 可測関数 Y が一意的に定まる．これを X の $\mathscr{G}$ で条件付けられた**条件付き期待値**と呼び $E[X|\mathscr{G}]$ とかく．特に $\mathscr{G}$ が有限生成の場合は disjoint 集合 $A_1, \ldots, A_K$ で $\cup_j A_j = \Omega$ を満たすものが取れ，$\mathscr{G}$ の元は $A_1, \ldots, A_K$ のうちのいくつかの和集合でかける．このときは

$$E[X|\mathscr{G}] = \sum_j \frac{1}{P(A_j)} E[X 1_{A_j}] 1_{A_j} \tag{2.2}$$

と表される．一般の場合はこの様な極限と考えてよい．

条件付き期待値に関しては次のことが成り立つ：

1. $E[\alpha X + \beta Y|\mathscr{G}] = \alpha E[X|\mathscr{G}] + \beta E[Y|\mathscr{G}]$.

2. $X \geq 0$ ならば $E[X|\mathscr{G}] \geq 0$.

3. φ を凸関数とすると，$\varphi(E[X|\mathscr{G}]) \leq E[\varphi(X)|\mathscr{G}]$.

4. $0 \leq X_n \uparrow X$ のとき $E[X_n|\mathscr{G}] \uparrow E[X|\mathscr{G}]$.

5. $0 \leq X_n$ のとき $E[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathscr{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X|\mathscr{G}]$.

6. $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$ のとき $E[E[X|\mathscr{G}_2]|\mathscr{G}_1] = E[X|\mathscr{G}_1]$

7. $E[E[X|\mathscr{G}]] = E[X]$

8. X が $\mathscr{G}$-可測なら $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$.

9. X が $\mathscr{G}$ と独立ならば $E[X|\mathscr{G}] = E[X]$.

8 だけ示しておこう．条件付き期待値を取っているのだから $XY \in L^1$, $Y \in L^1$ は仮定しなければならない．8 の主張には $XE[Y|\mathscr{G}] \in L^1$ であることも含まれている．実際 $|XE[Y|\mathscr{G}]| \leq E[|XY||\mathscr{G}]$ が成立する．

まず，8 が有界な X に対して成立することを示す．$A \in \mathscr{G}$ をとり $X = 1_A$ のときをまず見よう．任意に $B \in \mathscr{G}$ をとると

$$E[(1_A E[Y|\mathscr{G}])1_B] = E[1_{A\cap B}E[Y|\mathscr{G}]] = E[1_{A\cap B}Y] = E[1_{A\cap B}Y] = E[(1_A Y)1_B].$$

これは $E[1_A Y|\mathscr{G}] = 1_A E[Y|\mathscr{G}]$ を意味する．

次に $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$ が成り立つ有界な $\mathscr{G}$ 可測関数全体を Φ とおく．明らかに Φ はベクトル空間であり，定数関数を含む．また Φ の非負単調増大列 $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots$ が有界な関数 X に概収束すると，$E[X_n Y|\mathscr{G}] = X_n E[Y|\mathscr{G}]$ で極限を取れば，優収束定理から $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$ が成り立つ．よって，Dynkin 族定理から Φ は $\mathscr{G}$ 可測な有界関数全体を含む．

次に $Y \in L^1$ として，$\mathscr{G}$ 可測関数 X が $XY \in L^1$ を満たしているとする．$X_n = X1_{\{|X|\leq n\}}$ とおくと X_n は有界だから

$$E[X_n Y|\mathscr{G}] = X_n E[Y|\mathscr{G}].$$

ここで $n \to \infty$ とすれば，有収束定理から左辺は $E[XY|\mathscr{G}]$ に概収束する．右辺は $XE[Y|\mathscr{G}]$ に概収束する．よって $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$ が成立していることが分かる．

停止時刻

さて，確率過程の時間発展を記述するとき，重要な概念として停止時刻がある．τ が**停止時刻**とは，任意の t に対し

$$\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \tag{2.3}$$

をみたす $\mathbb{Z}_+$-値の確率変数のことである．

τ が停止時刻とするとき，σ-fileld $\mathscr{F}_\tau$ を

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F};\, A \cap \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \quad \forall t\} \tag{2.4}$$

で定める．これは時刻 τ までに得られる情報を表している．

命題 2.1. τ を停止時刻，$A \in \mathscr{F}_\tau$ に対して

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega) & \omega \in A \\ \infty & \omega \notin A \end{cases} \tag{2.5}$$

と定めると，τ_A も停止時刻である．

証明　条件 (2.3) を確かめればよい．$A \in \mathscr{F}_\tau$ であるから

$$\{\tau_A \le t\} = \{\tau \le t\} \cap A \in \mathscr{F}_t.$$

□

マルチンゲール

さて σ-fields の増大列 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ が与えられているとき，確率過程 (X_t) がすべての t に対して X_t が $\mathscr{F}_t$-可測であるという条件を満たすとき，(X_t) は $(\mathscr{F}_t)$ に**適合** (adapted) であるといった．さらに可積分な確率過程 (M_t) が $(\mathscr{F}_t)$-adapted で

$$E[M_{t+1}|\mathscr{F}_t] = M_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{2.6}$$

を満たすとき，**マルチンゲール**であるという．マルチンゲールの条件は

$$E[\Delta M_{t+1}|\mathscr{F}_t] = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{2.7}$$

と同値である．またこれから $E[\Delta M_{t+1}] = 0$ 従って $E[M_{t+1}] = E[M_t]$ が成り立つ．

また (2.6) の代わりに

$$E[M_{t+1}|\mathscr{F}_t] \ge M_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

が成り立つときは**劣マルチンゲール**，

$$E[M_{t+1}|\mathscr{F}_t] \le M_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

が成り立つときを，**優マルチンゲール**という．

定義 2.2. 確率過程 $X = (X_t)$ と predictable process $\phi = (\phi_t)$ が与えられたとき新たな確率過程 $\phi \cdot X$ を

$$(\phi \cdot X)_t = \phi_1 \Delta X_1 + \phi_2 \Delta X_2 + \cdots + \phi_t \Delta X_t \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.8}$$

で定める．また $(\phi \cdot X)_0 = 0$ と定義する．

注意 2.1. ϕ_0 は定義されている必要はない．定義されている場合は $\mathscr{F}_{-1}$ 可測を仮定することとなるが，$\mathscr{F}_{-1}$ は定義されていないので $\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0$ とみなす．また ϕ_0 が定義されているときは $(\phi \cdot X)_0 = \phi_0 X_0$ と定義し

$$(\phi \cdot X)_t - (\phi \cdot X)_0 = \phi_1 \Delta X_1 + \phi_2 \Delta X_2 + \cdots + \phi_t \Delta X_t \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.9}$$

