数理ファイナンス[1]

重川 一郎[2]

2019年10月31日

[1]2018年度京都大学理学部後期講義
[2]e-mail: shigekawa.ichiro.l20@kyoto-u.jp, URL: http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/

目 次

第1章　オプションの価格付け

1.　2項モデル

この節では，2 項モデルを中心にオプションの価格付けについて述べる．

オプション

時刻を $t = 0, 1, \ldots, T$ とし，株価を S_t とする．正確には S_t は一単位あたりの値段である．また株の売買は一単位以下のものも許すものとする．例えば 0.5 株買う，ということを認める．

コールオプション:	満期時 T に行使価格 K で，決められた数の株を買う権利
プットオプション:	満期時 T に行使価格 K で，決められた数の株を売る権利

コールオプションの場合に解説を加えよう．株は 1 株だけ買うことに固定しておく．満期時の株価は S_T である．$S_T \leq K$ であれば，市場で価格 S_T で売られている株を，それより高い値段の K で買う必要はない．損をするだけである．従ってこの場合は権利は行使されず，利得は 0 である．$S_T > K$ のときに意味を持つ．このときは安い値段の K で買うことが出来るのであるから，権利を行使して，K を支払って株を買い，直ちに市場価格の S_T で売却すれば $S_T - K$ の利得が得られる．従ってこのコールオプションの価値は $(S_T - K)_+$ と考える．プットの場合も同様である．数式で書けば

コールオプション:	$H = (S_T - K)_+$
プットオプション:	$H = (K - S_T)_+$

ここで H は，言わば満期時 T における価格である．しかし，オプションは時刻 0 で売りに出される．従って未来の時刻 T での商品を，現時点 0 で価格付けをする必要がある．それがオプションの価格付けの問題である．オプション H の時刻 0 における価格を $\pi(H)$ と表すことにする．この $\pi(H)$ をどのように求めるかが，この章の主題である．

オプションのような商品を**派生証券** (derivative secureity) と呼ぶ．株式そのもの（これを原資産という）ではなく，それから派生したもの，という意味である．また株価の変動に応じて支払いが変動するので，**条件付き請求権** (contingent claim) とも呼ばれる．

単期間モデル: コールオプションの例

時刻は 0 と 1 のみとする．株価の変動を $\{S_t\}, t = 0, 1$ で表す．$S_0 = 10$ として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p \\ 7.5, & \text{確率 } 1 - p \end{cases}$$

とした場合に，コールオプション $H=(S_1-K)_+$ の $K=15$ の場合の価格を考えよう．
　価格を平均と考えると

$$E[(S_1-K)_+]=(20-15)\times p+0\times(1-p)=5p$$

である．従来はこれが価格と考えられてきた．$p=0.5$ ならば，2.5 が価格である．
　実際には価格は 1 とすべきことを以下に述べる．全体の見通しを与えるために，目標をはっきりさせておこう．次のことを示すことがこの講義の目標である．

- オプションの価格は同値マルチンゲール測度での平均で与えられる．
- 市場が viable (no arbitrage) $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度が存在
- viable な市場が完備 $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度は一意的
- オプションを複製する戦略によってヘッジできる

無裁定条件

　「元手 0 から出発して正の利得を得る」という取引を**裁定取引** (arbitrage) という．**裁定機会**と呼ばれることもある．この様な裁定取引が存在しない，というのが経済の基本的な原則である．これを

- **無裁定条件** (no arbitrage)

と呼ぶ．no free lunch という用語も使われる．
　以後この無裁定の条件から価格が決まってくることを見ていく．また確率論的な意味づけも与える．

コール・プットパリティ

　無裁定の条件の使い方の例として，コール・プットパリティを証明してみよう．
　コール $(S_T-K)_+$ と プット $(K-S_1)_+$ を考え，更に利子で時間とともに $(1+\rho)^t$ の割合で預金が増えていくとする．これは時間とともにお金の価値が変っていくことを意味する．さてコールとプットの時刻 t における価格を C_t, P_t とする．すると次の関係 (コール・プットパリティと呼ばれる) が成立する：

$$C_t-P_t=S_t-(1+\rho)^{-(T-t)}K. \tag{1.1}$$

これを見るために時刻 t において次の二つの状況を考えてみよう．

1. コールを買い，プットを売る．
2. 株を 1 単位買い，金を $(1+\rho)^{-(T-t)}K$ だけ借りる．

これから出発して時刻 T での状態を考えてみると

1. $C_T - P_T = (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+$ だけ所有
2. $S_T - (1+\rho)^{(T-t)}(1+\rho)^{-(T-t)}K$ だけ所有

どちらも $S_T - K$ だけ所有している．

(1.1) が成立しなければ，時刻 t のときに差額が生じる．従ってこの差額を利用して裁定機会が生じることになる．よって，無裁定の条件から等号が成立しなければならない．

ポートフォリオ

株 S_t のほかに銀行からの資金の貸し借りも含めた状況を考える．銀行との取引を一種の証券と考え B_t で表す．B_t は**安全証券** (riskless security) と呼ばれることがある．これに対して株の方は**危険証券** (risky security) と呼ばれる．B_t もやはり単価であり，B_t を持っていることは，銀行に預金していることに相当する．B_t はお金そのものと考えた方が分かりやすいので以下ではそのような解釈で話を進めていく．また以下では $B_t = (1+\rho)^t$ とする．ρ は利率である．B_t の保有量を η_t とし，S_t の保有量を θ_t とするとき (η_t, θ_t) を**ポートフォリオ**と呼ぶ．これは配分の比率を表している．

一つ注意しておくが，η_t, θ_t は負になってもよい．η_t が負のときは借金をしている状態であり，θ_t が負のときは空売りをしている状態である．空売りとは，持っていない株を売ることである．現実的には空売りは，将来買い戻すことを約束して，証券会社から株を借りてそれを売るという行為である．そういう負債をいくらでも認めていることになる．

さらに，

$$V_t = \eta_t B_t + \theta_t S_t$$

を**価値過程** (value process) と呼ぶ．富過程 (wealth process) とも呼ばれる．資金の運用による，資産の状態を表している．ポートフォリオに対しては

$$\eta_t B_t + \theta_t S_t = \eta_{t+1} B_t + \theta_{t+1} S_t$$

を仮定する．これが満たされるとき**自己充足的**または**自己資金調達** (self-financing) であるいう．別のところからの資金の貸し借りはない，ということである．このようにポートフォリオを組んで，満期時点で V_T を $H = (S_T - K)_+$ に等しくなるようにすることを考える．この操作を**複製** (duplication) という．

$V_T = H$ となるようなポートフォリオ (η_t, θ_t) が存在するとき，このときの V_0 がこのオプションの価格となる．このことを以下見ていくことにする．

単期間のポートフォリオ

単期間モデルの場合に戻る．また簡単のため $B_t = 1$ として，利率が 0 の場合を考える．今は $T = 1$ なので，(η_1, θ_1) だけ考えればいいので (η, θ) と表す．すると

$$V_0 = \eta + \theta S_0$$

$$V_1 = \eta + \theta S_1$$

$H = V_1$ となる (η, θ) を求めたい．S_1 は二つの場合があるので

$$S_1(\omega_+) = 20,$$
$$S_1(\omega_-) = 7.5,$$

とすると

$$H(\omega_+) = 5,$$
$$H(\omega_-) = 0$$

である．

$$H(\omega) = \eta + \theta S_1(\omega)$$

を解けばよい．即ち

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 7.5\theta \end{cases}$$

図式的に表すと

$$\begin{tikzcd} S_0 & S_1 & H & \\ & 20 & 5 & 5 = \eta + 20\theta \\ 10 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & 7.5 & 0 & 0 = \eta + 7.5\theta \end{tikzcd}$$

これを解いて

$$\eta = -3, \quad \theta = 0.4$$

$V_0 = \eta + \theta S_0$ に代入して

$$V_0 = -3 + 0.4 \times 10 = 1$$

が求める価格である．

- オプションを売る側 (writer) で考えてみる．
  - $t = 0$ のとき
    - ∗ オプションを 1 で売る　　1
    - ∗ 銀行から 3 を借りる　　3
    - ∗ 株を 0.4 株買う　0.4×10　-4

- $t=1$ のとき

$S_1=20$ のとき
∗ 買い手がオプションを行使して 15 で株を買いに来る　15
∗ 株を 0.6 株買う　0.6×20　-12
∗ 銀行へ 3 返済　-3
∗ 1株を買い手に引き渡す
$S_1=7.5$ のとき
∗ 0.4 株売る　0.4×7.5　3
∗ 銀行へ 3 返済する　-3

価格が $\pi(H)>1$ であれば，1を元手に上のことを実行すれば，$\pi(H)-1$ が手許に残る．(つまりこれが裁定機会である．) 売り手有利．$\longrightarrow \pi(H)>1$ ではありえない．

- 買い手 (buyer) 場合を考えてみる

- $t=0$ のとき
  - ∗ -0.4 株購入 $=0.4$ 株売る (空売り)　0.4×10　4
  - ∗ 3 を銀行へ預金　-3
  - ∗ 1 でオプションを購入　-1
- $t=1$ のとき

$S_1=20$ のとき
∗ 銀行から 15 借りる　15
∗ 15 でオプションを行使して 1株買う　-15
∗ $1-0.4=0.6$ 株売る　0.6×20　12
∗ 銀行へ 12 返済　-12
$S_1=7.5$ のとき
∗ 銀行から 3 引き出す　3
∗ 0.4 株買う　0.4×7.5　-3

価格が $\pi(H)<1$ であれば，時刻 0 で $\pi(H)$ を支出して (借金して) このオプションを買えば満期時に 1 だけ得られるので，(借金を返済しても) 手許に $1-\pi(H)$ 残る．(つまりこれが裁定機会である．) 買い手に有利．$\longrightarrow \pi(H)<1$ ではありえない．

最後に注意として

$$S_1=\begin{cases}20, & \text{確率 } p\\ 5, & \text{確率 } 1-p\end{cases}$$

の場合を考えてみよう．これは行使価格を 15 とすると，株価が上がったときに利得 5 を得，株価が下がったときには利得 0 であるから，現象的には前のものと全く同じになる．ただ前

のものとの違いは，変動の幅が大きいことである．このとき

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 5\theta \end{cases}$$

を解いて

$$\eta = -\frac{5}{3}, \quad \theta = \frac{1}{3}$$

$V_0 = \eta + \theta S_0$ に代入して

$$V_0 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} \times 10 = \frac{5}{3}.$$

これは，前の場合の価格 1 より高くなっている．このように，価格の変動が大きいと (volatility が大きいという) 価格は一般に高くなる．

単期間 3 項モデル

$S_0 = 10$ として

$$S_1 = \begin{cases} 20, & \text{確率 } p_1 \\ 10, & \text{確率 } p_2 \\ 7.5, & \text{確率 } p_3 \end{cases}$$

となる場合を考えてみよう．このとき行使価格を $K = 15$ としてコールオプション $(S_1 - K)_+$ の複製を作ることを考える．2 項の場合と同様にすると，次の方程式を解かなければならない．

$$\begin{cases} 5 = \eta + 20\theta, \\ 0 = \eta + 10\theta, \\ 0 = \eta + 7.5\theta. \end{cases}$$

明らかにこの場合は解が存在しない．このように，複製が必ずしも可能でないものが存在するとき，**非完備市場**という．このときにはリスク中立測度は無限に存在し，別の基準を導入しなければ一意的には決まらない．このような場合は困難が伴うので，ここではどんな複製も可能な**完備市場**のみを扱う．

リスク中立測度

単期間二値モデルを一般的な枠組みで考える．安全証券の方は $B_t = (1+\rho)^t$ であるとする．$\beta = (1+\rho)^{-1} \le 1$ を割引率という．異なった時間の価格はこの割引率を勘案した形で考える必要がある．S_0, S_1 を株価とする．S_1 は

$$S_1(\omega_+), \quad S_1(\omega_-)$$

の二値とする．$P(\omega_+) = p$, $P(\omega_-) = 1 - p$ とする．p は価格付けに直接には関係しない．オプションを H として H の価格付けを考える．

価値過程は

$$\begin{aligned} V_0 &= \eta + \theta S_0 \\ V_1 &= \beta^{-1}\eta + \theta S_1. \end{aligned}$$

$V_1 = H$ としたいので $H = \beta^{-1}\eta + \theta S_1$.

$$H(\omega_+) = \beta^{-1}\eta + \theta S_1(\omega_+) \tag{1}$$

$$H(\omega_-) = \beta^{-1}\eta + \theta S_1(\omega_-) \tag{2}$$

これを解いて

$$\theta = \frac{H(\omega_+) - H(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}$$

また (1) $\times S_1(\omega_-) -$ (2) $\times S_1(\omega_+)$ としてこれを解いて

$$\begin{aligned} S_1(\omega_-)H(\omega_+) - S_1(\omega_+)H(\omega_-) &= \beta^{-1}\eta(S_1(\omega_-) - S_1(\omega_+)) \\ \eta &= \frac{\beta(S_1(\omega_+)H(\omega_-) - S_1(\omega_-)H(\omega_+))}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \end{aligned}$$

と求まる．従って V_0 は

$$\begin{aligned} V_0 &= \eta + \theta S_0 \\ &= \frac{\beta(S_1(\omega_+)H(\omega_-) - S_1(\omega_-)H(\omega_+))}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} + \frac{H(\omega_+) - H(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}S_0 \\ &= \frac{S_0 - \beta S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}H(\omega_+) + \frac{\beta S_1(\omega_+) - S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}H(\omega_-) \\ &= \beta\left\{\frac{\beta^{-1}S_0 - S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}H(\omega_+) + \frac{S_1(\omega_+) - \beta^{-1}S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)}H(\omega_-)\right\} \\ &= \beta(qH(\omega_+) + (1-q)H(\omega_-)). \end{aligned}$$

ここで

$$q = \frac{\beta^{-1}S_0 - S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \tag{1.2}$$

とおいた (これは H には関係していないことに注意しよう)．即ち，確率 Q を

$$Q(\{\omega_+\}) = q, \quad Q(\{\omega_-\}) = 1 - q$$

と定めれば

$$\pi(H) = V_0 = E^Q[\beta H].$$

これは，価格がある確率に関する期待値で表されている，ということを意味している．但し，これはもともとの確率とは異なっている．この確率測度を**リスク中立測度**と呼ぶ．

この測度の意味を考えよう．そのために期待値 $E^Q[\beta S_1]$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
E^Q[\beta S_1] &= \beta S_1(\omega_+)q + \beta S_1(\omega_-)(1-q) \\
&= \beta S_1(\omega_+)\frac{\beta^{-1}S_0 - S_1(\omega_-)}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} + \beta S_1(\omega_-)\frac{S_1(\omega_+) - \beta^{-1}S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \\
&= \frac{S_1(\omega_+)S_0 - \cancel{\beta S_1(\omega_+)S_1(\omega_-)} + \cancel{\beta S_1(\omega_-)S_1(\omega_+)} - S_1(\omega_-)S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \\
&= \frac{(S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-))S_0}{S_1(\omega_+) - S_1(\omega_-)} \\
&= S_0
\end{aligned}
$$

となり，これは $S_0, \beta S_1$ がマルチンゲールになっていることを意味する．即ち，リスク中立測度は，(割り引いた) 株価過程がマルチンゲールになる様な測度なのである．そのために**同値マルチンゲール測度**とも呼ばれる．

ここで，情報ということについて少し解説しておこう．最初の例からも分かるように，ポートフォリオを組む場合に，未来の情報は使えない．時刻 0 の時点では，時刻 1 の状態は分からない．株価が上がることがあらかじめ分かっていれば，現時点で買っておくのが有利に決まっている．そういうことはない訳である．ただ，このモデルの場合もそうであるが，未来の株価の分布は事前に分かっているということは注意しておいたほうが良いだろう．最初の例の場合，株価が時刻 1 で 20 になるか 7.5 になるかのどちらかであるということは，未来のことであるにも拘らず知っているのである．少なくともそういうことを前提にして理論は組み立てられている．モデルを立てるということはそういうことで，株価は 11 になったり，12 になったりはしないということを知っていることになる．20 になるか 7.5 になるかのどちらかなのである．そして，その確率が p と $1-p$ であることも知っている．つまり分布を事前に知っているのである（未来のことであるにも拘らず）．おそらく誤解はないと思うが，このことは注意しておく．

オプションの価格を決める場合に，元の確率ではなく，同値マルチンゲール測度での平均が価格を決めるわけだが，元の確率は 20 になるか 7.5 になるかのどちらかである，ということだけは影響している．それが「同値」という意味で，同値マルチンゲール測度にしても，株価が 11 になるとか， 12 になるとかは許容していない．

2.　多期間 2 項モデル＝CRR モデル

株価過程 $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_T$ を次で定める：

$$
S_t = \begin{cases} (1+b)S_{t-1} & \text{確率 } p \\ (1+a)S_{t-1} & \text{確率 } 1-p \end{cases}
$$

安全証券と，価値過程は

$$
B_t = (1+\rho)^t, \quad V_t = \eta_t B_t + \theta_t S_t
$$

で定める．(η_t, θ_t) は $(t-1, t]$ でのポートフォリオを表す．$a < \rho < b$ を仮定しておく．これは無裁定の条件に対応する．

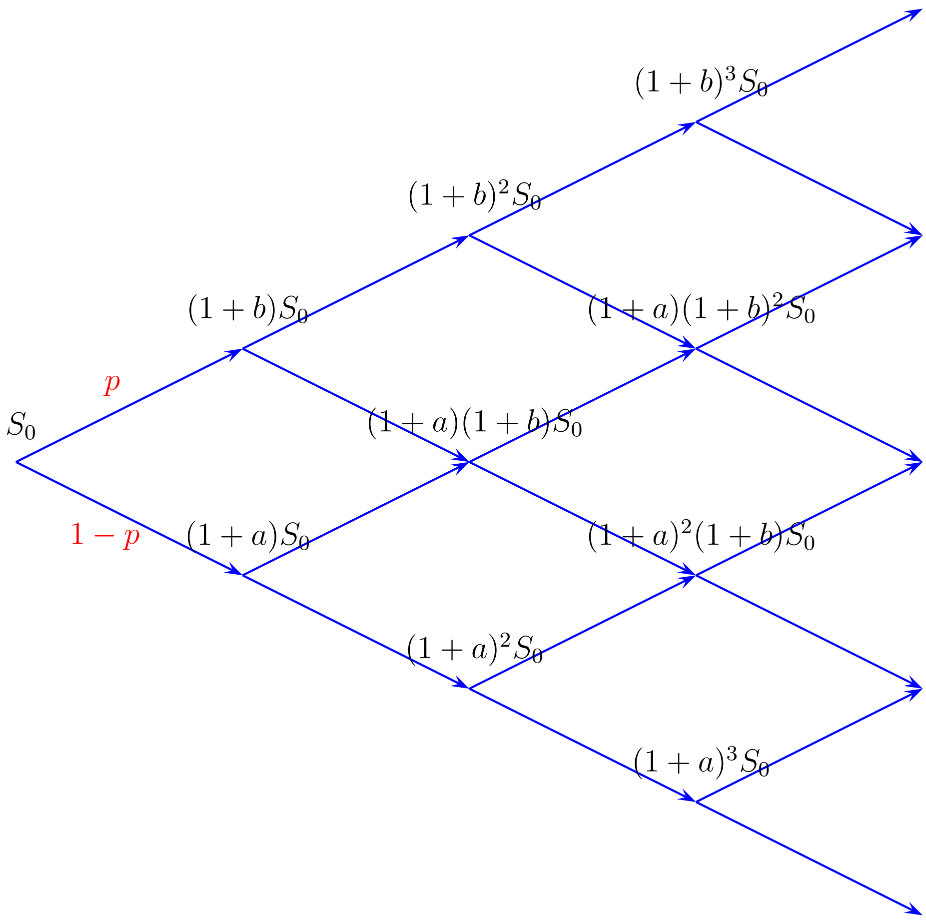

図 1.1: CRR モデル

単期間のときは，(1.2) から

$$\beta = (1+\rho)^{-1}, \quad q = \frac{\beta^{-1}S_0 - (1+a)S_0}{(1+b)S_0 - (1+a)S_0} = \frac{\rho - a}{b - a}$$