と定義する．しかし，ここではこの規約は使わず，$(\phi \cdot X)_0 = 0$ として議論を進める．

上記の $\phi \cdot X$ の定義は，確率積分の離散版と考えることが出来る．特に離散の場合は収束性を気にする必要がないという利点がある．但し，可積分性は注意する必要がある．ϕ が有界な場合は，X の可積分性が，そのまま $\phi \cdot X$ の同種の可積分性を保証するようになる．例えば X が可積分ならば（すなわち，任意の $t \in \mathbb{T}$ に対し X_t が L^1) $\phi \cdot X$ も可積分となり，X が 2 乗可積分なら $\phi \cdot X$ も 2 乗可積分となる．

ϕ が有界でない場合も，X が 2 乗可積分，ϕ も 2 乗可積分とすれば $\phi \cdot X$ は可積分となる．他にも Hölder の不等式を利用した定式化も可能であるが，それらを実際に使うことはない．

また $X = (X_t)$ がマルチンゲールのとき，定義 3.4 の変換を**マルチンゲール変換** (martingale transform) と呼ぶことがある．こちらの用語の方がよく使われる．

定義 2.2 の確率積分は，既に定義した利得過程 (1.5), がその形をしている．あるいは self-financing を仮定して，価値過程が確率積分で表されている．連続パラメーターの場合は確率積分の理論がさらに有効に利用されることになる．

命題 2.3. X がマルチンゲールで predictable process ϕ が有界なとき，$\phi \cdot X$ はマルチンゲールである．X が 2 乗可積分のときは ϕ に 2 乗可積分性を仮定しても $\phi \cdot X$ はマルチンゲールになる．

また X が劣マルチンゲールで predictable process ϕ が有界で非負のとき，$\phi \cdot X$ は劣マルチンゲールになる．

証明 $\phi \cdot X$ の可積分性の条件は明らかである．さらに

$$\begin{aligned} E[(\phi \cdot X)_{t+1} | \mathscr{F}_t] &= E[(\phi \cdot X)_t + \phi_{t+1} \Delta X_{t+1} | \mathscr{F}_t] \\ &= (\phi \cdot X)_t + E[\phi_{t+1} \Delta X_{t+1} | \mathscr{F}_t] \\ &= (\phi \cdot X)_t + \phi_{t+1} E[\Delta X_{t+1} | \mathscr{F}_t] \\ &= (\phi \cdot X)_t. \quad (\because \ (2.7)) \end{aligned}$$

よって $\phi \cdot X$ はマルチンゲールになる．

また X が劣マルチンゲールのときは上の計算で ϕ の非負性を使って

$$\phi_{t+1} E[\Delta X_{t+1} | \mathscr{F}_t] \geq 0$$

に注意すれば $\phi \cdot X$ は劣マルチンゲールになる． □

この性質を使って，マルチンゲールを特徴付けることができる．

命題 2.4. $(\mathscr{F}_t)$-adapted な可積分な確率過程 (M_t) がマルチンゲールであるための必要十分条件は任意の有界な predictable process ϕ に対し

$$E[(\phi \cdot M)_t] = E[\sum_{u=1}^{t} \phi_u \Delta M_u] = 0 \tag{2.10}$$

が成り立つことである．

証明　M がマルチンゲールならば $X = \phi \cdot M$ もマルチンゲールで，$X_0 = 0$ だから $E[(\phi \cdot M)_t] = E[X_0] = 0$ となる．

逆に (2.10) がすべての有界な predictable process ϕ に対して成り立っているとする．t を任意にとり固定しておく．そして $A \in \mathscr{F}_t$ をとり，$\phi_{t+1} = 1_A$ で，その他の u については $\phi_u = 0$ ととると

$$0 = E[(\phi \cdot M)_T] = E[1_A \Delta M_{t+1}].$$

A は任意だから，$E[\Delta M_{t+1} | \mathscr{F}_t] = 0$ となり，M がマルチンゲールであることが分かる．□

任意抽出定理

次の定理を **Doob の任意抽出定理**という．

定理 2.5. (X_t) を優マルチンゲール，σ, τ を有界な停止時刻で $\sigma \leq \tau$ が成り立っているとする．このとき

$$E[X_\tau | \mathscr{F}_\sigma] \leq X_\sigma \tag{2.11}$$

が成り立つ．X がマルチンゲールであれば，(2.11) で等号が成立する．劣マルチンゲールであれば逆向きの不等式が成立する．

証明　$\phi = (\phi_t)$ を

$$\phi_t = 1_{\{\sigma < t \leq \tau\}}$$

と定める．すると

$$\{\sigma < t \leq \tau\} = \{\sigma < t\} \cap \{\tau < t\}^c$$

より ϕ は非負で predictable である．変換 $\phi \cdot X$ を考えると τ の有界性から $\tau \leq k$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在する．よって

$$|(\phi \cdot X)_t| \leq |X_0| + \cdots + |X_k|$$

より $Z_t = (\phi \cdot X)_t$ は可積分で優マルチンゲールになる．$Z_0 = 0$ で $Z_k = X_\tau - X_\sigma$ であるから

$$0 = E[Z_0] \geq E[Z_k] = E[X_\tau - X_\sigma].$$

次に $A \in \mathscr{F}_\sigma$ として

$$\sigma_A = \begin{cases} \sigma, & \omega \in A \\ k, & \omega \notin A \end{cases} \qquad \tau_A = \begin{cases} \tau, & \omega \in A \\ k, & \omega \notin A \end{cases}$$

σ_A, τ_A は命題 2.1 から停止時刻で，上の結果を σ_A, τ_A について適用すると

$$E[X_\tau; A] \le E[X_\sigma; A]$$

が得られる．これが求める結果である． □

定義 2.6. X を確率過程で τ を停止時刻とするとき，τ で停止させた確率過程 X^τ を $X_t^\tau = X_{\tau\wedge t}$ で定義する．

定理 2.7. X を (優) マルチンゲール，τ を停止時刻とすると X^τ も (優) マルチンゲール である．劣マルチンゲールのときも同様.

Doob 分解

定理 2.8. X を優マルチンゲールとする．X は次のように表現される：

$$X_t = X_0 + M_t - A_t. \tag{2.12}$$

ここで (M_t) は $M_0 = 0$ であるマルチンゲール，(A_t) は $A_0 = 0$ である predictable な増加過程．さらにこの分解は一意的である．

証明 次のように帰納的に定めればよい．

$$\begin{aligned} A_t &= A_{t-1} + X_{t-1} - E[X_t|\mathscr{F}_{t-1}], \\ M_t &= M_{t-1} + X_t - E[X_t|\mathscr{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

□

3. 同値マルチンゲール測度 (EMM)

条件付請求権の価格付けはマルチンゲールの理論と密接に結びついている．そこで discounted な株価過程を $(\overline{S})$ とする．この $(\overline{S})$ をマルチンゲールにするような確率測度 Q が存在したとしよう．即ち

$$E^Q[\Delta\overline{S}_t^i|\mathscr{F}_{t-1}] = 0, \quad i = 1, \dots, d$$

が成り立っているとする．すると，

$$\overline{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \overline{G}_t(\theta) = \theta_1 \cdot S_0 + \sum_{u=1}^t \theta_u \cdot \Delta\overline{S}_u = \theta_1^0 S_0^0 + \sum_{i=1}\left(\theta_1^i S_0^i + \sum_{u=1}^t \theta_u^i \Delta\overline{S}_u^i\right)$$

が成り立つ．右辺はマルチンゲール変換の形をしているから，$\overline{V}_t(\theta)$ がマルチンゲールであることは自明であるように思うが，可積分性が分からないのである．マルチンゲール変換がマルチンゲールであることは θ_u^i が有界であればよいが，このことは仮定されていない．

従って $(\overline{V}_t(\theta))$ がマルチンゲールであることは決して自明ではないが，このことは後の定理 3.3 で示すことにし，$(\overline{V}_t(\theta))$ がマルチンゲールになっていることはひとまず認めて議論を進める．$(\overline{V}_t(\theta))$ がマルチンゲールであることが分かると，この事実から裁定機会が存在しないことが示せる．θ を任意の self-financing な戦略で，$V_0(\theta)=0$ かつ $V_T(\theta)\geq 0$ となるものとする．$(\overline{V}_t(\theta))$ は Q の下ではマルチンゲールである．特に $E[\overline{V}_T(\theta)]=E[V_0(\theta)]=0$ となり，これから $V_T(\theta)=0$ Q-a.e. が従う．Q と P が同値ならば (i.e., $P(A)=0\Leftrightarrow Q(A)=0$) であれば，$V_T(\theta)=0$ P-a.e. となり，裁定機会が存在しないことが示せた．従って次の定理が得られる．

定理 3.1. P と同値な確率測度 Q で，$(\overline{S})$ をマルチンゲールにするものが存在すれば，市場は viable である．即ち裁定機会は存在しない．

ここで言葉を1つ定義しておこう．

定義 3.2. $(\overline{S})$ をマルチンゲールにする P と同値な確率測度を，同値マルチンゲール測度 (equivalent martingale measure = EMM) とよぶ．

従って

- 同値マルチンゲール測度が存在すれば市場は viable である

であることがしめせた．

さて，上の証明で使った $\overline{V}_t(\theta)$ が マルチンゲールであることの証明を与えておく．特に Q について可積分という性質を示せばよいことになる．このことは決して自明ではないので証明をつけておく．

定理 3.3. Q を同値マルチンゲール測度，$H\geq 0$ を複製可能な条件付請求権とする．即ちある $\theta\in\mathrm{SF}$ を用いて $H=V_T(\theta)$ と表現できるとする．すると $\beta_T H$ は Q-可積分で，価値過程 $V_t(\theta)$ は

$$V_t(\theta)=\beta_t^{-1}E^Q[\beta_T H|\mathscr{F}_t] \tag{3.1}$$

と表現される．

証明　$H=V_T(\theta)$ が成り立っているとする．割り引かれた価値過程を $\overline{V}=\overline{V}(\theta)$ と表す．まず (逆向きの) 帰納法で $\overline{V}_t\geq 0$ を示す．$t=T$ のときは $\overline{V}_T=\beta_T H\geq 0$ より明らか．

次に $\overline{V}_t\geq 0$ を仮定する．このとき $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$A_n=\{|\theta_t|\leq n,\,|\overline{V}_{t-1}|\leq n\}$$

とおくと $A_n\in\mathscr{F}_{t-1}$ である．θ は self-financing だから

$$\overline{V}_t=\overline{V}_{t-1}+\theta_t\cdot\Delta\overline{S}_t.$$

両辺に 1_{A_n} をかけて

$$\overline{V}_t 1_{A_n} = \overline{V}_{t-1} 1_{A_n} + \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n}. \tag{3.2}$$

左辺は非負だから

$$\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} \geq -\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n}.$$

両辺可積分だから条件付き平均をとって

$$\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} | \mathscr{F}_{t-1}] \geq -E[\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n} | \mathscr{F}_{t-1}] = -1_{A_n} \theta_t \cdot E[\Delta\overline{S}_t | \mathscr{F}_{t-1}] = 0.$$

ここで $n \to \infty$ とすれば $\overline{V}_{t-1} \geq 0$ Q-a.e. が従う．

正値性が分かれば，(3.2) に戻って，右辺が可積分なので左辺も可積分となり

$$E[\overline{V}_t 1_{A_n}] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n}] + E[\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n}] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n}].$$

ここで $n \to \infty$ として $E[\overline{V}_t] = E[\overline{V}_{t-1}]$ を得る．$\overline{V}_0$ は定数で可積分なので，全ての t に対して $\overline{V}_t$ は可積分になる．

最後に $(\overline{V}_t)$ がマルチンゲールになることを示しておこう．$A \in \mathscr{F}_{t-1}$ を任意に取る．(3.2) の両辺に 1_A をかけて積分すれば

$$E[\overline{V}_t 1_{A_n} 1_A] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} 1_A] + E[\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n} 1_A] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} 1_A].$$

ここで再び $n \to \infty$ として

$$E[\overline{V}_t 1_A] = E[\overline{V}_{t-1} 1_A].$$

これでマルチンゲールであることが示せた．従って

$$\overline{V}_t(\theta) = E^Q[\beta_T H | \mathscr{F}_t]$$

より

$$V_t(\theta) = \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T H | \mathscr{F}_t]$$

が得られる． □

<u>価格付け</u>

(時刻 T における) 条件付け請求権 H が複製可能なら，その (時刻 0 における) 価格 $\pi(H)$ は

$$\pi(H) = \overline{V}_0(\theta) = E^Q[\beta_T H | \mathscr{F}_0] = E^Q[\beta_T H] \tag{3.3}$$

で与えられる．これは H を複製するのに必要な最初の資金が $\overline{V}_0(\theta)$ であるから自然な結果である．

優ヘッジ

もう少し一般的な観点から価格付けの問題を考えてみよう．

定義 3.4. 条件付き請求権 H が与えられたとき，初期投資を x として $V_T(\theta) \geq H$ となる許容戦略 θ を (x, H)**-ヘッジ**という．