とおくと，価格は

$$V = E^Q[\beta H] = \beta(qH_b + (1-q)H_a)$$

であった．これを 2 期間の時に次のように考える．

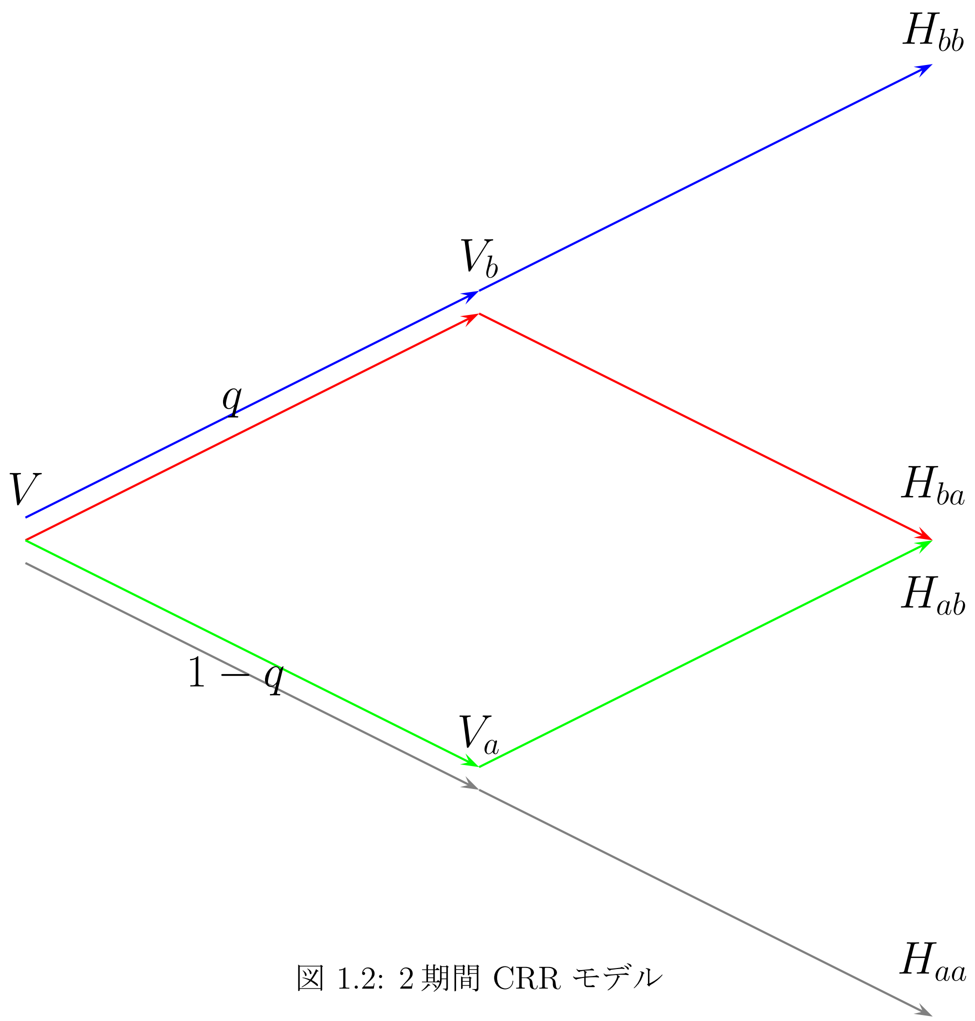

図 1.2: 2期間 CRR モデル

オプション H の時刻 $T-2$ における価格を V_{T-2} を帰納的に求めることが出来る．まず時刻 $T-1$ のとき，図の V_a, V_b は

(2.1) $$V_b = \beta(qH_{bb} + (1-q)H_{ba})$$

(2.2) $$V_a = \beta(qH_{ab} + (1-q)H_{aa}).$$

さらに V_b, V_a をオプションと見て，時刻 $T-2$ における価格は

(2.3) $$V = \beta(qV_b + (1-q)V_a)$$

(2.3) へ (2.1), (2.2) を代入して

(2.4) $$V = \beta^2(q^2H_{bb} + q(1-q)H_{ba} + (1-q)qH_{ab} + (1-q)^2H_{aa})$$

が得られる．$S_{T-2} = S$ として，コールオプション $H = (S_T - K)_+$ の場合を考えると

$$V = \beta^2\{q^2((1+b)^2S - K)_+ + 2q(1-q)((1+a)(1+b)S - K)_+$$

$$+ (1-q)^2((1+a)^2 S - K)_+\} \tag{2.5}$$

が得られることになる．

CRR 公式

以上の手続きを繰り返すと，価格として次のものが得られる．

$$\begin{aligned}
V_0 &= \beta^T \sum_{t=0}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} ((1+b)^t (1+a)^{T-t} S_0 - K)_+ \\
&= S_0 (1+\rho)^{-T} \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} (1+b)^t (1+a)^{T-t} - K(1+\rho)^{-T} \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} \\
&= S_0 \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} \left(\frac{1+b}{1+\rho}\right)^t \left(\frac{1+a}{1+\rho}\right)^{T-t} - K(1+\rho)^{-T} \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t}
\end{aligned}$$

ここで

$$A = \min\{k;\ S_0(1+b)^k(1+a)^{T-k} > K\}.$$

更に整理をしよう．

$$q = \frac{\rho - a}{b - a}, \quad q' = q\frac{1+b}{1+\rho}$$

とおく．

$$\begin{aligned}
q\frac{1+b}{1+\rho} + (1-q)\frac{1+a}{1+\rho} &= q\frac{b-a}{1+\rho} + \frac{1+a}{1+\rho} \\
&= \frac{\rho-a}{b-a}\frac{b-a}{1+\rho} + \frac{1+a}{1+\rho} \\
&= \frac{\rho-a}{b-a}\frac{\rho-a}{1+\rho} + \frac{1+a}{1+\rho} = 1
\end{aligned}$$

であるから

$$q' \in (0,1), \quad 1 - q' = (1-q)\frac{1+a}{1+\rho}$$

である．従って

$$\begin{aligned}
V_0 &= S_0 \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} (q')^t (1-q')^{T-t} - K(1+\rho)^{-T} \sum_{t=A}^{T} \binom{T}{t} q^t (1-q)^{T-t} \\
&= S_0 \Psi(A; T, q') - K(1+\rho)^{-T} \Psi(A; T, q) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

ここで

$$\Psi(m; n, p) = \sum_{j=m}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

(2.6) は Cox-Ross-Rubinstein (CRR) の公式と呼ばれている

ヘッジ

一般の時刻 t に対しては

$$
\begin{aligned}
V_t &= \beta^{T-t}\sum_{s=0}^{T-t}\binom{T-t}{s}q^s(1-q)^{T-t-s}((1+b)^s(1+a)^{T-t-s}S_t-K)_+ \\
&= S_t\Psi(A_t;T-t,q')-K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_t;T-t,q) \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．但し

$$A_t=\min\{k;S_t(1+b)^k(1+a)^{T-t-k}>K\}.$$

ここで $(t-1,t]$ でのポートフォリオを (η_t,θ_t) とすると

$$V_t=\eta_t(1+\rho)^t+\theta_tS_t$$

V_t は (2.7) から S_t から決まるが，S_t は S_{t-1} と，$(t-1,t]$ における変動で決まる．今の場合の2項モデルでは $S_t=(1+b)S_{t-1}$ か $S_t=(1+a)S_{t-1}$ のどちらになるかで決まる．対応する価格を V_t^b, V_t^a とすれば

$$
\begin{aligned}
V_t^b &= \eta_t(1+\rho)^t+\theta_t(1+b)S_{t-1}, \\
V_t^a &= \eta_t(1+\rho)^t+\theta_t(1+a)S_{t-1}
\end{aligned}
$$

であるから

$$\theta_t=\frac{V_t^b-V_t^a}{(b-a)S_{t-1}},\quad \eta_t=\frac{(1+b)V_t^a-(1+a)V_t^b}{(1+\rho)^t(b-a)} \qquad (2.8)$$

となる．

ここで (2.7) を用いて具体的に計算すると，

$$
\begin{aligned}
V_t^b &= S_{t-1}(1+b)\Psi(A_t^b;T-t,q')-K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_t^b;T-t,q) \\
V_t^a &= S_{t-1}(1+a)\Psi(A_t^a;T-t,q')-K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_t^a;T-t,q)
\end{aligned}
$$

である．但し

$$
\begin{aligned}
A_t^b &= \min\{k;S_{t-1}(1+b)(1+b)^k(1+a)^{T-t-k}>K\} \\
A_t^a &= \min\{k;S_{t-1}(1+b)^k(1+a)(1+a)^{T-t-k}>K\}
\end{aligned}
$$

である．これを少し変形すると

$$
\begin{aligned}
A_t^b &= \min\{k;S_{t-1}(1+b)^{k+1}(1+a)^{T-t-k}>K\} \\
&= \min\{k-1;S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-t-k+1}>K\} \\
&= \min\{k-1;S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-(t-1)-k}>K\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \min\{k; S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-(t-1)-k} > K\} - 1 \\
&= A_{t-1} - 1
\end{aligned}
$$

であり

$$
\begin{aligned}
A_t^a &= \min\{k; S_{t-1}(1+b)^k(1+a)(1+a)^{T-t-k} > K\} \\
&= \min\{k; S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-t-k+1} > K\} \\
&= \min\{k; S_{t-1}(1+b)^k(1+a)^{T-(t-1)-k} > K\} \\
&= A_{t-1}
\end{aligned}
$$

である．これから

$$
\begin{aligned}
V_t^b &= S_{t-1}(1+b)\Psi(A_{t-1}-1; T-t, q') - K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}-1; T-t, q) \\
V_t^a &= S_{t-1}(1+a)\Psi(A_{t-1}; T-t, q') - K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}; T-t, q).
\end{aligned}
$$

これで V_t^b, V_t^a が S_{t-1} であらわされていることが分かる．これをさらに (2.8) へ代入すれば，θ_t, η_t が S_{t-1} の関数として表されていることが分かる．具体的に計算すると

$$
\begin{aligned}
V_t^b - V_t^a &= S_{t-1}(1+b)\Psi(A_{t-1}-1; T-t, q') - K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}-1; T-t, q) \\
&\quad - S_{t-1}(1+a)\Psi(A_{t-1}; T-t, q') + K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}; T-t, q) \\
&= S_{t-1}(1+b)\{\Psi(A_{t-1}; T-t, q') + \binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1}\} \\
&\quad - K(1+\rho)^{-(T-t)}\{\Psi(A_{t-1}; T-t, q) + \binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}\} \\
&\quad - S_{t-1}(1+a)\Psi(A_{t-1}; T-t, q') + K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1}; T-t, q) \\
&= S_{t-1}(b-a)\Psi(A_{t-1}; T-t, q') \\
&\quad + S_{t-1}(1+b)\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1} \\
&\quad - K(1+\rho)^{-(T-t)}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\theta_t &= \frac{V_t^b - V_t^a}{(b-a)S_{t-1}} \\
&= \Psi(A_{t-1}; T-t, q') + \frac{1+b}{b-a}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1} \\
&\quad - \frac{K(1+\rho)^{-(T-t)}}{(b-a)S_{t-1}}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}.
\end{aligned}
$$

η_t を計算するには

$$
(1+b)V_t^a - (1+a)V_t^b
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+b)S_{t-1}(1+a)\Psi(A_{t-1};T-t,q') \\
&\quad - (1+b)K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1};T-t,q) \\
&\quad - (1+a)S_{t-1}(1+b)\{\Psi(A_{t-1};T-t,q') + \binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1}\} \\
&\quad + (1+a)K(1+\rho)^{-(T-t)}\{\Psi(A_{t-1};T-t,q)\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}\} \\
&= -(b-a)K(1+\rho)^{-(T-t)}\Psi(A_{t-1};T-t,q) \\
&\quad - (1+a)(1+b)S_{t-1}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1} \\
&\quad + (1+a)K(1+\rho)^{-(T-t)}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\eta_t &= \frac{(1+b)V_t^a - (1+a)V_t^b}{(1+\rho)^t(b-a)} \\
&= -K(1+\rho)^{-T}\Psi(A_{t-1};T-t,q) \\
&\quad - \frac{(1+a)(1+b)}{(1+\rho)^t(b-a)}S_{t-1}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q')^{A_{t-1}-1}(1-q')^{T-t-A_{t-1}+1} \\
&\quad + \frac{(1+a)}{b-a}K(1+\rho)^{-T}\binom{T-t}{A_{t-1}-1}(q)^{A_{t-1}-1}(1-q)^{T-t-A_{t-1}+1}.
\end{aligned}
$$

以上で θ_t, η_t は S_{t-1} の関数として表され，predictable であることが確かめられる．

コールオプションでは，満期時に売り手は価格 S_T の株を K で売らなければならない．S_t は K よりも大きい場合もあるのだから，何もしなければこの差額の分だけ損失を生む(最初にオプション料をを取っているから一部はそれで埋め合わせることができるが)．しかし上で述べた戦略をとれば，満期時にオプションを行使されてもそれに応じることが出来る．このようなリスクの回避策を**ヘッジ** (hedge) という．売り手側からすれば，この複製戦略を求めることが重要なのは明らかであろう．理論的な裏づけの必要性が理解されるであろう．

第2章　離散モデルの一般的枠組み

1.　取引戦略

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を与え，取引時刻を $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ とし，フィルトレイション $\{\mathscr{F}_t\}$, $t = 0, 1, 2 \ldots, T$ が与えられているとする．株価過程を (S_t) とし $\{\mathscr{F}_t\}$ 適合であるとする．株は d-種あり，$S^1, S^2, \ldots, S^d$ とする．さらに，安全証券として S^0 をおく．証券全体を $S = (S^0, S^1, S^2, \ldots, S^d)$ とおく．

$$\begin{array}{ll} S^0 & \text{安全証券 (riskless security)} \\ S^1, S^2, \ldots, S^d & \text{危険証券 (risky security) 例えば株} \end{array}$$

ここでは一般的な枠組みで考える．すなわち，Ω は有限集合ということは仮定しないし，また $\mathscr{F}_t$ は S の時刻 t までで生成される σ-field と一致することは，必ずしも仮定しない．$\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$ を**割引率** (discount factor) と呼ぶ．通常 $S_t^0 = (1+\rho)^t$ であることを仮定する．従って $\beta_t = (1+\rho)^{-t}$ である．しかしこのことは特にあとで必要になるわけではない．S^0 は deterministic である必要もない．異なる時刻での価格は基準が違うため，β_t をかけて調整しているわけである．時刻 t の時点での価値が 1 のものは，時刻 0 で β_t の価値を持つとみなす．

株の売買を行い，資産運用のモデルを立てよう．時刻 t における証券 S^0, $S^1, \ldots, S^d$ の保有量を

$$\theta_t = (\theta_t^0, \theta_t^1, \ldots, \theta_t^d)$$

で表す．これをポートフォリオと呼ぶ．またポートフォリオをどのように組替えていくかが**取引戦略** (trading strategy) となる．このときの**価値過程** (value process) を

$$V_0(\theta) = \theta_1 \cdot S_0, \tag{1.1}$$

$$V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i S_t^i, \quad t \geq 1 \tag{1.2}$$

で定める．時刻 $t-1$ の時点で保有量 θ_t を決め，$(t-1, t]$ の区間でこの保有量を保つ．時刻 t で，価値は $\theta_t \cdot S_t$ になる．この時点で新たな保有量 θ_{t+1} を決める．このように時刻 $t-1$ の段階で保有量 θ_t を決めていくことになる．つまり，θ_t を決めるには時刻 $t-1$ までの情報だけを使って決定されなければならない．そこで θ_t は $\mathscr{F}_{t-1}$ 可測である，という仮定をおく．このように一つ前の σ-field に関して可測な確率過程を**可予測** (predictable) な確率過程という．

一方，よく出てくる概念として適合というのもある．確率過程 (X_t) が $(\mathscr{F}_t)$ に**適合** (adapted) というのは，すべての t に対し X_t が $\mathscr{F}_t$ 可測のときをいう．可予測であれば適合で，可予測のほうが強い概念である．どちらの場合も，未来の情報を使うことが出来ないということは重要である．

さて，上に述べたように時刻 $t-1$ のときの価値が $\theta_t \cdot S_{t-1}$ であったものが，証券価格 S_t が変化することにより，時刻 t では $\theta_t \cdot S_t$ となる．この差額 $\theta_t \cdot S_t - \theta_t \cdot S_{t-1}$ を**利得**という (負の場合は損失である)．一般の確率過程 (X_t) に対して $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ の記法を使う．すると利得は

$$\theta_t \cdot \Delta S_t \tag{1.3}$$

と表される．これらの和として**利得過程** (gain process) G を次で定める:

$$G_0(\theta) = 0, \tag{1.4}$$

$$G_t(\theta) = \theta_1 \cdot \Delta S_1 + \theta_2 \cdot \Delta S_2 + \cdots + \theta_t \cdot \Delta S_t. \tag{1.5}$$

定義 1.1. 取引戦略 θ が次の条件をみたすとき，**自己資金調達** (self-financing) であるという (**自己充足的**と呼ばれることもある):

$$\theta_t \cdot S_t = \theta_{t+1} \cdot S_t, \quad 1 \leq t \leq T-1. \tag{1.6}$$

この条件は，時刻 t でポートフォリオを組み替えたとき，そのときの保有証券の価値 $\theta_t \cdot S_t$ と，新たに組み替えた保有証券の価値 $\theta_{t+1} \cdot S_t$ が等しくなることを要請している．つまり外部との資金の出し入れがなく，内部で閉じているということである．

self-financing の条件は $\theta_{t+1} \cdot S_t - \theta_t \cdot S_t = \Delta\theta_{t+1} \cdot S_t$ だから

$$\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0, \quad 2 \leq t \leq T. \tag{1.7}$$