定義のような戦略を**優ヘッジ** (superhedging) という．これは売り手の側の見方で，このような戦略でポートフォリオを組めば，満期時に H を要求されたときに，損失を生むことなく応じることが出来る．従って実用の立場から言えば，この優ヘッジ戦略を見出すことが重要な問題となる．特に $V_T(\theta) = H$ となる θ を最小ヘッジ (minimal hedge) という．

さて，複製が可能な条件付き請求権の場合はこれでよいが，一般論としては次のように考える必要がある．売り手の立場からはヘッジできることが必要なので，売り手値段 (seller's price) は

$$\pi_s = \inf\{z \geq 0; \exists\theta \in \mathrm{SF} \text{ s.t. } V_T(\theta) = z + G_T(\theta) \geq H\}$$

買い手の立場からは，買い手値段 (buyer's price) は

$$\pi_b = \sup\{y \geq 0; \exists\theta \in \mathrm{SF} \text{ s.t. } -y + G_T(\theta) \geq -H\}$$

とすれば，満期時に損失を生むことがない．

命題 3.5. 市場が viable であれば次が成立する:

$$\pi_b \leq E^Q[\beta_T H] \leq \pi_s. \tag{3.4}$$

証明　$V_T(\theta) = z + G_T(\theta) \geq H$ としよう．$z = V_0(\theta)$ である．$\overline{V}_T = V_0 + \overline{G}_T$ であり，$\overline{S}$ がマルチンゲールであるから $E^Q[\overline{G}_T] = 0$ となる．従って

$$z = V_0(\theta) = E^Q[\overline{V}_T] = E^Q[\beta_T V_T] \geq E^Q[\beta_T H]$$

inf をとって

$$\pi_s \geq E^Q[\beta_T H]$$

が得られる．$\pi_b \leq E^Q[\beta_T H]$ も同様である． □

上のことから市場が viable で，条件付き請求権 H が複製可能な場合は $\pi_s = \pi_b = E^Q[\beta_T H]$ となり，これが合理的な価格であることが分かる．

コール・プットパリティ

ここでもう一度コーループットパリティを見直してみよう．コールとプットの値段は

$$\beta_t C_t = E^Q[\beta_T (S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t]$$
$$\beta_t P_t = E^Q[\beta_T (K - S_T)_+ | \mathscr{F}_t]$$

であるから

$$\begin{aligned}
C_t - P_t &= \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T (S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t] - \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T (K - S_T)_+ | \mathscr{F}_t] \\
&= \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T (S_T - K) | \mathscr{F}_t] \\
&= \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T S_T | \mathscr{F}_t] - \beta_t^{-1} E[\beta_T K | \mathscr{F}_t] \\
&= \beta_t^{-1} \beta_t S_t - (1+\rho)^t (1+\rho)^{-T} K \\
&= S_t - (1+\rho)^{-(T-t)} K
\end{aligned}$$

となり，(1.1) が再び得られた．

多期間のリスク中立測度

多期間の場合のリスク中立測度 Q を求め，コールオプションの価値過程 V_t が

$$V_t = (1+\rho)^{-(T-t)} E^Q[((S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t] \tag{3.5}$$

で与えられることを示す．ここで $E^Q[\ \ |\mathscr{F}_t]$ は**条件付き期待値**である．

リスク中立測度 Q の構成について述べる．

$$R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

と定める．Q は，この確率変数列 $R_1, R_2, \ldots, R_T$ が独立同分布になるようなもので，分布は

$$Q(R_t = 1+b) = q, \quad Q(R_t = 1+a) = 1-q$$

で与えられる．

$$q = \frac{\rho - a}{b - a}$$

であったから

$$\begin{aligned}
E^Q[R_t] &= (1+b)\frac{\rho - a}{b - a} + (1+a)\frac{b - \rho}{b - a} \\
&= \frac{\rho - a + b\rho - ba + b - \rho + ab - a\rho}{b - a} \\
&= \frac{(b-a)(1+\rho)}{b-a} \\
&= 1 + \rho.
\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
E^Q[\beta S_{t+1} | \mathscr{F}_t] &= \beta E^Q[S_t R_{t+1} | \mathscr{F}_t] \\
&= \beta S_t E^Q[R_{t+1} | \mathscr{F}_t] \\
&= \beta S_t E^Q[R_{t+1}] \quad (\because R_{t+1} \text{ と } \mathscr{F}_t \text{ の 独立性})
\end{aligned}$$

$$= \beta S_t(1+\rho) = S_t.$$

これは $\{\beta^t S_t\}$ がマルチンゲールになっていることを意味する:

$$E^Q[\beta^{t+1} S_{t+1} | \mathscr{F}_t] = \beta^t S_t.$$

この測度 Q を用いると

$$\begin{aligned}
&(1+\rho)^{-(T-t)} E^Q[(S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t] \\
&\qquad = (1+\rho)^{-(T-t)} E^Q[(S_t R_{t+1} \ldots R_T - K)_+ | \mathscr{F}_t] \\
&\qquad = (1+\rho)^{-(T-t)} \sum_{s=0}^{T-t} \binom{T-t}{s} q^s (1-q)^{T-t-s} (S_t(1+b)^s(1+a)^{T-t-s} - K)_+ = V_t.
\end{aligned}$$

これは (2.7) で求めたものと一致する．これで価値過程がリスク中立測度による条件付き期待値として表されることが確認できた.

第4章　Black-Scholes 公式

多期間2項モデルの時間分割を細かくして行った極限として，連続時間の最も基本的なモデルである Black-Scholes モデルが得られる．そのことを以下に見ていく．

1.　離散の極限

時間区間 $[0,T]$ を N 等分する．$h_N = \frac{T}{N}$ とおいて，時刻列 $\{0, h_N, 2h_N, \ldots, Nh_N\}$ を取る．ここで N ステップの2項モデルを考える．パラメータとして，a, b, ρ があったが，これらは N に応じて変えていく．従って a_N のように依存性を明確にすべきであるが，かえって煩雑になるので単に a とかく．h_N も単に h とかく．定数として $r \geq 0$, $\sigma > 0$ を与え，これをパラメーターとして a, b, ρ が次の関係を満たすように N に依存して取る．

$$\rho = rh$$
$$\log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right) = \sigma\sqrt{h} = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}},$$
$$\log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right) = -\sigma\sqrt{h} = -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}.$$

ここで ρ に関して

$$\lim_{N\to\infty}(1+\rho)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{rT}{N}\right)^N = e^{rT}$$

が成り立つことに注意しておく．さらに u, d を次のように定める (やはり N に依存する)

$$u = 1+b = \left(1+\frac{rT}{N}\right)e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}$$
$$d = 1+a = \left(1+\frac{rT}{N}\right)e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}.$$

時刻 kh における株価を S_k と表し，

$$R_k = \frac{S_k}{S_{k-1}}$$

と定める (これらも N に依存するが，とくに明示しない)．リスク中立確率は次を満たした．

$$Q(R_k = 1+b) = q = \frac{\rho - a}{b-a}, \quad Q(R_k = 1+a) = 1-q = \frac{b-\rho}{b-a}.$$

ここで新たな独立同分布の確率変数列 $\{Y_k\}_{k=1,\dots,N}$ を次で定める．

$$Y_k = \log\left(\frac{R_k}{1+\rho}\right).$$

これから

$$Z_N = \sum_{k=1}^{N} Y_k = \sum_{k=1}^{N} \log R_k - N\log(1+\rho)$$

とおくと，時刻 $T = Nh$ における株価は

$$S_N = S_0 \prod_{k=1}^{N} R_k = S_0(1+\rho)^N \exp\left\{\sum_{k=1}^{N} Y_k\right\} = S_0(1+\rho)^N e^{Z_N}$$

と表される．よってコールオプション $C = (S_N - K)_+$ の価格は

$$\begin{aligned} V_0(C) &= \beta^N E^Q[(S_N - K)_+] \\ &= \beta^N E^Q[(S_0(1+\rho)^N e^{Z_N} - K)_+] \\ &= E^Q[(S_0 e^{Z_N} - (1+\rho)^{-N} K)_+] \end{aligned} \tag{1.1}$$

で得られる．ここで $N \to \infty$ の極限を取ることを次に考える．

Y_k の分布

Y_k の平均を μ, 分散を v として計算する．まず平均は

$$\begin{aligned} E^Q[Y_k] &= E^Q\left[\log\left(\frac{R_k}{1+\rho}\right)\right] \\ &= \log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right)q + \log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right)(1-q) \\ &= \sigma\sqrt{h}q - \sigma\sqrt{h}(1-q) \\ &= (2q-1)\sigma\sqrt{h}. \end{aligned}$$

また 2 次のモーメントは

$$\begin{aligned} E^Q[Y_k^2] &= E^Q\left[\log\left(\frac{R_k}{1+\rho}\right)\right] \\ &= \left\{\log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right)\right\}^2 q + \left\{\log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right)\right\}^2 (1-q) \\ &= \sigma^2 hq + \sigma^2 h(1-q) = \sigma^2 h \end{aligned}$$

なので，分散は

$$v = E^Q[Y_k^2] - E^Q[Y_k]^2 = \sigma^2 h - (2q-1)^2\sigma^2 h.$$

それぞれの極限を求めるために q を調べよう.

$$\begin{aligned}1-q &= \frac{b-\rho}{b-a} \\ &= \frac{1+b-(1+\rho)}{1+b-(1+a)} \\ &= \frac{(1+\rho)e^{\sigma\sqrt{h}}-(1+\rho)}{(1+\rho)e^{\sigma\sqrt{h}}-(1+\rho)e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\ &= \frac{e^{\sigma\sqrt{h}}-1}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}2q-1 &= 1-2(1-q) \\ &= 1-2\frac{e^{\sigma\sqrt{h}}-1}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\ &= \frac{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}-2e^{\sigma\sqrt{h}}+2}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\ &= \frac{2-e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\ &= \frac{1-\cosh\sigma\sqrt{h}}{\sinh\sigma\sqrt{h}} \sim -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h}.\end{aligned}$$

以上により

$$N\mu = N(2q-1)\sigma\sqrt{h} \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h}\right)\sigma\sqrt{h} = -\frac{1}{2}\sigma^2 Nh = -\frac{1}{2}\sigma^2 T.$$

また

$$Nv = N\sigma^2 h - N(2q-1)^2\sigma^2 h = \sigma^2 T - (2q-1)^2\sigma^2 T \sim \sigma^2 T.$$

ここで次の中心極限定理を使う.

定理 1.1. 各 $N \in \mathbb{N}$ に対して独立同分布の確率変数 $\{Y_k^N\}_{k=1,\dots,N}$ が与えられている．さらに平均を μ_N, 分散を σ_N^2 とするとき，$N\mu_N \to \mu$, $N\sigma_N^2 \to \Sigma^2$ が成立している．このとき $Z_N = \sum_{k=1}^N Y_k^N$ は平均 μ, 分散 Σ^2 の正規分布に収束する.

これを我々の場合使うと Z_N が平均 $-\frac{1}{2}\sigma^2 T$, 分散 $\sigma^2 T$ の正規分布に収束する．この分布を持つ確率変数を Z とすると，プットオプションの極限での価格は(1.1) で $N \to \infty$ として

$$V_0(C) = E^Q[(S_0 e^Z - e^{-rT}K)_+] \tag{1.2}$$

で与えられる.

2.　Black-Scholes の公式

$$X = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(Z + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$$

とおくと，X は $N(0,1)$ に従う．書き換えると

$$Z = \sigma\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

であるから，$V_0(C)$ の値は

$$V_0(C) = \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

x の積分範囲は

$$\log\left(\frac{K}{S_0}\right) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x$$

をといて

$$x = \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

この右辺を γ とおくと，

$$\begin{aligned}
V_0(C) &= \int_{\gamma}^{\infty} (S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
&= S_0 \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - e^{-rT}K \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
&= S_0 \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T})^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx - e^{-rT}K(1 - \Phi(\gamma)) \\
&= S_0 \int_{\gamma - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx - e^{-rT}K(1 - \Phi(\gamma)) \\
&= S_0(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})) - e^{-rT}K(1 - \Phi(\gamma)).
\end{aligned}$$

但し，Φ は $N(0,1)$ の分布関数である：

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy.$$

ここで $d^- = -\gamma$, $d^+ = d^- + \sigma\sqrt{T}$ とおくと

$$\begin{aligned}
1 - \Phi(\gamma) &= \Phi(-\gamma) = \Phi(d^-) \\
1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T}) &= \Phi(d^+)
\end{aligned}$$

である．即ち

$$d^{\pm} = \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

である．これを使うと

$$V_0(C) = S_0\Phi(d^+) - e^{-rT}K\Phi(d^-).$$

これが Black-Scholes の公式と呼ばれるコールオプションの価格を与える式である．

同様に時刻 t における価格は

$$V_t(C) = S_t\Phi(d_t^+) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_t^-). \tag{2.1}$$