とかくこともできる．self-financing の同値条件をまとめておこう．

命題 1.2. 次の条件は全て同値である:

$$\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0, \quad 2 \leq t \leq T, \tag{1.8}$$

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta S_t, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{1.9}$$

$$V_t(\theta) = V_0(\theta) + G_t(\theta), \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{1.10}$$

証明　まず (1.8) から (1.9) を導出しよう．(1.8) を仮定すると，$t = 2, \ldots, T$ のとき $\theta_t \cdot S_{t-1} = \theta_{t-1} \cdot S_{t-1}$ であるから

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t - \theta_{t-1} \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot S_t - \theta_t \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot \Delta S_t$$

が成り立つ．$t = 1$ のときは

$$\Delta V_1(\theta) = V_1(\theta) - V_0(\theta) = \theta_1 \cdot S_1 - \theta_1 \cdot S_0 = \theta_1 \cdot \Delta S_1$$

でやはり (1.9) が成立している．

次に (1.9) から (1.10) を示す．(1.9) が成り立っていると

$$\begin{aligned} V_t(\theta) &= V_0(\theta) + \sum_{s=1}^{t} \Delta V_s(\theta) \\ &= V_0(\theta) + \sum_{s=1}^{t} \theta_s \cdot \Delta S_s \\ &= V_0(\theta) + G_t(\theta). \quad (\because (1.3) \text{ の定義による}) \end{aligned}$$

これで (1.10) が示せている．

最後に (1.10) から (1.8) を導こう．(1.10) を仮定すると $t \geq 1$ のとき

$$\Delta V_t(\theta) = \Delta G_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta S_t.$$

一方 $t \geq 2$ のとき

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot S_t - \theta_{t-1} \cdot S_{t-1}.$$

よって $t \geq 2$ のとき

$$\cancel{\theta_t \cdot S_t} - \theta_{t-1} \cdot S_{t-1} = \theta_t \cdot \Delta S_t = \cancel{\theta_t \cdot S_t} - \theta_t \cdot S_{t-1}.$$

従って

$$(\theta_t - \theta_{t-1}) \cdot S_{t-1} = 0$$

となり (1.8) が示せた． □

基準財

常に正の確率過程 (Z_t) を**基準財** (numéraire) と呼ぶ．S_t の代わりに $Z_t S_t$ で考える．この様な変更を行っても self-financing の条件は変らない．実際

$$\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\theta_t \cdot (Z_{t-1} S_{t-1}) = 0$$

であるからこのことはすぐに分かる．(Z_t) は単に基準を何に採るかということだけで，本質は何も変らない．ドルで表示するか，ユーロで表示するかといった違いでしかない．通常 $Z_t = (S_t^0)^{-1} = \beta_t$ ととるが，正であればなんでもいいわけで，$(S_t^1)^{-1}$ をとっても構わない．また S^0 を安全証券と呼んだが，数学的には特に意味があるわけではない．全部が危険証券だけでも本来いいわけである．

さて，以下では $Z_t = \beta_t$ ととり，

$$\overline{S}_t := \beta_t S_t$$

とおく．$(\overline{S}_t)$ は割り引かれた証券価格過程 (discounted security price process) と呼ばれる．$(\overline{S}_t)$ に対応する確率過程を $\overline{V}$, $\overline{G}$ とする:

$$\overline{V}_0(\theta) = \theta_1 \cdot \overline{S}_0 \tag{1.11}$$

$$\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \overline{S}_t, \quad t \geq 1 \tag{1.12}$$

$$\overline{G}_0(\theta) = 0, \tag{1.13}$$

$$\overline{G}_t(\theta) = \theta_1 \cdot \Delta\overline{S}_1 + \theta_2 \cdot \Delta\overline{S}_2 + \cdots + \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t. \tag{1.14}$$

命題 1.3 で見たように $\overline{S}$ に対しても次の条件は同値になる．

$$\Delta\theta_t \cdot \overline{S}_{t-1} = 0, \quad 2 \leq t \leq T, \tag{1.15}$$

$$\Delta\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{1.16}$$

$$\overline{V}_t(\theta) = \overline{V}_0(\theta) + \overline{G}_t(\theta), \quad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{1.17}$$

(1.15) は基準財の変更だけだから前に見たように self-financing の条件と同値である．従って上の条件は全て self-financing と同値である．また $\overline{V}$ に対しては

$$\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \overline{S}_t = \theta_t \cdot \beta_t S_t = \beta_t \, \theta_t \cdot S_t = \beta_t \, V_t(\theta)$$

が成り立っている．$\overline{G}_t(\theta)$ は $G_t(\theta)$ と単純な関係では結ばれていない．但し θ が self-financing の場合は (1.17) から

$$\begin{aligned}
\overline{G}_t(\theta) &= \overline{V}_t(\theta) - \overline{V}_0(\theta) \\
&= \beta_t V_t(\theta) - \beta_0 V_0(\theta) \\
&= \beta_t (V_0(\theta) + G_t(\theta)) - \beta_0 V_0(\theta) \\
&= \beta_t G_t(\theta) + (\beta_t - \beta_0) V_0(\theta)
\end{aligned}$$

となる．特に $V_0(\theta) = 0$ のときは $\overline{G}_t(\theta) = \beta_t G_t(\theta)$ が成り立つ．以下 $S_0^0 = 1$ を常に仮定する．このとき $\overline{V}_0(\theta) = V_0(\theta)$ となっていることに注意しよう．

$\overline{G}(\theta)$ には θ_t^0 の寄与がないので（このことは，$\overline{S}_t^0 = 1$, $t = 0, 1, \ldots, T$ から従う），self-financing のときには θ_t^0 は $V_0(\theta)$ と θ^i, $i = 1, \ldots, d$ から決まることが示せる．命題として述べておこう．

命題 1.3. V_0 と predictable process $\theta^1, \ldots, \theta^d$ が与えられたとき，predictable process θ^0 を

$$\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^d)$$

が self-financing であるように出来る．さらに θ^0 は次で一意的に定まる:

$$\theta_t^0 = V_0 + \sum_{u=1}^{t-1} (\theta_u^1 \Delta\overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta\overline{S}_u^d) - (\theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d). \tag{1.18}$$

証明 $\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^d)$ が self-financing であるとすると

$$\begin{aligned}\overline{V}_t(\theta) &= \theta_t^0 + \theta_t^1 \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_t^d = V_0 + \overline{G}_t \\ &= V_0 + \sum_{u=1}^{t} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d).\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}\theta_t^0 &= V_0 + \sum_{u=1}^{t} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d) - (\theta_t^1 \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_t^d) \\ &= V_0 + \sum_{u=1}^{t-1} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d) + (\theta_t^1 \Delta \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \Delta \overline{S}_t^d) - (\theta_t^1 \overline{S}_t^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_t^d) \\ &= V_0 + \sum_{u=1}^{t-1} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d) - (\theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d)\end{aligned}$$

となり，(1.18) が得られる．

逆に (1.18) が成立すれば，θ_t^0 は predictable で，上の式を逆にたどれば $\overline{V}_t(\theta) = V_0 + \overline{G}_t(\theta)$ が成立するから，self-financing であることが示せる． □

この命題は，self-financing なポートフォリオの作り方を示しているともいえる．

$\overline{V}_{t-1} = V_0 + \sum_{u=1}^{t-1} (\theta_u^1 \Delta \overline{S}_u^1 + \cdots + \theta_u^d \Delta \overline{S}_u^d)$ であるから，時刻 $t-1$ での資産 $\overline{V}_{t-1}$ を使って，まず危険証券を $(\theta_t^1, \ldots, \theta_t^d)$ の配分で買う．その費用が $\theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d$ である．そしてその残額 $\overline{V}_{t-1} - (\theta_t^1 \overline{S}_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d \overline{S}_{t-1}^d)$ を銀行に預ける．これが θ_t^0 である．θ_t^0 は正の時も負の時もあるので，負の時には銀行から借金していることになる．θ_t^0 は，他が決まれば自動的に決まるというのもこれからわかることで，この命題はそのことを言っているに過ぎない．帳尻合わせを銀行との貸し借りでやっているということで，self-financing というのは，ごく自然な資金の調達ということができる．ここで銀行預金は $\theta_t^0 \overline{S}_{t-1}^0$ であるが $\overline{S}_{t-1}^0 = 1$ だから θ_t^0 と同じであることも使っている．discount をしない式で書けば $\theta_t^0 S_{t-1}^0 = V_{t-1} - (\theta_t^1 S_{t-1}^1 + \cdots + \theta_t^d S_{t-1}^d)$ である．

繰り返しになるが，$(\theta_t^0, \theta_t^1, \ldots, \theta_t^d)$ は時刻 $t-1$ の時点で決めるわけで，したがって (θ_t) は可予測でなければならない．

裁定機会

self-financing strategy の全体を SF とかく．

定義 1.4. 次を満たす self-financing な戦略を**裁定機会** (arbitrage opportunity) という．

$$V_0(\theta) = 0, \quad V_T(\theta) \geq 0, \quad E[V_T(\theta)] > 0.$$

$E[V_T(\theta)] > 0$ の条件は $P(V_T(\theta) > 0) > 0$ と同値である．

定義 1.5. 裁定機会が存在しなとき，市場は**成熟** (viable) と呼ばれる．これは

$$\theta \in \mathrm{SF} \text{ かつ } V_0(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_T(\theta) = 0$$

を意味する．

定義 1.4 では $V_T(\theta) \geq 0$ を仮定したが

$$V_0(\theta) = 0, \quad V_t(\theta) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}, \quad E[V_T(\theta)] > 0$$

が成り立つときは，強い意味での裁定機会という．

命題 1.6. 裁定機会が存在すれば，強い意味での裁定機会が存在する．

証明　θ を裁定機会とする．

$$t = \max\{s;\, P(V_s(\theta) < 0) > 0\}$$

とおく．これは S の分布を知っているので，事前に定まる．そこで $A = \{\theta_t \cdot S_t < 0\}$ とおく．$A \in \mathscr{F}_t$, $P(A) > 0$ であり

$$\theta_u \cdot S_u \geq 0 \quad \text{for } u > t$$

が成り立つ．これから新しい戦略 ϕ を次のように作る．まず A^c では $\phi_u = 0$ とする．A 上では

$$\begin{aligned}
&\phi_u(\omega) = 0, \quad u \leq t \\
&\phi_u^0(\omega) = \theta_u^0(\omega) - \frac{\theta_t \cdot S_t}{S_t^0(\omega)}, \quad \phi_u^i(\omega) = \theta_u^i(\omega), \quad i = 1, \ldots, d,\ u > t
\end{aligned}$$

と定める．ϕ が predictable であることは明らか．

self-financing であることを見よう．A^c では $V_u(\phi) = 0$ だから明らか．あとは A 上で $\Delta\phi_{t+1} \cdot S_t = 0$ を示せばよい．($\Delta\phi_u$ と $\Delta\theta_u$ が異なるのは $u = t+1$ のときだけだから．) A 上では

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{t+1}^0 &= \phi_{t+1}^0 = \theta_{t+1}^0 - \frac{\theta_t \cdot S_t}{S_t^0}, \\
\Delta\phi_{t+1}^i &= \theta_{t+1}^i, \quad i = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_{t+1} \cdot S_t &= \Delta\phi_{t+1}^0 S_t^0 + \sum_{i=1}^d \Delta\phi_{t+1}^i S_t^i \\
&= (\theta_{t+1}^0 - \frac{\theta_t \cdot S_t}{S_t^0}) S_t^0 + \sum_{i=1}^d \theta_{t+1}^i S_t^i \\
&= \theta_{t+1}^0 S_t^0 - \theta_t \cdot S_t + \sum_{i=1}^d \theta_{t+1}^i S_t^i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \theta_{t+1} \cdot S_t - \theta_t \cdot S_t \\
&= 0
\end{aligned}
$$

最後の等式で，θ が self-financing を使った．

次に $V_u(\phi) \geq 0$ と $P(V_T(\phi) > 0) > 0$ を示す．A^c では $V_u(\phi) = 0$ である．A 上では $u \leq t$ のときは $V_u(\phi) = 0$ である．$u > t$ のとき

$$
\begin{aligned}
V_u(\phi) = \phi_u \cdot S_u &= \theta_u^0 S_u^0 - \frac{(\theta_t \cdot S_t) S_u^0}{S_t^0} + \sum_{i=1}^d \theta_u^i S_u^i \\
&= \theta_u \cdot S_u - (\theta_t \cdot S_t) \frac{S_u^0}{S_t^0}.
\end{aligned}
$$

条件から $\theta_u \cdot S_u \geq 0$, $u > t$ で $(\theta_t \cdot S_t) < 0$, $S^0 \geq 0$ であるから $V_u(\phi) \geq 0$ が成り立つ．

最後に A 上で $V_T(\phi) > 0$ となることは $\theta_t \cdot S_t < 0$ より従う． □

条件付請求権 H を 1 つ固定する．H は単に $\mathscr{F}_T$ 可測な非負確率変数ということである．H は適当な $\theta \in \mathrm{SF}$ が存在して

$$
V_T(\theta) = H \tag{1.19}
$$

とできるとき，**複製可能** (attainable, replicable) という．このとき，viable の条件があれば，価値過程 $V_t(\theta)$ は一意に決まる．即ち $\theta, \theta' \in \mathrm{SF}$ が $V_T(\theta) = V_T(\theta') = H$ を満たすと，$V_t(\theta) = V_t(\theta')$ が全ての t で成立する．このことを示そう．この事実を経済学では**一物一価の法則**と呼ぶ．価格は一意的に決まるということである．そうでなければ，安い値段で買って，高い値段で売ればよいのだから裁定機会が存在することは直観的には明らかである．

命題 1.7. viable market で複製可能な H に対して，価値過程は一意的である．

証明 self-financing な許容 θ, ϕ がともに

$$
V_T(\theta) = V_T(\phi) = H
$$

を満たすとする．$V(\theta) \neq V(\phi)$ ならば $t_0 < T$ で

$$
\begin{aligned}
V_u(\theta) &= V_u(\phi), \quad u < t_0 \\
V_{t_0}(\theta) &\neq V_{t_0}(\phi)
\end{aligned}
$$

となる t_0 が取れる．$A = \{V_{t_0}(\theta) > V_{t_0}(\phi)\}$ とおく．$P(A) > 0$ として一般性を失わない．$X = V_{t_0}(\theta) - V_{t_0}(\phi)$ は $\mathscr{F}_{t_0}$ 可測である．さて常に安全証券 S^0 を 1 単位だけ所有しているという戦略を η とする．これは明らかに self-financing である．

新しい戦略 ψ を次で定める．

$$
\begin{aligned}
\psi_u &= 0 \quad u \leq t_0 \\
\psi_u &= (\beta_{t_0} X \eta_u - \theta_u + \phi_u) 1_A, \quad u > t_0
\end{aligned}
$$

ψ が predictable であることは明らかである．self-financing の条件を確かめればよい．$u < t_0$ に対しては $\Delta\psi_{u+1} = 0$ だから明らか．$u > t_0$ に対しては，η, θ, ϕ すべて self-financing だから明らか．

$u = t_0$ のときだけ考えればよい．A^c では常に ψ は常に 0 なので明らか．A 上で考えよう．$\psi_{t_0} = 0$ だから $\psi_{t_0} \cdot S_{t_0} = 0$. また

$$\begin{aligned}
\psi_{t_0+1} \cdot S_{t_0} &= (\beta_{t_0} X \eta_{t_0+1} - \theta_{t_0+1} + \phi_{t_0+1}) \cdot S_{t_0} \\
&= \beta_{t_0} X S^0_{t_0} - \theta_{t_0+1} \cdot S_{t_0} + \phi_{t_0+1} \cdot S_{t_0} \\
&= \beta_{t_0} X S^0_{t_0} - \theta_{t_0} \cdot S_{t_0} + \phi_{t_0} \cdot S_{t_0} \qquad (\because \text{SF の条件 } \Delta\theta_{t_0+1} \cdot S_{t_0} = \Delta\phi_{t_0+1} \cdot S_{t_0} = 0) \\
&= (S^0_{t_0})^{-1} (V_{t_0}(\theta) - V_{t_0}(\phi)) S^0_{t_0} - V_{t_0}(\theta) + V_{t_0}(\phi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

両者から $\Delta\psi_{t_0} \cdot S_{t_0} = 0$ となるから，この場合も self-financing の条件が確かめられた．

さらに

$$V_T(\psi) = (\beta_{t_0} X S^0_T - V_T(\theta) + V_T(\phi)) 1_A = \beta_{t_0} X S^0_T 1_A.$$

以上で ψ が裁定機会であることが示されたので，viable であることに矛盾する．

最後に注意を与えておく．上の証明で $t_0 = 0$ の場合は少し注意が必要である．この場合は $\psi_0 = \psi_1$ と無条件に定義するので，上の定義とは食い違うことになるので，別個に確かめる必要がある．self-financing の条件は $u > 0$ で確かめればいいだけなので，これは上の証明がそのまま使える．$V_0(\psi) = 0$ だけ証明すればよい．

$$\begin{aligned}
V_0(\psi) = \psi_1 \cdot S_0 = (\beta_0 X \eta_1 - \theta_1 + \phi_1) \cdot S_0 &= (S^0_0)^{-1} X S^1_0 - \theta_1 \cdot S_0 + \phi_1 \cdot S_0 \\
&= X - V_0(\theta) + V_0(\phi) = 0
\end{aligned}$$

より，確かに成り立つ． □

2.　マルチンゲール

この節では，数理ファイナンスで重要な役割を果たすマルチンゲールについて述べる．そのために枠組みも少し一般化する．$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ は確率空間としたが，時間パラメーターは今まではヨーロピアンオプションを扱うために，有限の満期時刻 T を設定していたが，$\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ と無限まで動くものとする．もちろん，以下の議論を有限の T までに制限することは何の問題もない．フィルトレーションを $\{\mathscr{F}_t\}_t$ とする．これは増大する σ-集合体の列であった．まずマルチンゲールを定義するために，条件付き期待値の復習から始める．

条件付き期待値

$A \in \mathscr{F}$ に対し，A の条件の下での条件付確率を

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

で定義した．但し $P(A)>0$ を仮定している．A を固定すれば $B \mapsto P(B|A)$ は測度を定義するから，この測度に関する期待値として $E[X|A]$ が定義できる．実際これは

$$E[X|A]=\frac{E[X1_A]}{P(A)}$$

と定義される．条件 A の下での期待値と言うべきものである．この A をいろいろ動かすという考えで条件付き期待値をを一般化できる．

σ-field $\mathscr{G}$ が与えられたとき，$X \in L^1$ に対して，全ての $A \in \mathscr{G}$ に対し

$$E[X1_A]=E[Y1_A] \tag{2.1}$$

となる $\mathscr{G}$ 可測関数 Y が一意的に定まる．これを X の $\mathscr{G}$ で条件付けられた**条件付き期待値**と呼び $E[X|\mathscr{G}]$ とかく．特に $\mathscr{G}$ が有限生成の場合は disjoint 集合 $A_1,\dots,A_K$ で $\cup_j A_j=\Omega$ を満たすものが取れ，$\mathscr{G}$ の元は $A_1,\dots,A_K$ のうちのいくつかの和集合でかける．このときは

$$E[X|\mathscr{G}]=\sum_j E[X|A_j]1_{A_j}=\sum_j \frac{1}{P(A_j)}E[X1_{A_j}]1_{A_j} \tag{2.2}$$

と表される．一般の場合はこの様な極限と考えてよい．

条件付き期待値に関しては次のことが成り立つ：

1. $E[\alpha X+\beta Y|\mathscr{G}]=\alpha E[X|\mathscr{G}]+\beta E[Y|\mathscr{G}]$.
2. $X \ge 0$ ならば $E[X|\mathscr{G}] \ge 0$.
3. φ を凸関数とすると，$\varphi(E[X|\mathscr{G}]) \le E[\varphi(X)|\mathscr{G}]$.
4. $0 \le X_n \uparrow X$ のとき $E[X_n|\mathscr{G}] \uparrow E[X|\mathscr{G}]$.
5. $0 \le X_n$ のとき $E[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathscr{G}] \le \liminf_{n\to\infty} E[X|\mathscr{G}]$.
6. $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$ のとき $E[E[X|\mathscr{G}_2]|\mathscr{G}_1]=E[X|\mathscr{G}_1]$
7. $E[E[X|\mathscr{G}]]=E[X]$
8. X が $\mathscr{G}$-可測なら $E[XY|\mathscr{G}]=XE[Y|\mathscr{G}]$.
9. X が $\mathscr{G}$ と独立ならば $E[X|\mathscr{G}]=E[X]$.

8 だけ示しておこう．条件付き期待値を取っているのだから $XY \in L^1$, $Y \in L^1$ は仮定しなければならない．8 の主張には $XE[Y|\mathscr{G}] \in L^1$ であることも含まれている．実際 $|XE[Y|\mathscr{G}]| \le E[|XY||\mathscr{G}]$ が成立する．

まず，8 が有界な X に対して成立することを示す．$A \in \mathscr{G}$ をとり $X=1_A$ のときをまず見よう．任意に $B \in \mathscr{G}$ をとると

$$E[(1_A E[Y|\mathscr{G}])1_B]=E[1_{A\cap B}E[Y|\mathscr{G}]]=E[1_{A\cap B}Y]=E[1_{A\cap B}Y]=E[(1_A Y)1_B].$$

これは $E[1_A Y|\mathscr{G}] = 1_A E[Y|\mathscr{G}]$ を意味する．

次に $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$ が成り立つ有界な $\mathscr{G}$ 可測関数全体を Φ とおく．明らかに Φ はベクトル空間であり，定数関数を含む．また Φ の非負単調増大列 $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots$ が有界な関数 X に概収束すると，$E[X_n Y|\mathscr{G}] = X_n E[Y|\mathscr{G}]$ で極限を取れば，優収束定理から $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$ が成り立つ．よって，Dynkin 族定理から Φ は $\mathscr{G}$ 可測な有界関数全体を含む．

次に $Y \in L^1$ として，$\mathscr{G}$ 可測関数 X が $XY \in L^1$ を満たしているとする．$X_n = X1_{\{|X| \leq n\}}$ とおくと X_n は有界だから

$$E[X_n Y|\mathscr{G}] = X_n E[Y|\mathscr{G}].$$

ここで $n \to \infty$ とすれば，有収束定理から左辺は$E[XY|\mathscr{G}]$ に概収束する．右辺は $XE[Y|\mathscr{G}]$ に概収束する．よって $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$ が成立していることが分かる．

条件付き期待値は，L^2 の枠組みでは，直交射影になっていることも特徴的である．$\mathscr{G}$ 可測な $L^2(P)$ の元の全体を $L^2(P, \mathscr{G})$ と表そう:

$$L^2(P, \mathscr{G}) = \{f \in L^2(P);\ f \text{ は } \mathscr{G} \text{ 可測}\}.$$

明らかに $L^2(P, \mathscr{G})$ は $L^2(P)$ の閉部分空間である．従って直交射影 $\pi_{\mathscr{G}}\colon L^2(P, \mathscr{G}) \to L^2(P)$ が定義できる．このとき

$$\pi_{\mathscr{G}} X = E[X|\mathscr{G}]$$

が成り立つ．実際 3. から $E[X|\mathscr{G}]^2 \leq E[X^2|\mathscr{G}]$ なので $X \in L^2(P)$ のとき $E[X|\mathscr{G}] \in L^2(P)$ が成り立つ．また $Y \in L^2(P, \mathscr{G})$ に対し

$$\begin{aligned} E[(X - E[X|\mathscr{G}])Y] &= E[XY] - E[E[X|\mathscr{G}]Y] \\ &= E[XY] - E[E[YX|\mathscr{G}]] \\ &= E[XY] - E[YX] = 0 \end{aligned}$$

から

$$X = E[X|\mathscr{G}] + (X - E[X|\mathscr{G}])$$

が直交分解を与え要ることが分かるから，$E[X|\mathscr{G}]$ が直交射影になっている．これから

$$E[X^2] = E[E[X|\mathscr{G}]^2] + E[(X - E[X|\mathscr{G}])^2] \tag{2.3}$$

が成り立つことが分かる．

独立な確率変数のときによく使う計算法があるので，それを紹介する．X, Y を S, T に値を取る独立な確率変数とする．f を $S \times T$ 上の実数値可測関数として $E[f(X,Y)|Y]$ を計算したい．このとき

$$\varphi(y) = E[f(X, y)]$$

と定義すると，

$$E[f(X,Y)|Y] = \varphi(Y)$$

が成り立つ．これを

$$E[f(X,Y)|Y] = E[f(X,y)]|_{y=Y}$$

の様に書き表す．証明は Fubini の定理を使って

$$\begin{aligned}
E[\varphi(Y)g(Y)] &= \int_T \varphi(y)g(y)P^Y(dy) \\
&= \int_T \left\{ \int_S f(x,y)P^X(dx) \right\} g(y)P^Y(dy) \\
&= \int_{S\times T} f(x,y)g(y)P^{(X,Y)}(dxdy) \\
&= E[f(X,Y)g(Y)]
\end{aligned}$$

から分かる．$\varphi(y)$ のことを

$$\varphi(y) = E[f(X,Y)|Y=y]$$

とかいたりする．

条件付分散

条件付平均が定義されれば，条件付分散も次の様に定義できる．

$$V(X|\mathscr{G}) := E[(X - E[X|\mathscr{G}])^2|\mathscr{G}]. \tag{2.4}$$

この定義から

$$\begin{aligned}
E[(X - E[X|\mathscr{G}])^2|\mathscr{G}] &= E[X^2|\mathscr{G}] - 2E[XE[X|\mathscr{G}]|\mathscr{G}] + E[E[X|\mathscr{G}]^2|\mathscr{G}] \\
&= E[X^2|\mathscr{G}] - 2E[X|\mathscr{G}]E[X|\mathscr{G}] + E[X|\mathscr{G}]^2 \\
&= E[X^2|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]^2
\end{aligned}$$

なので

$$V(X|\mathscr{G}) = E[X^2|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]^2$$

という定義も可能である．

$\mathscr{G}$ が有限分割 A_1, A_2, $\ldots$, A_K で与えられているときは

$$\begin{aligned}
V(X|\mathscr{G}) &= E[X^2|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]^2 \\
&= \sum_j E[X^2|A_j]1_{A_j} - \{\sum_j E[X|A_j]1_{A_j}\}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_j E[X^2|A_j]1_{A_j} - \sum_j E[X|A_j]^2 1_{A_j} \\
&= \sum_j (E[X^2|A_j] - E[X|A_j]^2) 1_{A_j}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．同様に

$$
\begin{aligned}
E[(X - E[X|A_j])^2|A_j] &= E[X^2 - 2XE[X|A_j] + E[X|A_j]^2|A_j] \\
&= E[X^2|A_j] - 2E[X|A_j]E[X|A_j] + E[X|A_j]^2 \\
&= E[X^2|A_j] - E[X|A_j]^2
\end{aligned}
$$

だから

$$
V(X|\mathscr{G}) = \sum_j E[(X - E[X|A_j])^2|A_j]1_{A_j}
$$

も成り立つ．

命題 2.1. $X \in L^2(P)$ に対し次の等式が成立する．

$$
V(X) = E[V(X|\mathscr{G})] + V(E[X|\mathscr{G}]). \tag{2.5}
$$

証明　(2.5) の右辺を計算しよう．まず，

$$
\begin{aligned}
E[V(X|\mathscr{G})] &= E[E[X^2|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]^2] \\
&= E[X^2] - E[E[X|\mathscr{G}]^2].
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
V(E[X|\mathscr{G}]) &= E[E[X|\mathscr{G}]^2] - E[E[X|\mathscr{G}]]^2 \\
&= E[E[X|\mathscr{G}]^2] - E[X]^2.
\end{aligned}
$$

両者を足して求める結果が得られる． □

停止時刻

さて，確率過程の時間発展を記述するとき，重要な概念として停止時刻がある．τ が**停止時刻**とは，任意の t に対し

$$
\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \tag{2.6}
$$

をみたす $\mathbb{Z}_+$-値の確率変数のことである．

τ が停止時刻とするとき，σ-fileld $\mathscr{F}_\tau$ を

$$
\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F};\ A \cap \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \quad \forall t\} \tag{2.7}
$$

で定める．これは時刻 τ までに得られる情報を表している．

命題 2.2. τ を停止時刻，$A \in \mathscr{F}_\tau$ に対して

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega) & \omega \in A \\ \infty & \omega \notin A \end{cases} \tag{2.8}$$

と定めると，τ_A も停止時刻である．

証明 条件 (2.6) を確かめればよい．$A \in \mathscr{F}_\tau$ であるから

$$\{\tau_A \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap A \in \mathscr{F}_t.$$

□

マルチンゲール

さて σ-fields の増大列 $\{\mathscr{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ が与えられているとき，確率過程 (X_t) がすべての t に対して X_t が $\mathscr{F}_t$-可測であるという条件を満たすとき，(X_t) は $(\mathscr{F}_t)$ に**適合** (adapted) であるといった．さらに可積分な確率過程 (M_t) が $(\mathscr{F}_t)$-adapted で

$$E[M_{t+1}|\mathscr{F}_t] = M_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{2.9}$$

を満たすとき，**マルチンゲール**であるという．マルチンゲールの条件は

$$E[\Delta M_{t+1}|\mathscr{F}_t] = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1 \tag{2.10}$$

と同値である．またこれから $E[\Delta M_{t+1}] = 0$ 従って $E[M_{t+1}] = E[M_t]$ が成り立つ．

また (2.9) の代わりに

$$E[M_{t+1}|\mathscr{F}_t] \geq M_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

が成り立つときは**劣マルチンゲール**，

$$E[M_{t+1}|\mathscr{F}_t] \leq M_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

が成り立つときを，**優マルチンゲール**という．

命題 2.3. 次のことが成り立つ．

(1) (M_t) がマルチンゲールで φ が凸関数で $(\varphi(M_t))$ が可積分ならば $(\varphi(M_t))$ は劣マルチンゲールである．

(2) (M_t) が劣マルチンゲールで φ が単調非減少の凸関数で $(\varphi(M_t))$ が可積分ならば $(\varphi(M_t))$ は劣マルチンゲールである．

(3) (M_t) が優マルチンゲールで φ が単調非減少の凹関数で $(\varphi(M_t))$ が可積分ならば $(\varphi(M_t))$ は優マルチンゲールである．

証明　(1) φ の凸性から $t > s$ に対し

$$E[\varphi(M_t)|\mathscr{F}_s] \geq \varphi(E[M_t|\mathscr{F}_s]) = \varphi(M_s)$$

より $(\varphi(M_t))$ は劣マルチンゲールである．

(2) φ の凸性から $t > s$ に対し

$$\begin{aligned} E[\varphi(M_t)|\mathscr{F}_s] &\geq \varphi(E[M_t|\mathscr{F}_s]) \\ &\geq \varphi(M_s). \quad (\because E[M_t|\mathscr{F}_s] \geq M_s \text{ で } \varphi \text{ が非減少だから}) \end{aligned}$$

よって $(\varphi(M_t))$ は劣マルチンゲールである．

(3) φ の凹性から $t > s$ に対し

$$\begin{aligned} E[\varphi(M_t)|\mathscr{F}_s] &\leq \varphi(E[M_t|\mathscr{F}_s]) \\ &\leq \varphi(M_s). \quad (\because E[M_t|\mathscr{F}_s] \leq M_s \text{ で } \varphi \text{ が非増加だから}) \end{aligned}$$

よって $(\varphi(M_t))$ は劣マルチンゲールである．　□

定義 2.4. 確率過程 $X = (X_t)$ と predictable process $\phi = (\phi_t)$ が与えられたとき新たな確率過程 $\phi \cdot X$ を

$$(\phi \cdot X)_t = \phi_1 \Delta X_1 + \phi_2 \Delta X_2 + \cdots + \phi_t \Delta X_t \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.11}$$

で定める．また $(\phi \cdot X)_0 = 0$ と定義する．

注意 2.1. ϕ_0 は定義されている必要はない．定義されている場合は $\mathscr{F}_{-1}$ 可測を仮定することとなるが，$\mathscr{F}_{-1}$ は定義されていないので $\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0$ とみなす．また ϕ_0 が定義されているときは $(\phi \cdot X)_0 = \phi_0 X_0$ と定義し

$$(\phi \cdot X)_t - (\phi \cdot X)_0 = \phi_1 \Delta X_1 + \phi_2 \Delta X_2 + \cdots + \phi_t \Delta X_t \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.12}$$

と定義する．しかし，ここではこの規約は使わず，$(\phi \cdot X)_0 = 0$ として議論を進める．

上記の $\phi \cdot X$ の定義は，確率積分の離散版と考えることが出来る．特に離散の場合は収束性を気にする必要がないという利点がある．但し，可積分性は注意する必要がある．ϕ が有界な場合は，X の可積分性が，そのまま $\phi \cdot X$ の同種の可積分性を保証するようになる．例えば X が可積分ならば（すなわち，任意の $t \in \mathbb{T}$ に対し X_t が L^1) $\phi \cdot X$ も可積分となり，X が 2 乗可積分なら $\phi \cdot X$ も 2 乗可積分となる．

ϕ が有界でない場合も，X が 2 乗可積分，ϕ も 2 乗可積分とすれば $\phi \cdot X$ は可積分となる．他にも Hölder の不等式を利用した定式化も可能であるが，それらを実際に使うことはない．

また $X = (X_t)$ がマルチンゲールのとき，定義 2.4 の変換を**マルチンゲール変換** (martingale transform) と呼ぶことがある．こちらの用語の方がよく使われる．

定義 2.4 の確率積分は，既に定義した利得過程 (1.5), がその形をしている．あるいは self-financing を仮定して，価値過程が確率積分で表されている．連続パラメーターの場合は確率積分の理論がさらに有効に利用されることになる．

命題 2.5. X がマルチンゲールで predictable process ϕ が有界なとき，$\phi\cdot X$ はマルチンゲールである．X が 2 乗可積分のときは ϕ に 2 乗可積分性を仮定しても $\phi\cdot X$ はマルチンゲールになる．

また X が劣マルチンゲールで predictable process ϕ が有界で非負のとき，$\phi\cdot X$ は劣マルチンゲールになる．

証明 $\phi\cdot X$ の可積分性の条件は明らかである．さらに

$$\begin{aligned} E[(\phi\cdot X)_{t+1}|\mathscr{F}_t] &= E[(\phi\cdot X)_t + \phi_{t+1}\Delta X_{t+1}|\mathscr{F}_t] \\ &= (\phi\cdot X)_t + E[\phi_{t+1}\Delta X_{t+1}|\mathscr{F}_t] \\ &= (\phi\cdot X)_t + \phi_{t+1}E[\Delta X_{t+1}|\mathscr{F}_t] \\ &= (\phi\cdot X)_t. \quad (\because\ (2.10)) \end{aligned}$$

よって $\phi\cdot X$ はマルチンゲールになる．

また X が劣マルチンゲールのときは上の計算で ϕ の非負性を使って

$$\phi_{t+1}E[\Delta X_{t+1}|\mathscr{F}_t] \geq 0$$

に注意すれば $\phi\cdot X$ は劣マルチンゲールになる． □

この性質を使って，マルチンゲールを特徴付けることができる．

命題 2.6. $(\mathscr{F}_t)$-adapted な可積分な確率過程 (M_t) がマルチンゲールであるための必要十分条件は任意の有界な predictable process ϕ に対し

$$E[(\phi\cdot M)_t] = E[\sum_{u=1}^{t}\phi_u\Delta M_u] = 0 \tag{2.13}$$

が成り立つことである．

証明 M がマルチンゲールならば $X=\phi\cdot M$ もマルチンゲールで，$X_0=0$ だから $E[(\phi\cdot M)_t]=E[X_0]=0$ となる．

逆に (2.13) がすべての有界な predictable process ϕ に対して成り立っているとする．t を任意にとり固定しておく．そして $A\in\mathscr{F}_t$ をとり，$\phi_{t+1}=1_A$ で，その他の u については $\phi_u=0$ ととると

$$0 = E[(\phi\cdot M)_T] = E[1_A\Delta M_{t+1}].$$

A は任意だから，$E[\Delta M_{t+1}|\mathscr{F}_t]=0$ となり，M がマルチンゲールであることが分かる． □

任意抽出定理

次の定理を **Doob の任意抽出定理**という．

定理 2.7. (X_t) を優マルチンゲール，σ, τ を有界な停止時刻で $\sigma \leq \tau$ が成り立っているとする．このとき

$$E[X_\tau | \mathscr{F}_\sigma] \leq X_\sigma \tag{2.14}$$

が成り立つ．X がマルチンゲールであれば，(2.14) で等号が成立する．劣マルチンゲールであれば逆向きの不等式が成立する．

証明　$\phi = (\phi_t)$ を

$$\phi_t = 1_{\{\sigma < t \leq \tau\}}$$

と定める．すると

$$\{\sigma < t \leq \tau\} = \{\sigma < t\} \cap \{\tau < t\}^c = \{\sigma \leq t-1\} \cap \{\tau \leq t-1\}^c$$