ただし

$$d_t^{\pm} = \frac{\log(\frac{K}{S_t}) - (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である．

(2.1) のコールオプションの価格を c とすると c は S_t, t, K, T, r, σ の関数となる．c は次のような性質があることが確かめられる．

1. c を S_t と t の関数とみなすとき，即ち $V_t(C) = c(S_t, t)$ と表して， $c(x, t)$ は次の Black-Scholes の偏微分方程式を満たしている:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + rx\frac{\partial c}{\partial x} - rc = 0. \tag{2.2}$$

2. 次の関係を満たしている．

   - $\lim_{T\to t} c(S_t, t) = (S_t - K)_+$
   - $\dfrac{\partial c}{\partial \sigma} > 0$
   - $\lim_{\sigma\to\infty} c(S_t, t) = S_t$
   - $\lim_{\sigma\to 0} c(S_t, t) = (S_t - Ke^{-r(T-t)})_+$
   - $\dfrac{\partial c}{\partial x} = \Phi(d_+)$

第5章　アメリカンオプション

1.　離散アメリカ型オプション

前節までは満期日が決まっているヨーロッパ型オプションについて論じた．ここでは，行使時刻をランダムに選べるアメリカ型オプションについて述べる．

アメリカ型オプション

取引時刻を $t = 0, 1, \ldots, T$ とし，安全証券は S^0, 株価などの危険証券を $S^1, \ldots, S^d$ とする．割引率を $\beta_t = (S_t^0)^{-1}$ とおく．$S = (S^0, S^1, \ldots, S^d)$ とかく．時刻 t までに生成される σ-field を $\mathscr{F}_t$ と表す.

$t \in \mathbb{T}$ に対して条件付き請求権 $f_t(S)$ が与えられ，ランダムに時刻を選んでこれを行使できるようなオプションを考え，その価格付けの問題を考えよう．この様なオプションを**アメリカ型オプション**という．市場は viable で完備であるとする．測度 P は初めから同値マルチンゲール測度をとって考える．以下では測度はこの P に固定しておく．権利の行使はランダムであるが，未来の情報を使うことが出来ないという制約をつける．数学的には行使時刻は停止時刻であるとする．ここに τ が停止時刻とは，任意の t に対し

$$\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \tag{1.1}$$

をみたす $\mathbb{Z}_+$-値の確率変数のことであった．一般論としては $\mathbb{Z}_+$-値であるが，取引時刻は $\mathbb{T}$ としているのでここで考えるのは $\mathbb{T}$-値のみである．さて，停止時刻 τ で権利行使すれば，$f_\tau(S)$ の利得が得られる．従ってその価格は $E[\beta_\tau f_\tau(S)]$ である．τ は $\mathbb{T}$-値停止時刻を自由に選べるから

$$x = \sup_\tau E[\beta_\tau f_\tau(S)] \tag{1.2}$$

が価格と考えられる．一方またこのオプションを売る側の立場からはどの時刻で権利行使されても hedge できるように複製しなければならないので，許容戦略 θ を

$$V_t(\theta) \ge f_t(S) \tag{1.3}$$

が全ての t で成り立つようにしなければならない．従って

$$V_0(\theta) = E[\overline{V}_\tau(\theta)] = E[\beta_\tau V_\tau(\theta)] \ge E[\beta_\tau f_\tau(S)]$$

なので $V_0(\theta) \ge x$ である．θ をうまく取れば，(1.3) を満たし，$V_0(\theta) = x$ とできることを示すのがこの節の目標である．従って (1.2) で定めた価格が合理的であることもこれで分かる.

2.　スネル包

定義 2.1. X を非負の確率過程とする．次で定まる確率過程 Z を**スネル包** (Snell envelope) と呼ぶ．

$$\begin{aligned} Z_T &= X_T \\ Z_{t-1} &= \max\{X_{t-1}, E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]\} \quad t = 1, 2, \ldots, T. \end{aligned}$$

次の命題が基本的である．

命題 2.2. (Z_t) を (X_t) のスネル包とすると，次が成り立つ．

1. Z は X より大きな最小の優マルチンゲールである．
2. $\tau^* = \min\{t \geq 0; Z_t = X_t\}$ とおくと，Z^{τ^*} はマルチンゲールである．

証明　$Z_t \geq X_t$ は定義より明らかで，また $Z_{t-1} \geq E[Z_t|\mathscr{F}_t]$ だから優マルチンゲールである．Z の最小性を言うために $Y = (Y_t)$ を $Y_t \geq X_t$ となる優マルチンゲールとする．明らかに $Y_T \geq X_T = Z_T$ である．いま $Y_t \geq Z_t$ とすると，

$$\begin{aligned} Y_{t-1} &\geq E[Y_t|\mathscr{F}_{t-1}] \quad (\because Y \text{ は優マルチンゲール}) \\ &\geq E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]. \quad (\because \text{仮定}) \end{aligned}$$

一方 $Y_{t-1} \geq X_{t-1}$ だから

$$Y_{t-1} \geq \max\{X_{t-1}, E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]\} = Z_{t-1}.$$

これで帰納的に示せた．

次に Z^{τ^*} がマルチンゲールになることを示そう．$\phi_t = 1_{\{\tau^* \geq t\}}$ とおくと，ϕ はpredictable で

$$Z_t^{\tau^*} = Z_0 + \sum_{u=1}^{t} \phi_u \Delta Z_u.$$

よって

$$Z_t^{\tau^*} - Z_{t-1}^{\tau^*} = \phi_t(Z_t - Z_{t-1}) = 1_{\{\tau^* \geq t\}}(Z_t - Z_{t-1}).$$

ところで $\tau^*(\omega) \geq t$ ならば $Z_{t-1}(\omega) > X_{t-1}(\omega)$ だから $Z_{t-1}(\omega) = E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}](\omega)$ が成り立っている．

$$\begin{aligned} E[Z_t^{\tau^*} - Z_{t-1}^{\tau^*}|\mathscr{F}_{t-1}] &= E[1_{\{\tau^* \geq t\}}(Z_t - E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}])|\mathscr{F}_{t-1}] \\ &= 1_{\{\tau^* \geq t\}} E[(Z_t - E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}])|\mathscr{F}_{t-1}] = 0. \end{aligned}$$