より ϕ は非負で predictable である．変換 $\phi \cdot X$ を考えると τ の有界性から $\tau \leq k$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在する．よって

$$|(\phi \cdot X)_t| \leq |X_0| + \cdots + |X_k|$$

より $Z_t = (\phi \cdot X)_t$ は可積分で優マルチンゲールになる．$Z_0 = 0$ で $Z_k = X_\tau - X_\sigma$ であるから

$$0 = E[Z_0] \geq E[Z_k] = E[X_\tau - X_\sigma].$$

次に $A \in \mathscr{F}_\sigma$ として

$$\sigma_A = \begin{cases} \sigma, & \omega \in A \\ k, & \omega \notin A \end{cases} \qquad \tau_A = \begin{cases} \tau, & \omega \in A \\ k, & \omega \notin A \end{cases}$$

σ_A, τ_A は命題 2.2 から停止時刻で，上の結果を σ_A, τ_A について適用すると

$$E[X_\tau; A] \leq E[X_\sigma; A]$$

が得られる．これが求める結果である．□

定義 2.8. X を確率過程で τ を停止時刻とするとき，τ で停止させた確率過程 X^τ を $X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}$ で定義する．

定理 2.9. X を (優) マルチンゲール，τ を停止時刻とすると X^τ も (優) マルチンゲール である．劣マルチンゲールのときも同様．

Doob の不等式

定理 2.7 の応用として Doob の不等式を証明する．

命題 2.10. (X_t) を劣マルチンゲールとすると $\lambda > 0$ に対し次が成立する．

$$\lambda P(\max_{s\le t} X_s \ge \lambda) \le E[X_t;\ \max_{s\le t} X_s \ge \lambda] \le E[X_t^+]. \tag{2.15}$$

さらに

$$\lambda P(\sup_s X_s \ge \lambda) \le \sup_s E[X_s^+] \tag{2.16}$$

が成り立つ．

証明 $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻を

$$\sigma = \min\{t;\ X_t \ge \lambda\}$$

と定める．$\sigma < \infty$ のとき $X_\sigma \ge \lambda$ が成立していることを注意しておく．すると定理 2.7 から

$$E[X_{\sigma\wedge t}] \le E[X_t]. \tag{2.17}$$

さて $\max_{s\le t} X_s \ge \lambda$ が成り立っているとき $\sigma \le t$ で $X_\sigma \ge \lambda$ である．また $\max_{s\le t} X_s < \lambda$ のときは $t < \sigma$ となる．従って

$$\begin{aligned}
\lambda P(\max_{s\le t} X_s \ge \lambda) + E[X_t;\ \max_{s\le t} X_s < \lambda] &\le E[X_\sigma;\ \max_{s\le t} X_s \ge \lambda] + E[X_t;\ \max_{s\le t} X_s < \lambda] \\
&= E[X_{\sigma\wedge t}] \\
&\le E[X_t]. \quad (\because\ (2.17))
\end{aligned}$$

これから

$$\lambda P(\max_{s\le t} X_s \ge \lambda) \le E[X_t] - E[X_t; \max_{s\le t} X_s < \lambda] = E[X_t; \max_{s\le t} X_s \ge \lambda] \le E[X_t^+].$$

これで (2.15) が得られる．

(2.16) は $t \to \infty$ とすればいいわけだが，少し細工をする必要がある．停止時刻を $\sigma = \min\{t;\ X_t \ge \lambda\}$ として上の証明を繰り返すと

$$\lambda P(\max_{s\le t} X_s > \lambda) = E[X_t; \max_{s\le t} X_s > \lambda] \le E[X_t^+]$$

が成り立つ．ここで $t \to \infty$ とすると $\{\max_{s\le t} X_s > \lambda\} \uparrow \{\sup_s X_s > \lambda\}$ だから

$$\lambda P(\sup_s X_s > \lambda) \le \sup_t E[X_t^+]$$

を得る．λ は任意なので λ の代わりに $\lambda - \varepsilon$ を取って

$$P(\sup_s X_s > \lambda - \varepsilon) \le \frac{\sup_t E[X_t^+]}{\lambda - \varepsilon}.$$

ここで $\varepsilon \downarrow 0$ として

$$P(\sup_s X_s \geq \lambda) \leq \frac{\sup_t E[X_t^+]}{\lambda}.$$

これが求める結果である． □

これから次の Doob の最大不等式を得る．

定理 2.11. (X_t) をマルチンゲールとする．すると

$$\lambda P(\sup_t |X_t| \geq \lambda) \leq \sup_t E[|X_t|]. \tag{2.18}$$

が成り立つ．

証明　これは $(|X_t|)$ が劣マルチンゲールになるから，命題 2.10 を用いればよい． □

定理 2.12. (X_t) をマルチンゲールとし，

$$X^*(\omega) = \sup_t |X_t(\omega)| \tag{2.19}$$

とする．$1 < p < \infty$ に対して $X^* \in L^p$ であるための必要十分条件は

$$\sup_t \|X_t\|_p < \infty \tag{2.20}$$

となることである．さらに

$$\|X^*\|_p \leq q \sup_t \|X_t\|_p \tag{2.21}$$

が成り立つ．ここで $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ である．

証明　$Y = \sup_{s \leq t} |X_s|$ とおく．すると $(|X_t|)$ は劣マルチンゲールだから命題 2.10 から $\lambda > 0$ に対し

$$\lambda P(Y \geq \lambda) \leq E[|X_t|; Y \geq \lambda] \tag{2.22}$$

が成り立つ．これから

$$\begin{aligned}
E[Y^p] &= pE[\int_0^Y \lambda^{p-1}\, d\lambda] \\
&= pE[\int_0^\infty 1_{[0,Y]}(\lambda)\lambda^{p-1}\, d\lambda] \\
&= p\int_0^\infty E[1_{[0,Y]}(\lambda)]\lambda^{p-1}\, d\lambda \quad (\because \text{Fubini theorem}) \\
&= p\int_0^\infty P[Y \geq \lambda]\lambda^{p-1}\, d\lambda
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p\int_0^\infty \lambda^{-1}E[|X_t|; Y\geq\lambda]\lambda^{p-1}\,d\lambda \\
&= p\int_0^\infty \lambda^{-1}E[|X_t|1_{\{Y\geq\lambda\}}]\lambda^{p-1}\,d\lambda \\
&= pE[|X_t|\int_0^\infty 1_{\{Y\geq\lambda\}}\lambda^{p-2}\,d\lambda] \quad (\because \text{Fubini theorem}) \\
&= pE[|X_t|\int_0^Y \lambda^{p-2}\,d\lambda] \\
&= \frac{p}{p-1}E[|X_t|Y^{p-1}] \\
&\leq q\|X_t\|_p\|Y^{p-1}\|_q \quad (\because \text{Hölder の不等式}) \\
&= q\|X_t\|_p E[Y^{q(p-1)}]^{1/q} \\
&= q\|X_t\|_p E[Y^p]^{1/q}.
\end{aligned}
$$

これで $\|Y\|_p<\infty$ ならば $\|Y\|_p\leq q\|X_t\|_p$ が得られる．$\|Y\|_p<\infty$ は直接は分からないので Y の代わりに $Y\wedge k,\ k\in\mathbb{N}$ をとる．すると

$$
\{Y\wedge k\geq\lambda\}=\{Y\geq\lambda\}\cap\{k\geq\lambda\}=\begin{cases}\{Y\geq\lambda\} & \text{if } k\geq\lambda\\ \emptyset & \text{if } k<\lambda\end{cases}
$$

であるから (2.22) は Y のかわりに $Y\wedge k$ として成立．従って $\|Y\wedge k\|_p\leq q\|X_t\|_p$ が得られる．ここで $k\to\infty$ とすると $\|Y\|_p\leq q\|X_t\|_p$ が得られる．あとは $t\to\infty$ として (2.21) が得られる． □

特に $p=2$ のときは **Doob の不等式**として知られている．

定理 2.13. (M_t) をマルチンゲールとすると，

$$
E[\sup_{0\leq t\leq T} M_t^2]\leq 4E[M_T^2] \tag{2.23}
$$

が成り立つ．

Doob 分解

定理 2.14. X を優マルチンゲールとする．X は次のように表現される：

$$
X_t = X_0 + M_t - A_t. \tag{2.24}
$$

ここで (M_t) は $M_0=0$ であるマルチンゲール，(A_t) は $A_0=0$ である predictable な増加過程．さらにこの分解は一意的である．

証明　次のように帰納的に定めればよい．

$$
\begin{aligned}
A_t &= A_{t-1}+X_{t-1}-E[X_t|\mathscr{F}_{t-1}],\\
M_t &= M_{t-1}+X_t-E[X_t|\mathscr{F}_{t-1}].
\end{aligned}
$$

□

3.　同値マルチンゲール測度 (EMM)

条件付請求権の価格付けはマルチンゲールの理論と密接に結びついている．そこで discounted な株価過程を $(\overline{S})$ とする．この $(\overline{S})$ をマルチンゲールにするような確率測度 Q が存在したとしよう．即ち

$$E^Q[\Delta\overline{S}_t^i|\mathscr{F}_{t-1}] = 0, \quad i = 1, \ldots, d$$

が成り立っているとする．すると，

$$\overline{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \overline{G}_t(\theta) = \theta_1 \cdot S_0 + \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta\overline{S}_u = \theta_1^0 S_0^0 + \sum_{i=1}\left(\theta_1^i S_0^i + \sum_{u=1}^{t} \theta_u^i \Delta\overline{S}_u^i\right)$$

が成り立つ．右辺はマルチンゲール変換の形をしているから，$\overline{V}_t(\theta)$ がマルチンゲールであることは自明であるように思うが，可積分性が分からないのである．マルチンゲール変換がマルチンゲールであることは θ_u^i が有界であればよいが，このことは仮定されていない．

従って $(\overline{V}_t(\theta))$ がマルチンゲールであることは決して自明ではないが，このことは後の定理 3.3 で示すことにし，$(\overline{V}_t(\theta))$ がマルチンゲールになっていることはひとまず認めて議論を進める．$(\overline{V}_t(\theta))$ がマルチンゲールであることが分かると，この事実から裁定機会が存在しないことが示せる．θ を任意の self-financing な戦略で，$V_0(\theta) = 0$ かつ $V_T(\theta) \geq 0$ となるものとする．$(\overline{V}_t(\theta))$ は Q の下ではマルチンゲールである．特に $E[\overline{V}_T(\theta)] = E[V_0(\theta)] = 0$ となり，これから $V_T(\theta) = 0$　Q-a.e. が従う．Q と P が同値ならば (i.e., $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$) であれば，$V_T(\theta) = 0$　P-a.e. となり，裁定機会が存在しないことが示せた．従って次の定理が得られる．

定理 3.1. P と同値な確率測度 Q で，$(\overline{S})$ をマルチンゲールにするものが存在すれば，市場は viable である．即ち裁定機会は存在しない．

ここで言葉を 1 つ定義しておこう．

定義 3.2. $(\overline{S})$ をマルチンゲールにする P と同値な確率測度を，同値マルチンゲール測度 (equivalent martingale measure = EMM) とよぶ．

従って

- 同値マルチンゲール測度が存在すれば市場は viable である

であることがしめせた．

さて，上の証明で使った $\overline{V}_t(\theta)$ が マルチンゲールであることの証明を与えておく．特に Q について可積分という性質を示せばよいことになる．このことは決して自明ではないので証明をつけておく．

定理 3.3. Q を同値マルチンゲール測度，$H \geq 0$ を複製可能な条件付請求権とする．即ちある $\theta \in \mathrm{SF}$ を用いて $H = V_T(\theta)$ と表現できるとする．すると $\beta_T H$ は Q-可積分で，価値過程 $V_t(\theta)$ は

(3.1)
$$V_t(\theta) = \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T H|\mathscr{F}_t]$$

と表現される．

証明 $H = V_T(\theta)$ が成り立っているとする．割り引かれた価値過程を $\overline{V} = \overline{V}(\theta)$ と表す．まず (逆向きの) 帰納法で $\overline{V}_t \geq 0$ を示す．$t = T$ のときは $\overline{V}_T = \beta_T H \geq 0$ より明らか．

次に $\overline{V}_t \geq 0$ を仮定する．このとき $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_n = \{|\theta_t| \leq n,\ |\overline{V}_{t-1}| \leq n\}$$

とおくと $A_n \in \mathscr{F}_{t-1}$ である．θ は self-financing だから

$$\overline{V}_t = \overline{V}_{t-1} + \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t.$$

両辺に 1_{A_n} をかけて

$$\overline{V}_t 1_{A_n} = \overline{V}_{t-1} 1_{A_n} + \theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n}. \tag{3.2}$$

左辺は非負だから

$$\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} \geq -\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n}.$$

両辺可積分だから条件付き平均をとって

$$\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} | \mathscr{F}_{t-1}] \geq -E[\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n} | \mathscr{F}_{t-1}] = -1_{A_n}\theta_t \cdot E[\Delta\overline{S}_t | \mathscr{F}_{t-1}] = 0.$$

ここで $n \to \infty$ とすれば $\overline{V}_{t-1} \geq 0$ Q-a.e. が従う．

正値性が分かれば，(3.2) に戻って，右辺が可積分なので左辺も可積分となり

$$E[\overline{V}_t 1_{A_n}] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n}] + E[\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n}] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n}].$$

ここで $n \to \infty$ として $E[\overline{V}_t] = E[\overline{V}_{t-1}]$ を得る．$\overline{V}_0$ は定数で可積分なので，全ての t に対して $\overline{V}_t$ は可積分になる．

最後に $(\overline{V}_t)$ がマルチンゲールになることを示しておこう．$A \in \mathscr{F}_{t-1}$ を任意に取る．(3.2) の両辺に 1_A をかけて積分すれば

$$E[\overline{V}_t 1_{A_n} 1_A] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} 1_A] + E[\theta_t \cdot \Delta\overline{S}_t 1_{A_n} 1_A] = E[\overline{V}_{t-1} 1_{A_n} 1_A].$$

ここで再び $n \to \infty$ として

$$E[\overline{V}_t 1_A] = E[\overline{V}_{t-1} 1_A].$$

これでマルチンゲールであることが示せた．従って

$$\overline{V}_t(\theta) = E^Q[\beta_T H | \mathscr{F}_t]$$

より

$$V_t(\theta) = \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T H | \mathscr{F}_t]$$

が得られる． □

価格付け

(時刻 T における) 条件付け請求権 H が複製可能なら，その (時刻 0 における) 価格 $\pi(H)$ は

$$\pi(H) = \overline{V}_0(\theta) = E^Q[\beta_T H|\mathscr{F}_0] = E^Q[\beta_T H] \tag{3.3}$$

で与えられる．これは H を複製するのに必要な最初の資金が $\overline{V}_0(\theta)$ であるから自然な結果である．

優ヘッジ

もう少し一般的な観点から価格付けの問題を考えてみよう．

定義 3.4. 条件付き請求権 H が与えられたとき，初期投資を x として $V_T(\theta) \geq H$ となる許容戦略 θ を (x, H)**-ヘッジ**という．

定義のような戦略を**優ヘッジ** (superhedging) という．これは売り手の側の見方で，このような戦略でポートフォリオを組めば，満期時に H を要求されたときに，損失を生むことなく顧客の要求に応じることが出来る．従って実用の立場から言えば，この優ヘッジ戦略を見出すことが重要な問題となる．特に $V_T(\theta) = H$ となる θ を最小ヘッジ (minimal hedge) という．

さて，複製が可能な条件付き請求権の場合はこれでよいが，一般論としては次のように考える必要がある．売り手の立場からはヘッジできることが必要なので，売り手値段 (seller's price) は

$$\pi_s = \inf\{z \geq 0; \exists\theta \in \mathrm{SF} \text{ s.t. } V_T(\theta) = z + G_T(\theta) \geq H\}$$

買い手の立場からは，買い手値段 (buyer's price) は

$$\pi_b = \sup\{y \geq 0; \exists\theta \in \mathrm{SF} \text{ s.t. } -y + G_T(\theta) \geq -H\}$$

とすれば，満期時に損失を生むことがない．

命題 3.5. 市場が viable であれば次が成立する:

$$\pi_b \leq E^Q[\beta_T H] \leq \pi_s. \tag{3.4}$$

証明　$V_T(\theta) = z + G_T(\theta) \geq H$ としよう．$z = V_0(\theta)$ である．$\overline{V}_T = V_0 + \overline{G}_T$ であり，$\overline{S}$ がマルチンゲールであるから $E^Q[\overline{G}_T] = 0$ となる．従って

$$z = V_0(\theta) = E^Q[\overline{V}_T] = E^Q[\beta_T V_T] \geq E^Q[\beta_T H]$$

inf をとって

$$\pi_s \geq E^Q[\beta_T H]$$

が得られる．$\pi_b \leq E^Q[\beta_T H]$ も同様である．□

上のことから市場が viable で，条件付き請求権 H が複製可能な場合は $\pi_s = \pi_b = E^Q[\beta_T H]$ となり，これが合理的な価格であることが分かる．

コール・プットパリティ

ここでもう一度コーループットパリティを見直してみよう．コールとプットの値段は

$$\beta_t C_t = E^Q[\beta_T (S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t]$$
$$\beta_t P_t = E^Q[\beta_T (K - S_T)_+ | \mathscr{F}_t]$$

であるから

$$\begin{aligned} C_t - P_t &= \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T (S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t] - \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T (K - S_T)_+ | \mathscr{F}_t] \\ &= \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T (S_T - K) | \mathscr{F}_t] \\ &= \beta_t^{-1} E^Q[\beta_T S_T | \mathscr{F}_t] - \beta_t^{-1} E[\beta_T K | \mathscr{F}_t] \\ &= \beta_t^{-1} \beta_t S_t - (1+\rho)^t (1+\rho)^{-T} K \\ &= S_t - (1+\rho)^{-(T-t)} K \end{aligned}$$

となり，(1.1) が再び得られた．

多期間のリスク中立測度

多期間の場合のリスク中立測度 Q を求め，コールオプションの価値過程 V_t が

$$V_t = (1+\rho)^{-(T-t)} E^Q[((S_T - K)_+ | \mathscr{F}_t] \tag{3.5}$$

で与えられることを示す．ここで $E^Q[\ \ |\mathscr{F}_t]$ は**条件付き期待値**である．

リスク中立測度 Q の構成について述べる．

$$R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$$

と定める．Q は，この確率変数列 $R_1, R_2, \ldots, R_T$ が独立同分布になるようなもので，分布は

$$Q(R_t = 1+b) = q, \quad Q(R_t = 1+a) = 1-q$$

で与えられる．

$$q = \frac{\rho - a}{b - a}$$

であったから

$$\begin{aligned} E^Q[R_t] &= (1+b)\frac{\rho - a}{b - a} + (1+a)\frac{b - \rho}{b - a} \\ &= \frac{\rho - a + b\rho - ba + b - \rho + ab - a\rho}{b - a} \\ &= \frac{(b-a)(1+\rho)}{b - a} \\ &= 1 + \rho. \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} E^Q[\beta S_{t+1}|\mathscr{F}_t] &= \beta E^Q[S_t R_{t+1}|\mathscr{F}_t] \\ &= \beta S_t E^Q[R_{t+1}|\mathscr{F}_t] \\ &= \beta S_t E^Q[R_{t+1}] \quad (\because R_{t+1} \text{ と } \mathscr{F}_t \text{ の 独立性}) \\ &= \beta S_t(1+\rho) = S_t. \end{aligned}$$

これは $\{\beta^t S_t\}$ がマルチンゲールになっていることを意味する:

$$E^Q[\beta^{t+1}S_{t+1}|\mathscr{F}_t] = \beta^t S_t.$$

この測度 Q を用いると

$$\begin{aligned} &(1+\rho)^{-(T-t)}E^Q[(S_T-K)_+|\mathscr{F}_t] \\ &\quad = (1+\rho)^{-(T-t)}E^Q[(S_t R_{t+1}\dots R_T - K)_+|\mathscr{F}_t] \\ &\quad = (1+\rho)^{-(T-t)}\sum_{s=0}^{T-t}\binom{T-t}{s}q^s(1-q)^{T-t-s}(S_t(1+b)^s(1+a)^{T-t-s}-K)_+ = V_t. \end{aligned}$$

これは (2.7) で求めたものと一致する．これで価値過程がリスク中立測度による条件付き期待値として表されることが確認できた.

第3章　Black-Scholes 公式

多期間2項モデルの時間分割を細かくして行った極限として，連続時間の最も基本的なモデルである Black-Scholes モデルが得られる．そのことを以下に見ていく．

1.　離散の極限

時間区間 $[0,T]$ を N 等分する．$h_N = \frac{T}{N}$ とおいて，時刻列 $\{0, h_N, 2h_N, \dots, Nh_N\}$ を取る．ここで N ステップの2項モデルを考える．パラメータとして，a, b, ρ があったが，これらは N に応じて変えていく．従って a_N のように依存性を明確にすべきであるが，かえって煩雑になるので単に a とかく．h_N も単に h とかく．定数として $r \geq 0, \sigma > 0$ を与え，これをパラメーターとして a, b, ρ が次の関係を満たすように N に依存して取る．

$$\rho = rh$$
$$\log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right) = \sigma\sqrt{h} = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}},$$
$$\log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right) = -\sigma\sqrt{h} = -\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}.$$

ここで ρ に関して

$$\lim_{N\to\infty}(1+\rho)^N = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{rT}{N}\right)^N = e^{rT}$$

が成り立つことに注意しておく．さらに u, d を次のように定める (やはり N に依存する)

$$u = 1 + b = \left(1+\frac{rT}{N}\right)e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}$$
$$d = 1 + a = \left(1+\frac{rT}{N}\right)e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}.$$

時刻 kh における株価を S_k と表し，

$$R_k = \frac{S_k}{S_{k-1}}$$

と定める (これらも N に依存するが，とくに明示しない)．リスク中立確率は次を満たした．

$$Q(R_k = 1+b) = q = \frac{\rho - a}{b - a}, \quad Q(R_k = 1+a) = 1 - q = \frac{b-\rho}{b-a}.$$

ここで新たな独立同分布の確率変数列 $\{Y_k\}_{k=1,\dots,N}$ を次で定める．

$$Y_k = \log\left(\frac{R_k}{1+\rho}\right).$$

これから

$$Z_N = \sum_{k=1}^{N} Y_k = \sum_{k=1}^{N} \log R_k - N\log(1+\rho)$$

とおくと，時刻 $T = Nh$ における株価は

$$S_N = S_0 \prod_{k=1}^{N} R_k = S_0(1+\rho)^N \exp\left\{\sum_{k=1}^{N} Y_k\right\} = S_0(1+\rho)^N e^{Z_N}$$

と表される．よってコールオプション $C = (S_N - K)_+$ の価格は

$$\begin{aligned} V_0(C) &= \beta^N E^Q[(S_N - K)_+] \\ &= \beta^N E^Q[(S_0(1+\rho)^N e^{Z_N} - K)_+] \\ &= E^Q[(S_0 e^{Z_N} - (1+\rho)^{-N}K)_+] \end{aligned} \tag{1.1}$$

で得られる．ここで $N \to \infty$ の極限を取ることを次に考える．

Y_k の分布

Y_k の平均を μ, 分散を v として計算する．まず平均は

$$\begin{aligned} E^Q[Y_k] &= E^Q\left[\log\left(\frac{R_k}{1+\rho}\right)\right] \\ &= \log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right)q + \log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right)(1-q) \\ &= \sigma\sqrt{h}q - \sigma\sqrt{h}(1-q) \\ &= (2q-1)\sigma\sqrt{h}. \end{aligned}$$

また 2 次のモーメントは

$$\begin{aligned} E^Q[Y_k^2] &= E^Q\left[\log\left(\frac{R_k}{1+\rho}\right)\right] \\ &= \left\{\log\left(\frac{1+b}{1+\rho}\right)\right\}^2 q + \left\{\log\left(\frac{1+a}{1+\rho}\right)\right\}^2 (1-q) \\ &= \sigma^2 hq + \sigma^2 h(1-q) = \sigma^2 h \end{aligned}$$

なので，分散は

$$v = E^Q[Y_k^2] - E^Q[Y_k]^2 = \sigma^2 h - (2q-1)^2\sigma^2 h.$$

それぞれの極限を求めるために q を調べよう．

$$
\begin{aligned}
1-q &= \frac{b-\rho}{b-a} \\
&= \frac{1+b-(1+\rho)}{1+b-(1+a)} \\
&= \frac{(1+\rho)e^{\sigma\sqrt{h}}-(1+\rho)}{(1+\rho)e^{\sigma\sqrt{h}}-(1+\rho)e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{e^{\sigma\sqrt{h}}-1}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
2q-1 &= 1-2(1-q) \\
&= 1-2\frac{e^{\sigma\sqrt{h}}-1}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}-2e^{\sigma\sqrt{h}}+2}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{2-e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}}-e^{-\sigma\sqrt{h}}} \\
&= \frac{1-\cosh\sigma\sqrt{h}}{\sinh\sigma\sqrt{h}} \sim -\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h}.
\end{aligned}
$$

以上により

$$
N\mu = N(2q-1)\sigma\sqrt{h} \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{h}\right)\sigma\sqrt{h} = -\frac{1}{2}\sigma^2 Nh = -\frac{1}{2}\sigma^2 T.
$$

また

$$
Nv = N\sigma^2 h - N(2q-1)^2\sigma^2 h = \sigma^2 T - (2q-1)^2\sigma^2 T \sim \sigma^2 T.
$$

ここで次の中心極限定理を使う．

定理 1.1. 各 $N \in \mathbb{N}$ に対して独立同分布の確率変数 $\{Y_k^N\}_{k=1,\ldots,N}$ が与えられている．さらに平均を μ_N, 分散を σ_N^2 とするとき，$N\mu_N \to \mu$, $N\sigma_N^2 \to \Sigma^2$ が成立している．このとき $Z_N = \sum_{k=1}^N Y_k^N$ は平均 μ, 分散 Σ^2 の正規分布に収束する．

これを我々の場合使うと Z_N が平均 $-\frac{1}{2}\sigma^2 T$, 分散 $\sigma^2 T$ の正規分布に収束する．この分布を持つ確率変数を Z とすると，プットオプションの極限での価格は (1.1) で $N \to \infty$ として

$$
V_0(C) = E^Q[(S_0 e^Z - e^{-rT}K)_+] \tag{1.2}
$$

で与えられる．

2.　Black-Scholes の公式

$$X = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(Z + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)$$

とおくと，X は $N(0,1)$ に従う．書き換えると

$$Z = \sigma\sqrt{T}X - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

であるから，$V_0(C)$ の値は

$$V_0(C) = \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

x の積分範囲は

$$\log\left(\frac{K}{S_0}\right) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x$$

をといて

$$x = \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

この右辺を γ とおくと，

$$\begin{aligned}
V_0(C) &= \int_{\gamma}^{\infty} (S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} - e^{-rT}K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
&= S_0 \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - e^{-rT}K \int_{\gamma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \\
&= S_0 \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x - \sigma\sqrt{T})^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx - e^{-rT}K(1 - \Phi(\gamma)) \\
&= S_0 \int_{\gamma - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx - e^{-rT}K(1 - \Phi(\gamma)) \\
&= S_0(1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T})) - e^{-rT}K(1 - \Phi(\gamma)).
\end{aligned}$$

但し，Φ は $N(0,1)$ の分布関数である：

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy.$$

ここで $d^- = -\gamma$, $d^+ = d^- + \sigma\sqrt{T}$ とおくと

$$\begin{aligned}
1 - \Phi(\gamma) &= \Phi(-\gamma) = \Phi(d^-) \\
1 - \Phi(\gamma - \sigma\sqrt{T}) &= \Phi(d^+)
\end{aligned}$$

である．即ち

$$d^{\pm} = \frac{\log(\frac{K}{S_0}) - (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

である．これを使うと

$$V_0(C) = S_0\Phi(d^+) - e^{-rT}K\Phi(d^-).$$

これが Black-Scholes の公式と呼ばれるコールオプションの価格を与える式である．

同様に時刻 t における価格は

$$V_t(C) = S_t\Phi(d_t^+) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_t^-). \tag{2.1}$$

ただし

$$d_t^{\pm} = \frac{\log(\frac{K}{S_t}) - (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である．

(2.1) のコールオプションの価格を c とすると c は S_t, t, K, T, r, σ の関数となる．c は次のような性質があることが確かめられる．

1. c を S_t と t の関数とみなすとき，即ち $V_t(C) = c(S_t, t)$ と表して， $c(x, t)$ は次の Black-Scholes の偏微分方程式を満たしている:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + rx\frac{\partial c}{\partial x} - rc = 0. \tag{2.2}$$

2. 次の関係を満たしている．

   - $\lim_{T\to t} c(S_t, t) = (S_t - K)_+$
   - $\dfrac{\partial c}{\partial \sigma} > 0$
   - $\lim_{\sigma\to\infty} c(S_t, t) = S_t$
   - $\lim_{\sigma\to 0} c(S_t, t) = (S_t - Ke^{-r(T-t)})_+$
   - $\dfrac{\partial c}{\partial x} = \Phi(d_+)$

第4章　基本定理

1.　完備市場

この節では，有限市場の場合に次の同値性を示す.

- 市場が viable $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度が存在する
- viable な市場が完備である $\Leftrightarrow$ 同値マルチンゲール測度は一意である

ここでは，市場は有限であると仮定している．即ち Ω は有限個の点からなるものとする．無限の場合は初等的でないのでここでは扱わない.

分離定理

次の定理は分離定理としてよく知られている．ここでは有限次元空間としたが Banach 空間でも成り立つ.

定理 1.1. L を $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間，K を L と交わらないコンパクトな凸集合とする．このとき K と L を分離する超平面が存在する．すなわち，線型汎関数 $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ で L 上で $\phi(x) = 0$，K 上で $\phi(x) > 0$ となるものが存在する.

証明　claim 1 $C \subseteq \mathbb{R}^n$: 閉凸集合，$0 \notin C \Leftrightarrow$ ある線型汎関数 ψ で $\psi \geq c > 0$ on C.
$\because B = B(0, r) = \{x; |x| < r\}$ を $B \cap C \neq \emptyset$ と取る．$z \in B \cap C$ を原点 0 からの最短点とする．C の凸性から $x \in C$, $\lambda \in [0, 1]$ のとき

$$y = \lambda x + (1 - \lambda)z \in C$$

であるから

$$|z|^2 \leq |\lambda x + (1 - \lambda)z|^2 = \lambda^2|x|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x \cdot z + (1 - \lambda)^2|z|^2.$$

よって

$$\lambda^2|x|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x \cdot x + (\lambda^2 - 2\lambda)|z|^2 \geq 0$$
$$\lambda|x|^2 + 2(1 - \lambda)x \cdot z + (\lambda - 2)|z|^2 \geq 0$$

ここで $\lambda \to 0$ として

$$x \cdot z \geq |z|^2.$$

よって $\psi(x) = x \cdot z$ と定めれば，C 上で $\psi \geq |z|^0$ である．//

claim 2 $C = K - L = \{k - l;\ k \in K,\ l \in L\}$ とおくと，C は閉凸集合で $0 \notin C$.

$\because$ 閉であることだけ示す．$x_n = k_n - l_n$ が x に収束すると，k_n から収束する部分列 k_{n_j} が取れる．極限を $k \in K$ とする．

$$l_{n_j} = k_{n_j} - x_{n_j} \to k - x$$

L は閉集合だから $k - x \in L$ となり，$x = k - l \in K - L$. //

claim 2 の C に claim 1 を用いて，$\psi \geq c$ on $K - L$ とできる．$x = k - \lambda l$ として

$$\psi(k) - \lambda\psi(l) > c$$

$\lambda \to \infty$ or $\lambda \to -\infty$ とすることにより，$\psi(l) = 0$ でなければならない．よって $\psi(k) > c$. □

2.　同値マルチンゲール測度

さて，有限市場を考える．すると確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ も有限になる．S^0 を安全証券，$S^1, \ldots, S^d$ を危険証券とする．Ω は n 個の元からなるとしよう．Ω 上の確率変数 X は Ω から $\mathbb{R}$ への写像全体であるから，n 次元ユークリッド空間と同型であるから，前の定理が使える．C を次のようにおこう．

$$C = \{X \colon \Omega \to \mathbb{R};\ X \geq 0 \text{ で，ある } \omega \in \Omega \text{ に対して } X(\omega) > 0\}.$$

無裁定の条件は許容戦略 $\theta \in \Theta_a$ に対して

$$\overline{V}_t(\theta) = \overline{G}_t(\theta) \notin C \quad \text{if } V_0(\theta) = 0$$

が成り立つことである．そうでなければ，それは裁定機会の存在を意味する．

自己充足戦略 (self-financing strategy) $\theta = (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^d)$ は株の保有量 $\hat{\theta} = (\theta^1, \ldots, \theta^d)$ できまる．$\hat{\theta}$ に対しても利得を $t = 1, 2, \ldots, T$ に対して

$$\overline{G}_t(\hat{\theta}) = \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta\overline{S}(u) = \sum_{u=1}^{t}\sum_{i=1}^{d} \theta_u^i \Delta\overline{S}_u^i.$$

$\overline{G}_T(\hat{\theta}) \in C$ ならば，$\beta_t = (S_t^0)^{-1}$ を割引率として

$$V_T(\theta) = \beta_T^{-1}\overline{V}_T(\theta) = \beta_T^{-1}\{V_0(\theta) + \overline{G}_T(\theta)\} = \beta_T^{-1}\overline{G}_T(\hat{\theta})$$

は非負で，どこかで正になる．よって θ は裁定機会となり，viability に矛盾するので $\overline{G}_T(\hat{\theta}) \notin C$ が結論できる．次の補題が証明できた．

補題 2.1. 市場が viable であるならば，predictable $\mathbb{R}^d$-値確率過程 $\hat{\theta}$ から定まる割り引かれた利得過程 $\overline{G}_T(\hat{\theta})$ は C には属さない．

次の定理がこの節の主定理である．**第一基本定理**と呼ばれる．有限市場であることを仮定している．

定理 2.2. 市場が viable であるための必要十分条件は，同値マルチンゲール測度が存在することである．

証明　同値マルチンゲール測度が存在すれば，市場は viable であることは証明したので，逆を示せばよい．C は すべての ω に対して $F(\omega) \geq 0$ で，ある ω_0 に対して $F(\omega_0) > 0$ となる Ω 上の関数全体のなす凸錐である．市場が viable であれば 補題 2.1 から $\overline{G}_T(\hat{\theta}) \notin C$ である．ところで

$$L = \{\overline{G}_T(\hat{\theta});\ \hat{\theta} = (\theta^1, \ldots, \theta^d),\ \theta^i\ (i = 1, \ldots, d)\ \text{は predictable}\}$$

は Ω 上の関数の線型部分空間である．$\Omega = \omega_1, \ldots, \omega_n$ として，$p_i = P(\{\omega_i\}) > 0$ とおく．

L と C は共通部分を持たない．

$$K = \{X \in C; E^P[X] = 1\}$$

はコンパクトな部分集合である．ここで Ω が有限集合であることを使っている．よって分離定理から L 上で 0 で，K 上で正となる線型汎関数 f が存在する．f は次のような表現を持つ:

$$f(x) = x \cdot q = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i.$$

$\xi_i = (0, \ldots, 0, \frac{1}{p_i}, 0, \ldots, 0)$ とおくと，$E^P[\xi] = 1$ だから $\xi_i \in K$ であるから $f(\xi) = \frac{q_i}{p_i} > 0$ である．従って $q_i > 0$ でなければならない．新たな線型汎関数を $g = \frac{f}{\alpha}$, $\alpha = \sum_{i=1}^n q_i$ で定める．$p_i^* = \frac{q_i}{\alpha}$ とおくと，これは新たな確率測度 P^* を定める．$P^* \sim P$ である．

さて，$g(x) = \frac{1}{\alpha} f(x) = 0$ on L だから $E^{P^*}[\overline{G}_T(\hat{\theta})] = 0$ である．$\hat{\theta}$ から self-financing strategy θ で $V_0(\theta) = 0$ となるものが対応する．よって $E^{P^*}[\overline{G}_T(\theta)] = 0$ となる．すなわち

$$E^{P^*}\left[\sum_{u=1}^{T} \theta_u^i \Delta \overline{S}_u^i\right] = 0.$$

ここで命題 2.2 を使えば，$\overline{S}^i$ がマルチンゲールになる．これで P^* が同値マルチンゲール測度であることが示せた．　□

3.　市場の完備性

定義 3.1. 任意の条件付き請求権が複製可能のとき，市場は**完備**であるという．

完備性の特徴付けを与えよう．

命題 3.2. EMM Q を持つ viable な有限市場が完備であるための必要十分条件は $(Q,(\mathscr{F}_t))$-マルチンゲール M が次の表現を持つことである：ある predictable process γ が存在し

$$M_t = M_0 + \sum_{u=1}^{t} \gamma_u \cdot \Delta\overline{S}_u = M_0 + \sum_{u=1}^{t}\sum_{i=1}^{d} \gamma_u^i \Delta\overline{S}_u^i. \tag{3.1}$$

証明　まず市場が完備であると仮定する．M を $(Q,(\mathscr{F}_t))$-マルチンゲールとする．マルチンゲールは非負マルチンゲールの差とあらわされるので，M は非負であるとする．$H = M_T S_T^0$ ととると，完備性から $\theta \in \Theta_a$ がとれて $V_T(\theta) = H$ とできる．したがって $\overline{V}_T(\theta) = M_T$ となる．$\overline{V}$ は Q-マルチンゲールであったから

$$\overline{V}_t(\theta) = E^Q[\overline{V}_T(\theta)|\mathscr{F}_t] = E^Q[M_T|\mathscr{F}_t] = M_t.$$