従って Z^{τ^*} はマルチンゲールになることが分かった． □

定義 2.3. 停止時刻 τ が次を満たすとき，X の最適停止時刻という：

$$E[X_\tau] = \sup_\sigma E[X_\sigma] \tag{2.1}$$

命題 2.4. (Z_t) を (X_t) のスネル包とする．

$$\tau^* = \min\{t \geq 0; Z_t = X_t\} \tag{2.2}$$

と定めると，τ^* は X の最適停止時刻である．また

$$Z_0 = \sup_\sigma E[X_\sigma] \tag{2.3}$$

が成り立つ．

証明 命題 2.2 より Z^{τ^*} はマルチンゲールであるから

$$Z_0 = E[Z_0^{\tau^*}] = E[Z_T^{\tau^*}] = E[Z_{\tau^*}] = E[X_{\tau^*}].$$

一方，任意の停止時刻 τ に対して Z^τ は優マルチンゲールであるから

$$Z_0 = E[Z_0^\tau] \geq E[Z_T^\tau] = E[Z_\tau] \geq E[X_\tau].$$

よって τ^* は最適である． □

最適停止時刻は一意的ではない．必要十分条件が次のように与えられる．

命題 2.5. 停止時刻 τ が最適停止時刻であるための必要十分条件は次のことが成り立つことである．

$$\begin{cases} Z_\tau = X_\tau \\ (Z^\tau) \text{ はマルチンゲールである．} \end{cases} \tag{2.4}$$

証明 $(\Rightarrow)$ τ が最適であれば

$$Z_0 = E[X_\tau|\mathscr{F}_0] \leq E[Z_\tau|\mathscr{F}_0].$$

また (Z^τ) は優マルチンゲールであるから

$$E[Z_\tau|\mathscr{F}_0] \leq Z_0.$$

よって

$$E[Z_\tau|\mathscr{F}_0] = E[X_\tau|\mathscr{F}_0].$$

ところで一般に $Z_\tau \geq X_\tau$ であるから，$Z_\tau = X_\tau$ となる．

さらに $Z_0 = E[Z_\tau|\mathscr{F}_0]$ であり，Z^τ が優マルチンゲールであるから

$$Z_0 \geq E[Z_t^\tau|\mathscr{F}_0] \geq E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_0]$$

両者から

$$E[Z_t^\tau|\mathscr{F}_0] = E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_0] = E[E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_t]|\mathscr{F}_0]$$

ところで優マルチンゲールの性質から $Z_t^\tau \geq E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_t]$ が成り立っているので，積分して等しいことから $Z_t^\tau = E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_t]$ が成り立つ．すなわち (Z^τ) はマルチンゲールである．

($\Leftarrow$) 逆に (Z^τ) がマルチンゲールならば，$Z_0 = E[Z_\tau|\mathscr{F}_0]$ でさらに $Z_\tau = X_\tau$ を使えば $Z_0 = E[X_\tau|\mathscr{F}_0]$. ここで 命題 2.4 の (2.3) を使えば，τ が最適であることが分かる． □

この命題を使えば，(2.2) で定めた τ^* は最小の最適停止時刻であることが分かる．

もう少し最適停止時刻について調べよう．次の命題は最大の最適停止時刻が存在することを示している．(Z_t) は優マルチンゲールであるから，マルチンゲール (M_t) と可予測増加過程 (A_t) で $A_0 = 0$ となるものが存在して

$$Z_t = M_t - A_t \tag{2.5}$$

と表される．ここで

$$\nu = \begin{cases} T & \text{if } A_T = 0 \\ \inf\{t;\ A_{t+1} \neq 0\} & \text{if } A_T \neq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

と定義すると，この ν が最大の最適停止時刻となる．

命題 2.6. 停止時刻 ν は (X_t) に対する最大の最適停止時刻である．

証明　ν が停止時刻であることは，(A_t) が可予測であることから分かる．また $j \leq \nu$ のとき，$A_j = 0$ だから，$Z_j = M_j$ となり $Z^\nu = X^\nu$ が分かるので Z^ν はマルチンゲールになる．ν が最適であることは $Z_\nu = X_\nu$ を示せばよい．

$$Z_\nu = \sum_{j=0}^{T} 1_{\{\nu=j\}} Z_j + 1_{\{\nu=T\}} Z_T = \sum_{j=0}^{T} 1_{\{\nu=j\}} \max\{X_j, E[Z_{j+1}|\mathscr{F}_j)\} + 1_{\{\nu=T\}} Z_T.$$

一方 Doob 分解から $E[Z_{j+1}|\mathscr{F}_j] = M_j - A_{j+1}$ で $\{\nu = j\}$ 上では $A_j = 0$ かつ $A_{j+1} > 0$ であるから $Z_j = M_j$ で

$$E[Z_{j+1}|\mathscr{F}_j] = M_j - A_{j+1} < Z_j.$$

これから

$$Z_j = \max\{X_j, E[Z_{j+1}|\mathscr{F}_j]\} = X_j$$

が $\{\nu = j\}$ 上で成立する．よって $Z_\nu = X_\nu$ が成り立つことが分かった．

最後に ν が最大であることを示す．もし停止時刻 τ が ν よりも大きければ $P(\tau > \nu) > 0$ となるので

$$E[Z_\tau] = E[M\tau] - E[A_\tau] = E[Z_0] - E[A_\tau] < E[Z_0]$$

となるから Z^τ はマルチンゲールにはなり得ない．従って命題 2.5 から τ は最適停止時刻にはならない． □

この定理によって，最適停止時刻は ν より前の時刻で $X_\tau = Z_\tau$ が成立しているものならどれでも最適停止時刻となることが分かる．時刻 ν では $X_\nu = Z_\nu$ となるのだから，待っていれば必ず $X_t = Z_t$ となる時刻が ν 以前にやってくる (結局 ν になるかもしれないが).

アメリカンオプションの価格付け

f_t の discount process を

$$\overline{f}_t = \beta_t f_t$$

とする．さらに $\overline{f}$ のスネル包を Z とする:

$$Z_T = \overline{f}_T,$$
$$Z_{t-1} = \max\{\overline{f}_{t-1}, E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]\}$$

Z_t はスネル包の定義であるが，条件付き請求権の価格とも見れる．時刻 $t-1$ の時点で 次の時点の Z_t を条件付き請求権とみなし，現時点 $t-1$ で $\overline{f}_{t-1}$ を選択するか，次の時点まで待って Z_t を得るかで，有利なほうを取るわけである．Z_t を取る場合は条件付き期待値が価格であった．以下帰納的に前の時刻の価格を決めていくことになる．Z_0 が時刻 0 における価格ということになる．これが妥当な価格であることを以下見てみよう．

$\tau^* = \min\{t \geq 0; Z_t = \overline{f}_t\}$ とおくと，命題 2.2 から

$$Z_0 = \sup_\tau E[\overline{f}_\tau] = E[\overline{f}_{\tau^*}]$$

となる．さて，(Z_t) は優マルチンゲールであったから

$$Z_t = Z_0 + \overline{M}_t - \overline{A}_t$$

とマルチンゲールと増加過程の差にかける．$Z_0 + \overline{M}_T = Z_T + \overline{A}_T \geq 0$ 注意しておこう．さて，完備性より，許容戦略 θ が存在して

$$\overline{V}_t(\theta) = Z_0 + \overline{M}_t$$

とあらわされる．ところで，Z^{τ^*} はマルチンゲールであったから，$t \leq \tau^*$ では $Z_t = Z_0 + M_t$ が成り立っている．特に

$$Z_{\tau^*} = Z_0 + \overline{M}_{\tau^*} = \overline{V}_{\tau^*}(\theta)$$

が成り立つ．よって

$$V_0(\theta) = E[\overline{V}_{\tau^*}(\theta)] = E[Z_{\tau^*}] = E[\overline{f}_{\tau^*}] = \sup_\tau E[\overline{f}_\tau].$$

したがって，

$$V_0(\theta) = Z_0 = \sup_\tau E[\overline{f}_\tau].$$

これら3つの量が全て等しくなるので，この節のはじめに述べたように，$\sup_\tau E[\overline{f}_\tau]$ を価格とすることの正当化ができ，また戦略 θ で hedge できることも示された．

3. アメリカンオプションとヨーロピアンオプション

命題 3.1. $\mathscr{C}_t$ を，(X_t) に対するアメリカンオプションの時刻 t での価格とする．また c_t を $h = X_T$ に対するヨーロピアンオプションの価格とする．このとき $\mathscr{C}_t \geq c_t$ が成り立つ．

また $c_t \geq X_t$ がすべての t に対して成立していれば，

$$c_t = \mathscr{C}_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T \tag{3.1}$$

が成り立つ．

証明 アメリカンオプションの割り引かれた値を $\overline{\mathscr{C}}_t$ とすると $\overline{\mathscr{C}}_t$ は優マルチンゲールだから

$$\overline{\mathscr{C}}_t \geq E^*[\overline{\mathscr{C}}_T | \mathscr{F}_t] = E^*[\overline{c}_T | \mathscr{F}_t] = \overline{c}_t.$$

よって $\overline{\mathscr{C}}_t \geq \overline{c}_t$ である．

次に $c_t \geq X_t$ が成り立っていれば $\overline{c}_t \geq \overline{X}_t$ で，$\overline{c}_t$ はマルチンゲールだから，$\overline{Z}_t$ の最小性から $\overline{c}_t \geq \overline{Z}_t = \overline{\mathscr{C}}_t$ となる． □

上の命題はアメリカンオプションの方が高いことをいっているが，アメリカンオプションの方が打つ手が多いのだから当然である．それでも $c_t \geq X_t$ のときは同じなのだから，これは満期まで待つのが一番有利ということである．例えば $(\overline{X}_t)$ が劣マルチンゲールの時は $c_t \geq X_t$ が成り立つ．実際

$$\overline{X}_t \geq E^*[\overline{X}_T | \mathscr{F}_t] = E^*[\overline{c}_T | \mathscr{F}_t] = \overline{c}_t$$

となって上の命題の条件が成り立っていることが分かる．

(S^0, S^1) の安全資産と危険資産の二つの資産の場合を考えてみよう．そして call option $X_t = (S_t^1 - K)_+$ を取ってみる．さらに $S_T^1 \geq S_t^1$ がすべての t について成り立っているとする．このとき

$$\begin{aligned}\overline{c}_t &= E[(S_T^0)^{-1}(S_T^1 - K)_+ | \mathscr{F}_t] \\ &\geq E[((S_T^0)^{-1} S_T^1 - (S_T^0)^{-1} K) | \mathscr{F}_t]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E[\overline{S}^1_T - (S^0_T)^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&= \overline{S}^1_t - (S^0_t)^{-1}E[(S^0_t)(S^0_T)^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&\geq \overline{S}^1_t - (S^0_t)^{-1}E[K|\mathscr{F}_t] \\
&= (S^0_t)^{-1}(S^1_t - K)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また $\overline{c}_t \geq 0$ だから $\overline{c}_t \geq (S^0_t)^{-1}(S^1_t - K)_+ = \overline{X}_t$ が分かる．従って命題 3.1 の後半の条件が成り立ち，ヨーロピアンとアメリカンの価値は同じになる．

この条件に比べると，$(\overline{X}_t)$ が劣マルチンゲールになるのはもっと強い条件になる．実際そのためには S^1 が増加という条件が必要になる．実際この条件があると

$$
\begin{aligned}
E[(S^0_{t+1})^{-1}(S^1_{t+1} - K)_+|\mathscr{F}_t] &\geq E[(S^0_{t+1})^{-1}(S^1_{t+1} - K)|\mathscr{F}_t] \\
&\geq E[\overline{S}^1_{t+1} - (S^0_{t+1})^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&= \overline{S}^1_t - E[(S^0_t)^{-1}(S^0_t)(S^0_{t+1})^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&= \overline{S}^1_t - (S^0_t)^{-1}E[(S^0_t)(S^0_{t+1})^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&\geq \overline{S}^1_t - (S^0_t)^{-1}E[K|\mathscr{F}_t] \\
&= (S^0_t)^{-1}(S^1_t - K).
\end{aligned}
$$

また左辺が正は明らかだから

$$
E[(S^0_{t+1})^{-1}(S^1_{t+1} - K)_+|\mathscr{F}_t] \geq (S^0_t)^{-1}(S^1_t - K)_+ = \overline{X}_t.
$$

これで $(\overline{X}_t)$ が劣マルチンゲールであることが示せた．

関連図書

[1] R. J. Elliott and P. E. Kopp, "*Mathematics of financial markets*," Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] G. Grimmett and D. Welsh, "*Probability : An Introduction*," 2nd ed., Oxford University Press, 2014.

[3] I. Karatzas and S. E. Shreve, "*Brownian motion and stochastic calculus*," Second edition, Springer-Verlag, New York, 1991.

[4] I. Karatzas and S. E. Shreve, "*Methods of mathematical finance*," Applications of Mathematics, 39, Springer-Verlag, New York, 1998.

[5] D. Lamberton and B. Lapeyre, "*Introduction to stochastic calculus applied to finance,*" Second edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.

[6] 松原望, 縄田和満, 中井検裕, 統計学入門, 東京大学出版会, 東京, 1991.

[7] D. Revuz and M. Yor, "*Continuous martingales and Brownian motion*," Third edition, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1999.

[8] R. J. Williams, "*Introduction to the mathematics of finance*," Graduate Studies in Mathematics, 72, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.