よって

$$M_t = \overline{V}_t(\theta) = \overline{V}_0(\theta) + \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta\overline{S}_u = M_0 + \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta\overline{S}_u$$

となるので，(3.1) のように表される．

逆に条件付き請求権 H を与える．マルチンゲール M を

$$M_t = E^Q[\beta_T H|\mathscr{F}_t]$$

で定める．仮定より，M_t は (3.1) の表現を持つ．そこで

$$\begin{aligned}\theta_t^i &= \gamma_t^i, \quad i = 1,\dots,d\\ \theta_t^0 &= M_t - \gamma_t \cdot \overline{S}_t\end{aligned}$$

と定める．θ が self-financing であることを示せばよい．すなわち $\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} = 0$. 実際

$$\begin{aligned}\Delta\theta_t \cdot S_{t-1} &= S_{t-1}^0(\Delta M_t - \Delta[\sum_{i=1}^{d} \gamma_t^i \overline{S}_t^i]) + \sum_{i=1}^{d} S_{t-1}^i \Delta\gamma_t^i\\ &= \sum_{i=1}^{d} (S_{t-1}^0[\gamma_t^i \Delta\overline{S}_t^i - (\gamma_t^i\overline{S}_t^i - \gamma_{t-1}^i\overline{S}_{t-1}^i)] + S_{t-1}^i\Delta\gamma_t^i)\\ &= \sum_{i=1}^{d} (S_{t-1}^0[\cancel{\gamma_t^i\overline{S}_t^i} - \gamma_t^i\overline{S}_{t-1}^i - (\cancel{\gamma_t^i\overline{S}_t^i} - \gamma_{t-1}^i\overline{S}_{t-1}^i)] + S_{t-1}^i\Delta\gamma_t^i)\\ &= \sum_{i=1}^{d} S_{t-1}^i(\Delta\gamma_t^i - \Delta\gamma_t^i) = 0.\end{aligned}$$

さらに

$$\overline{V}_t(\theta) = \theta_t \cdot \overline{S}_t = \theta_t^0 + \gamma_t \cdot \overline{S}_t = M_t$$

である．特に $\overline{V}_T(\theta) = M_T = \beta_T H$ より $V_T(\theta) = H$ となるから完備性が示せた．　□

これを使うと，完備性と EMM の一意性の同値性が示せる．次の定理は**第二基本定理**と呼ばれる．

定理 3.3. viable な有限市場が完備であるための必要十分条件は，同値マルチンゲール測度が一意的であることである．

証明 完備性を仮定する．このとき二つの EMM Q と Q' が存在したとする．H を条件付き請求権とすると，$\theta \in \Theta_a$ が存在して

$$\beta_T H = V_T(\theta) = V_0(\theta) + \sum_{u=1}^{T} \theta_u \cdot \Delta \overline{S}_u.$$

$\overline{S}$ は Q の下でも，Q' の下でもマルチンゲールだから

$$E^Q[\beta_T H] = V_0(\theta) = E^{Q'}[\beta_T H].$$

これから

$$E^Q[H] = E^{Q'}[H]$$

となるから $Q = Q'$ が従う．

逆を示すために，市場は viable であるが，完備でないとする．すると複製できない非負確率変数 X が存在する．

$$L = \{c + \sum_{u=1}^{T} \hat{\theta}_u \cdot \Delta \overline{S}_u : \ \hat{\theta} = (\theta^1, \ldots, \theta^d) \text{ is predictable}\}.$$

これは Ω 上の関数全体 $L^0(\Omega, P)$ の線形部分空間である．$L^0(\Omega, P)$ は $\mathbb{R}^n$ と同じであった．$\beta_T X \notin L$ である．もし $\beta_T X \in L$ ならば $\beta_T X = \overline{V}_T(\hat{\theta})$ とできるが，$\theta = (\theta^0, \hat{\theta})$ が self-financing になるように θ^0 を決められる ((1.18)) ので，$\beta_T X = \overline{V}_T(\theta)$, したがって $X = V_T(\theta)$ となり，X が複製できてしまう．L は有限次元なので閉集合であり，$L^0(\Omega, P)$ とは一致しないから L に直行する非自明な元 Z が存在する：

$$E^Q[YZ] = 0, \quad \forall Y \in L.$$

特に $1 \in L$ だから $E[Z] = 0$ である．$R = 1 + \frac{Z}{2\|Z\|_\infty}$ とおくと，$R \geq \frac{1}{2}$. そこで測度 Q' を

$$Q' = RQ$$

で定めると，Q' は再び確率測度になる．しかも $Y = c + \sum_{u=1}^{T} \hat{\theta}_u \cdot \Delta \overline{S}_u \in L$ のとき

$$E^{Q'}[Y] = E^Q[RY] = E^Q[Y] + \frac{1}{2\|Z\|_\infty} E^Q[YZ] = E^Q[Y] = c.$$

特に $c = 0$ ならば $E^{Q'}[Y] = 0$ だから

$$E^{Q'}[\sum_{u=1}^{T} \hat{\theta}_u \cdot \Delta \overline{S}_u] = 0.$$

これは Q' が同値マルチンゲール測度であることを意味し，一意性に矛盾する． □

CRR モデルの完備性

CRR モデルは $S_t^0 = (1+\rho)^t$ と $S_t = R_t S_{t-1}$ が与えられている．R_t は i.i.d. で

$$R_t = \begin{cases} 1+b, & \text{確率 } q = \frac{\rho-a}{b-a} \\ 1+a, & \text{確率 } 1-q = \frac{b-\rho}{b-a} \end{cases}$$

ここで $-1 < a < \rho < b$ を viable を保証するために仮定する．EMM はこれで完全に特徴付けられる．記法の簡単のために $u = 1+b$, $d = 1+a$, $E^Q[R_t] = w$ とする．また $\mathscr{F}_t = \sigma\{R_u; u \leq t\}$ とする．さらに

$$m_t = \sum_{u=1}^{t} (R_u - w)$$

とおくと，(m_t) は平均 0 のマルチンゲールである．完備性を示そう．

命題 3.4. $M_0 = 0$ となる任意の Q-マルチンゲールは

$$M_t = \sum_{u=1}^{t} \theta_u \cdot \Delta m_u \tag{3.2}$$

とあらわされる．ただし $\theta = (\theta_t)$ は predictable である．

証明　M_t は $\mathscr{F}_t$ 可測だから

$$M_t = f_t(R_1, \ldots, R_t)$$

と表される．(3.2) が成り立っていると，$\Delta M_t = \theta_t \Delta m_t$ であるから

$$\begin{aligned} f_t^u &= f_t(R_1, \ldots, R_{t-1}, u) \\ f_t^d &= f_t(R_1, \ldots, R_{t-1}, d) \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f_t^u - f_{t-1} &= \theta_t (u - w), \\ f_t^d - f_{t-1} &= \theta_t (d - w) \end{aligned}$$

が従う．上の式は

$$\theta_t = \frac{f_t^u - f_{t-1}}{u - w} = \frac{f_t^d - f_{t-1}}{d - w}$$

を意味する．実際にこれが成り立っていることを見よう．$E^Q[\Delta M_t | \mathscr{F}_{t-1}] = 0$ から

$$q f_t^u + (1-q) f_t^v = f_{t-1} = q f_{t-1} + (1-q) f_{t-1}.$$

よって

$$\frac{f_t^u - f_{t-1}}{q-1} = \frac{f_t^d - f_{t-1}}{q}$$

ここで

$$w = E^Q[R_1] = uq + v(1-q)$$

から

$$q = \frac{w-d}{u-d}, \quad q-1 = \frac{w-u}{u-d}$$

となるから，上の式と同値になることがわかる． $\square$

ところで 命題 3.2 ではマルチンゲールが $M_t = M_0 + \sum_{u=1}^{t} \gamma_u \cdot \Delta\overline{S}_u$ と表現できることが完備性の必要十分条件であった．これは Δm_u で表現するのとは異なるので，両者の関係を見ておこう．まず

$$\begin{aligned} E^Q[R_t] &= (1+b)q + (1+a)(1-q) \\ &= (1+b)\frac{\rho - a}{b-a} + (1+a)\frac{b-\rho}{b-a} \\ &= \frac{\rho(1+b-1-a) - a - ba + b + ab}{b-a} \\ &= \frac{(1+\rho)(b-a)}{b-a} \\ &= 1+\rho. \end{aligned}$$

つまり $w = 1+\rho$ である．さらに

$$\begin{aligned} \Delta\overline{S}_t &= (1+\rho)^{-t}S_t - (1+\rho)^{-t+1}S_{t-1} \\ &= (1+\rho)^{-t}(S_{t-1}R_t - (1+\rho)S_{t-1}) \\ &= (1+\rho)^{-t}S_{t-1}(R_t - (1+\rho)) \\ &= (1+\rho)^{-t}S_{t-1}(R_t - w) \\ &= (1+\rho)^{-t}S_{t-1}\Delta m_t \end{aligned}$$

となるので，両者は同値であることが分かる．

第5章　アメリカンオプション

1.　離散アメリカ型オプション

前節までは満期日が決まっているヨーロッパ型オプションについて論じた．ここでは，行使時刻をランダムに選べるアメリカ型オプションについて述べる．

アメリカ型オプション

取引時刻を $t = 0, 1, \dots, T$ とし，安全証券は S^0, 株価などの危険証券を $S^1, \dots, S^d$ とする．割引率を $\beta_t = (S_t^0)^{-1}$ とおく．$S = (S^0, S^1, \dots, S^d)$ とかく．時刻 t までに生成される σ-field を $\mathscr{F}_t$ と表す.

$t \in \mathbb{T}$ に対して条件付き請求権 $f_t(S)$ が与えられ，ランダムに時刻を選んでこれを行使できるようなオプションを考え，その価格付けの問題を考えよう．この様なオプションを**アメリカ型オプション**という．市場は viable で完備であるとする．測度 P は初めから同値マルチンゲール測度をとって考える．以下では測度はこの P に固定しておく．権利の行使はランダムであるが，未来の情報を使うことが出来ないという制約をつける．数学的には行使時刻は停止時刻であるとする．ここに τ が停止時刻とは，任意の t に対し

$$\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \tag{1.1}$$

をみたす $\mathbb{Z}_+$-値の確率変数のことであった．一般論としては $\mathbb{Z}_+$-値であるが，取引時刻は $\mathbb{T}$ としているのでここで考えるのは $\mathbb{T}$-値のみである．さて，停止時刻 τ で権利行使すれば，$f_\tau(S)$ の利得が得られる．従ってその価格は $E[\beta_\tau f_\tau(S)]$ である．τ は $\mathbb{T}$-値停止時刻を自由に選べるから

$$x = \sup_\tau E[\beta_\tau f_\tau(S)] \tag{1.2}$$

が価格と考えられる．一方またこのオプションを売る側の立場からはどの時刻で権利行使されても hedge できるように複製しなければならないので，許容戦略 θ を

$$V_t(\theta) \ge f_t(S) \tag{1.3}$$

が全ての t で成り立つようにしなければならない．従って

$$V_0(\theta) = E[\overline{V}_\tau(\theta)] = E[\beta_\tau V_\tau(\theta)] \ge E[\beta_\tau f_\tau(S)]$$

なので $V_0(\theta) \ge x$ である．θ をうまく取れば，(1.3) を満たし，$V_0(\theta) = x$ とできることを示すのがこの節の目標である．従って (1.2) で定めた価格が合理的であることもこれで分かる．

2.　スネル包

定義 2.1. X を非負の確率過程とする．次で定まる確率過程 Z を**スネル包** (Snell envelope) と呼ぶ．

$$\begin{aligned} Z_T &= X_T \\ Z_{t-1} &= \max\{X_{t-1}, E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]\} \quad t = 1, 2, \ldots, T. \end{aligned}$$

次の命題が基本的である．

命題 2.2. (Z_t) を (X_t) のスネル包とすると，次が成り立つ．

1. Z は X より大きな最小の優マルチンゲールである．

2. $\tau^* = \min\{t \geq 0; Z_t = X_t\}$ とおくと，Z^{τ^*} はマルチンゲールである．

証明　$Z_t \geq X_t$ は定義より明らかで，また $Z_{t-1} \geq E[Z_t|\mathscr{F}_t]$ だから優マルチンゲールである．Z の最小性を言うために $Y = (Y_t)$ を $Y_t \geq X_t$ となる優マルチンゲールとする．明らかに $Y_T \geq X_T = Z_T$ である．いま $Y_t \geq Z_t$ とすると，

$$\begin{aligned} Y_{t-1} &\geq E[Y_t|\mathscr{F}_{t-1}] \quad (\because Y \text{ は優マルチンゲール}) \\ &\geq E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]. \quad (\because \text{仮定}) \end{aligned}$$

一方 $Y_{t-1} \geq X_{t-1}$ だから

$$Y_{t-1} \geq \max\{X_{t-1}, E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]\} = Z_{t-1}.$$

これで帰納的に示せた．

次に Z^{τ^*} がマルチンゲールになることを示そう．$\phi_t = 1_{\{\tau^* \geq t\}}$ とおくと，ϕ は predictable で

$$Z_t^{\tau^*} = Z_0 + \sum_{u=1}^{t} \phi_u \Delta Z_u.$$

よって

$$Z_t^{\tau^*} - Z_{t-1}^{\tau^*} = \phi_t(Z_t - Z_{t-1}) = 1_{\{\tau^* \geq t\}}(Z_t - Z_{t-1}).$$

ところで $\tau^*(\omega) \geq t$ ならば $Z_{t-1}(\omega) > X_{t-1}(\omega)$ だから $Z_{t-1}(\omega) = E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}](\omega)$ が成り立っている．

$$\begin{aligned} E[Z_t^{\tau^*} - Z_{t-1}^{\tau^*}|\mathscr{F}_{t-1}] &= E[1_{\{\tau^* \geq t\}}(Z_t - E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}])|\mathscr{F}_{t-1}] \\ &= 1_{\{\tau^* \geq t\}} E[(Z_t - E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}])|\mathscr{F}_{t-1}] = 0. \end{aligned}$$

従って Z^{τ^*} はマルチンゲールになることが分かった．　□

定義 2.3. 停止時刻 τ が次を満たすとき，X の最適停止時刻という：

$$E[X_\tau] = \sup_\sigma E[X_\sigma] \tag{2.1}$$

命題 2.4. (Z_t) を (X_t) のスネル包とする．

$$\tau^* = \min\{t \geq 0; Z_t = X_t\} \tag{2.2}$$

と定めると，τ^* は X の最適停止時刻である．また

$$Z_0 = \sup_\sigma E[X_\sigma] \tag{2.3}$$

が成り立つ．

証明　命題 2.2 より Z^{τ^*} はマルチンゲールであるから

$$Z_0 = E[Z_0^{\tau^*}] = E[Z_T^{\tau^*}] = E[Z_{\tau^*}] = E[X_{\tau^*}].$$

一方，任意の停止時刻 τ に対して Z^τ は優マルチンゲールであるから

$$Z_0 = E[Z_0^\tau] \geq E[Z_T^\tau] = E[Z_\tau] \geq E[X_\tau].$$

よって τ^* は最適である．　□

最適停止時刻は一意的ではない．必要十分条件が次のように与えられる．

命題 2.5. 停止時刻 τ が最適停止時刻であるための必要十分条件は次のことが成り立つことである．

$$\begin{cases} Z_\tau = X_\tau \\ (Z^\tau) \text{ はマルチンゲールである．} \end{cases} \tag{2.4}$$

証明　$(\Rightarrow)$ τ が最適であれば

$$Z_0 = E[X_\tau | \mathscr{F}_0] \leq E[Z_\tau | \mathscr{F}_0].$$

また (Z^τ) は優マルチンゲールであるから

$$E[Z_\tau | \mathscr{F}_0] \leq Z_0.$$

よって

$$E[Z_\tau | \mathscr{F}_0] = E[X_\tau | \mathscr{F}_0].$$

ところで一般に $Z_\tau \geq X_\tau$ であるから，$Z_\tau = X_\tau$ となる．

さらに $Z_0 = E[Z_\tau|\mathscr{F}_0]$ であり，Z^τ が優マルチンゲールであるから

$$Z_0 \geq E[Z_t^\tau|\mathscr{F}_0] \geq E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_0]$$

両者から

$$E[Z_t^\tau|\mathscr{F}_0] = E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_0] = E[E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_t]|\mathscr{F}_0]$$

ところで優マルチンゲールの性質から $Z_t^\tau \geq E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_t]$ が成り立っているので，積分して等しいことから $Z_t^\tau = E[Z_T^\tau|\mathscr{F}_t]$ が成り立つ．すなわち (Z^τ) はマルチンゲールである．

($\Leftarrow$) 逆に (Z^τ) がマルチンゲールならば，$Z_0 = E[Z_\tau|\mathscr{F}_0]$ でさらに $Z_\tau = X_\tau$ を使えば $Z_0 = E[X_\tau|\mathscr{F}_0]$. ここで 命題 2.4 の (2.3) を使えば，τ が最適であることが分かる． $\square$

この命題を使えば，(2.2) で定めた τ^* は 最小 の最適停止時刻であることが分かる．

もう少し最適停止時刻について調べよう．次の命題は最大の最適停止時刻が存在することを示している．(Z_t) は優マルチンゲールであるから，マルチンゲール (M_t) と可予測増加過程 (A_t) で $A_0 = 0$ となるものが存在して

$$Z_t = M_t - A_t \tag{2.5}$$

と表される．ここで

$$\nu = \begin{cases} T & \text{if } A_T = 0 \\ \inf\{t;\, A_{t+1} \neq 0\} & \text{if } A_T \neq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

と定義すると，この ν が 最大 の最適停止時刻となる．

命題 2.6. 停止時刻 ν は (X_t) に対する最大の最適停止時刻である．

証明 ν が停止時刻であることは，(A_t) が可予測であることから分かる．また $j \leq \nu$ のとき，$A_j = 0$ だから，$Z_j = M_j$ となり $Z^\nu = X^\nu$ が分かるので Z^ν はマルチンゲールになる．ν が最適であることは $Z_\nu = X_\nu$ を示せばよい．

$$Z_\nu = \sum_{j=0}^{T} 1_{\{\nu=j\}} Z_j + 1_{\{\nu=T\}} Z_T = \sum_{j=0}^{T} 1_{\{\nu=j\}} \max\{X_j, E[Z_{j+1}|\mathscr{F}_j)\} + 1_{\{\nu=T\}} Z_T.$$

一方 Doob 分解から $E[Z_{j+1}|\mathscr{F}_j] = M_j - A_{j+1}$ で $\{\nu = j\}$ 上では $A_j = 0$ かつ $A_{j+1} > 0$ であるから $Z_j = M_j$ で

$$E[Z_{j+1}|\mathscr{F}_j] = M_j - A_{j+1} < Z_j.$$

これから

$$Z_j = \max\{X_j, E[Z_{j+1}|\mathscr{F}_j]\} = X_j$$

が $\{\nu = j\}$ 上で成立する．よって $Z_\nu = X_\nu$ が成り立つことが分かった．

最後に ν が最大であることを示す．もし停止時刻 τ が ν よりも大きければ $P(\tau > \nu) > 0$ となるので

$$E[Z_\tau] = E[M\tau] - E[A_\tau] = E[Z_0] - E[A_\tau] < E[Z_0]$$

となるから Z^τ はマルチンゲールにはなり得ない．従って命題 2.5 から τ は最適停止時刻にはならない． □

この定理によって，最適停止時刻は ν より前の時刻で $X_\tau = Z_\tau$ が成立しているものならどれでも最適停止時刻となることが分かる．時刻 ν では $X_\nu = Z_\nu$ となるのだから，待っていれば必ず $X_t = Z_t$ となる時刻が ν 以前にやってくる (結局 ν になるかもしれないが).

アメリカンオプションの価格付け

f_t の discount process を

$$\overline{f}_t = \beta_t f_t$$

とする．さらに $\overline{f}$ のスネル包を Z とする:

$$\begin{aligned} Z_T &= \overline{f}_T, \\ Z_{t-1} &= \max\{\overline{f}_{t-1}, E[Z_t|\mathscr{F}_{t-1}]\} \end{aligned}$$

Z_t はスネル包の定義であるが，条件付き請求権の価格とも見れる．時刻 $t-1$ の時点で 次の時点の Z_t を条件付き請求権とみなし，現時点 $t-1$ で $\overline{f}_{t-1}$ を選択するか，次の時点まで待って Z_t を得るかで，有利なほうを取るわけである．Z_t を取る場合は条件付き期待値が価格であった．以下帰納的に前の時刻の価格を決めていくことになる．Z_0 が時刻 0 における価格ということになる．これが妥当な価格であることを以下見てみよう．

$\tau^* = \min\{t \geq 0; Z_t = \overline{f}_t\}$ とおくと，命題 2.2 から

$$Z_0 = \sup_\tau E[\overline{f}_\tau] = E[\overline{f}_{\tau^*}]$$

となる．さて，(Z_t) は優マルチンゲールであったから

$$Z_t = Z_0 + \overline{M}_t - \overline{A}_t$$

とマルチンゲールと増加過程の差にかける．$Z_0 + \overline{M}_T = Z_T + \overline{A}_T \geq 0$ 注意しておこう．さて，完備性より，許容戦略 θ が存在して

$$\overline{V}_t(\theta) = Z_0 + \overline{M}_t$$

とあらわされる．ところで，Z^{τ^*} はマルチンゲールであったから，$t \leq \tau^*$ では $Z_t = Z_0 + M_t$ が成り立っている．特に

$$Z_{\tau^*} = Z_0 + \overline{M}_{\tau^*} = \overline{V}_{\tau^*}(\theta)$$

が成り立つ．よって

$$V_0(\theta) = E[\overline{V}_{\tau^*}(\theta)] = E[Z_{\tau^*}] = E[\overline{f}_{\tau^*}] = \sup_{\tau} E[\overline{f}_\tau].$$

したがって，

$$V_0(\theta) = Z_0 = \sup_{\tau} E[\overline{f}_\tau].$$

これら 3 つの量が全て等しくなるので，この節のはじめに述べたように，$\sup_{\tau} E[\overline{f}_\tau]$ を価格とすることの正当化ができ，また戦略 θ で hedge できることも示された．

3.　アメリカンオプションとヨーロピアンオプション

命題 3.1. $\mathscr{C}_t$ を，(X_t) に対するアメリカンオプションの時刻 t での価格とする．また c_t を $h = X_T$ に対するヨーロピアンオプションの価格とする．このとき $\mathscr{C}_t \geq c_t$ が成り立つ．

また $c_t \geq X_t$ がすべての t に対して成立していれば，

$$c_t = \mathscr{C}_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T \tag{3.1}$$

が成り立つ．

証明　アメリカンオプションの割り引かれた値を $\overline{\mathscr{C}}_t$ とすると $\overline{\mathscr{C}}_t$ は優マルチンゲールだから

$$\overline{\mathscr{C}}_t \geq E^*[\overline{\mathscr{C}}_T|\mathscr{F}_t] = E^*[\overline{c}_T|\mathscr{F}_t] = \overline{c}_t.$$

よって $\overline{\mathscr{C}}_t \geq \overline{c}_t$ である．

次に $c_t \geq X_t$ が成り立っていれば $\overline{c}_t \geq \overline{X}_t$ で，$\overline{c}_t$ はマルチンゲールだから，$\overline{Z}_t$ の最小性から $\overline{c}_t \geq \overline{Z}_t = \overline{\mathscr{C}}_t$ となる．□

上の命題はアメリカンオプションの方が高いことをいっているが，アメリカンオプションの方が打つ手が多いのだから当然である．それでも $c_t \geq X_t$ のときは同じなのだから，これは満期まで待つのが一番有利ということである．例えば $(\overline{X}_t)$ が劣マルチンゲールの時は $c_t \geq X_t$ が成り立つ．実際

$$\overline{X}_t \geq E^*[\overline{X}_T|\mathscr{F}_t] = E^*[\overline{c}_T|\mathscr{F}_t] = \overline{c}_t$$

となって上の命題の条件が成り立っていることが分かる．

(S^0, S^1) の安全資産と危険資産の二つの資産の場合を考えてみよう．そして call option $X_t = (S^1_t - K)_+$ を取ってみる．さらに $S^1_T \geq S^1_t$ がすべての t について成り立っているとする．このとき

$$\begin{aligned}\overline{c}_t &= E[(S^0_T)^{-1}(S^1_T - K)_+|\mathscr{F}_t] \\ &\geq E[((S^0_T)^{-1}S^1_T - (S^0_T)^{-1}K)|\mathscr{F}_t]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E[\overline{S}^1_T - (S^0_T)^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&= \overline{S}^1_t - (S^0_t)^{-1}E[(S^0_t)(S^0_T)^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&\geq \overline{S}^1_t - (S^0_t)^{-1}E[K|\mathscr{F}_t] \\
&= (S^0_t)^{-1}(S^1_t - K)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また $\overline{c}_t \geq 0$ だから $\overline{c}_t \geq (S^0_t)^{-1}(S^1_t - K)_+ = \overline{X}_t$ が分かる．従って命題 3.1 の後半の条件が成り立ち，ヨーロピアンとアメリカンの価値は同じになる．

この条件に比べると，$(\overline{X}_t)$ が劣マルチンゲールになるのはもっと強い条件になる．実際そのためには S^1 が増加という条件が必要になる．実際この条件があると

$$
\begin{aligned}
E[(S^0_{t+1})^{-1}(S^1_{t+1} - K)_+|\mathscr{F}_t] &\geq E[(S^0_{t+1})^{-1}(S^1_{t+1} - K)|\mathscr{F}_t] \\
&\geq E[\overline{S}^1_{t+1} - (S^0_{t+1})^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&= \overline{S}^1_t - E[(S^0_t)^{-1}(S^0_t)(S^0_{t+1})^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&= \overline{S}^1_t - (S^0_t)^{-1}E[(S^0_t)(S^0_{t+1})^{-1}K|\mathscr{F}_t] \\
&\geq \overline{S}^1_t - (S^0_t)^{-1}E[K|\mathscr{F}_t] \\
&= (S^0_t)^{-1}(S^1_t - K).
\end{aligned}
$$

また左辺が正は明らかだから

$$
E[(S^0_{t+1})^{-1}(S^1_{t+1} - K)_+|\mathscr{F}_t] \geq (S^0_t)^{-1}(S^1_t - K)_+ = \overline{X}_t.
$$

これで $(\overline{X}_t)$ が劣マルチンゲールであることが示せた．

第6章　確率解析概説

1.　連続時間確率解析

今まで離散のモデルを論じてきたが，次に連続モデルを論じる．時間パラメーターは有限区間 $[0, T]$ か，あるいは無限区間 $[0, \infty)$, $[0, \infty]$ とする．いずれの場合もパラメーター集合は $\mathbb{T}$ と記す.

連続時間確率過程

確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を与え，以後この空間の上で考える．P は完備であることを仮定しておく.

定義 1.1. **フィルトレーション**とは増大する $\mathscr{F}$ の部分 σ-fields の系 $\{\mathscr{F}_t\}$ $t \in \mathbb{T}$ のことをいう．(すなわち $\mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$ で $s \leq t$ ならば $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t$.)
　さらに，次の条件が満たされるとき 'usual condition' が満たされているという.

1. P は完備であり，$\mathscr{F}$ の測度零集合は $\mathscr{F}_0$ に含まれる.
2. 右連続: $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$

理論的に深いことを議論しようとすると，どうしても usual condition が必要になるが，必要になったときだけ断ることにして，**通常は usual condition は仮定しない**ことにする．また

$$\mathscr{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s \tag{1.1}$$

という記号を使う．右連続とは $\mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t$ がすべての t に対して成り立つことに他ならない.

停止時刻

定義 1.2. $\mathbb{T}$ に値をとる確率変数 τ が次の条件をみたすとき $\{\mathscr{F}_t\}$-**停止時刻**と呼ぶ.

$$\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \tag{1.2}$$

この定義から，次のことが容易に従う.

命題 1.3. τ が $\{\mathscr{F}_{t+}\}$-停止時刻であるための必要十分条件は,

$$\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}. \tag{1.3}$$

がなりたつことである.

証明　$\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$ がすべての $t \in \mathbb{T}$ に対して成り立つとすると

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau \leq t + \frac{1}{n}\} \in \mathscr{F}_{t+}$$

である．逆に τ が $\{\mathscr{F}_{t+}\}$-停止時刻であれば,

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau \leq t - \frac{1}{n}\}.$$

ところで

$$\{\tau \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathscr{F}_{(t-1/n)+} \subseteq \mathscr{F}_t$$

だから $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$ が従う． □

明らかに $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻は $\{\mathscr{F}_{t+}\}$-停止時刻であるから，$\{\mathscr{F}_{t+}\}$-停止時刻の方が弱い条件である．従って停止時刻の範囲が広がる．

また，$\{\mathscr{F}_t\}$ が右連続のときは

$$\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

を停止時刻の定義にしてもよいことがわかる．

命題 1.4. τ, σ が $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻ならば $\tau \vee \sigma$, $\tau \wedge \sigma$ も $\{\mathscr{F}\}$-停止時刻である．また τ_n, $n = 1, 2, \ldots$ が $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻ならば $\sup_n \tau_n$ は $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻であり，$\inf_n \tau_n$ は $\{\mathscr{F}_{t+}\}$-停止時刻である．

証明　τ, σ が $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻ならば

$$\{\tau \vee \sigma \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathscr{F}_t,$$
$$\{\tau \wedge \sigma \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

より，$\tau \vee \sigma, \tau \wedge \sigma$ も $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻である．

次に $\tau_n, n = 1, 2, \ldots$ が $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻とする．

$$\{\sup_n \tau_n \leq t\} = \cap_n \{\tau_n \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

であるから $\sup_n \tau_n$ は $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻である．また

$$\{\inf_n \tau_n < t\} = \cup_n \{\tau_n < t\} \in \mathscr{F}_t$$

より，$\inf_n \tau_n$ は $\{\mathscr{F}_{t+}\}$-停止時刻である． □

停止時刻の例を与えておこう．(X_t) を距離空間 E に値をとる $\{\mathscr{F}_t\}$-適合過程とする．また σ を $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻とする．E の部分集合 A に対し

$$\tau_e(A,\sigma) = \inf\{t \geq \sigma;\ X_t \in A\} \tag{1.4}$$

を σ の後の，集合 A への到達時刻という．また記号 $F_X(s,t)$ で $\{X_u;\ s \leq u \leq t\}$ の閉包を表すものとする．このとき

$$\tau_c(A,\sigma) = \inf\{t \geq \sigma;\ F_X(\sigma,t) \cap A \neq \emptyset\} \tag{1.5}$$

を σ の後の，集合 A への接触時刻という．$\sigma = 0$ のときは σ を書かないで $\tau_e(A), \tau_c(A)$ と書く．これらが停止時刻になる条件を考えよう．

例 1.1. A が開集合で (X_t) が右連続，σ が $\{\mathscr{F}_{t+}\}$-停止時刻であれば，$\tau_e(A,\sigma)$ は $\{\mathscr{F}_{t+}\}$-停止時刻である．

実際

$$\{\tau_e(A,\sigma) < t\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q},\ r<t} \{X_r \in A\} \cap \{\sigma < r\} \in \mathscr{F}_t$$

が成り立つ．これは $\omega \in \{\tau_e(A,\sigma) < t\}$ ならば $X_s(\omega) \in A$ となる $\sigma \leq s < t$ が存在する．さらに右連続性から $s < r < t$ となる有理数 r で $X_r(\omega) \in A$ となるものが取れる．従って $\omega \in \bigcup_{r\in\mathbb{Q},\ r<t}\{X_r \in A\} \cap \{\sigma < r\}$．逆に $\omega \in \bigcup_{r\in\mathbb{Q},\ r<t}\{X_r \in A\} \cap \{\sigma < r\}$ ならばある $\sigma < r < t$ となる有理数が存在し $X_r(\omega) \in A$ となるが，これは $\tau_e(A,\sigma) < t$ を意味する．

例 1.2. A が閉集合で (X_t) が右連続で左極限を持ち，σ が $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻ならば，$\tau_c(A,\sigma)$ は $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻である．

実際 $n \in \mathbb{N}$ に対し $A_n = \{x : d(x,A) < 1/n\}$ とおくと，$\tau_e(A_n,\sigma) \uparrow \tau_c(A,\sigma)$ が成り立ち，

$$\{\tau_c(A,\sigma) \leq t\} = (\{\sigma \leq t\} \cap \{X_t \in A\}) \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau_e(A_n,\sigma) < t\} \in \mathscr{F}_t$$

より $\tau_c(A,\sigma)$ は $\{\mathscr{F}_t\}$-停止時刻である．

停止時刻は以上のように $\{\mathscr{F}_t\}$ と $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ との間で若干の差異が出るので注意が必要である．

停止時刻 τ に対し，$\mathscr{F}_\tau$ を

$$A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t \quad \forall t \geq 0$$

を満たす集合全体とする．$\mathscr{F}_\tau$ は σ-field となり，時刻 τ より以前に得られる情報を表している．これらは離散の場合と同じである．

マルチンゲール

離散時間の場合にマルチンゲールを定義したが，連続時間の場合も同様に定義できる．$\{\mathscr{F}_t\}$ をフィルとレーションとし，(M_t) を $\{\mathscr{F}_t\}$-適合過程とする．(M_t) が次をみたすときマルチンゲールという: 任意の $s \le t$ に対し

$$E[M_t|\mathscr{F}_s] = M_s. \tag{1.6}$$

$E[M_t|\mathscr{F}_t] \ge M_s$ がなりたつとき劣マルチンゲールと呼び，$E[M_t|\mathscr{F}_t] \le M_s$ がなりたつとき優マルチンゲールと呼ぶことも離散のときと同じである．

ここで扱う (優，列) マルチンゲールは，特に断らないで常に右連続左極限を持つとする．マルチンゲールはいつでもこのような変形を持つことが知られているから，このことは制約にはならない．

離散時間のとき Doob の任意抽出定理を述べたが，離散で近似することにより連続時間の場合も同様に成立する．このほか第 2 章 第 2 節 に述べたことはすべて連続パラメーターでも成立するので結果だけ書いておく．

定理 1.5. (Doob の任意抽出定理) (X_t) を優マルチンゲール，σ, τ を有界な停止時刻で $\sigma \le \tau$ が成り立っているとする．このとき

$$E[X_\tau|\mathscr{F}_\sigma] \le X_\sigma \tag{1.7}$$

が成り立つ．X がマルチンゲールであれば，(1.7) で等号が成立する．劣マルチンゲールであれば逆向きの不等式が成立する．

命題 1.6. (X_t) を劣マルチンゲールとすると $\lambda > 0$ に対し次が成立する．

$$\lambda P(\sup_{s\le t} X_s \ge \lambda) \le E[X_t; \sup_{s\le t} X_s \ge \lambda] \le E[X_t^+]. \tag{1.8}$$

さらに $t \to \infty$ として

$$\lambda P(\sup_{s} X_s \ge \lambda) \le \sup_{s} E[X_s^+] \tag{1.9}$$

が成り立つ．

定理 1.7. (X_t) をマルチンゲールとする．すると

$$\lambda P(\sup_{t} |X_t| \ge \lambda) \le \sup_{t} E[|X_t|]. \tag{1.10}$$

が成り立つ．

定理 1.8. (X_t) をマルチンゲールとし，

$$X^*(\omega) = \sup_{t} |X_t(\omega)| \tag{1.11}$$

とする．$1 < p < \infty$ に対して $X^* \in L^p$ であるための必要十分条件は

$$\sup_t \|X_t\|_p < \infty \tag{1.12}$$

となることである．さらに

$$\|X^*\|_p \leq q \sup_t \|X_t\|_p \tag{1.13}$$

が成り立つ．ここで $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ である．

特に $p = 2$ のときは **Doob の不等式**と呼ばれることが多い．

定理 1.9. (M_t) をマルチンゲールとすると，

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} M_t^2] \leq 4E[M_T^2] \tag{1.14}$$

が成り立つ．

2. ブラウン運動

ブラウン運動はマルチンゲールの典型的なものである．この節では，マルチンゲールの性質を利用しながら，確率積分やそれにかかわる解析を概説する．

ブラウン運動の定義

時間区間は $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ とする．全ての $t \in [0, \infty)$ に対して，確率変数 X_t が定義されているときこれを確率過程と呼ぶ．確率変数は単に $\mathscr{F}$-可測な関数であるが，確率過程に関しては t と ω の 2 変数の関数 $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ としての可測性も仮定する．更に増大する σ-fields の族 $\{\mathscr{F}_t\}$ が与えられ，全ての t に対して X_t が $\mathscr{F}_t$ 可測のとき，$\{\mathscr{F}_t\}$-適合であるといった．

定義 2.1. 確率過程 (W_t) が次の条件を満たすとき**ブラウン運動** (**Wiener 過程**) という．

1. $W_0 = 0$
2. 各自然数 n と時刻 $0 \leq t_0 < t_1 \cdots < t_n$ に対して n 個の確率変数

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

   は独立である．
3. $0 \leq s < t$ のとき $W_t - W_s$ の分布は $N(0, t-s)$ である．
4. 確率 1 で見本路 $t \mapsto W_t$ は連続である．

ブラウン運動を現象として初めて捉えたのは Brown であるので，ブラウン運動と呼ばれるが，この様な確率過程が実際に存在することを数学的に厳密に示したのは Wiener である．Wiener 過程とも呼ばれるのはそのためである．

$\mathscr{F}_t = \sigma\{W_u; u \le t\}$ とおくと，これはフィルトレーションを定める．(W_t) は $\{\mathscr{F}_t\}$-適合である．明らかに $\mathscr{F}_s$ と $W_t - W_s$ は独立である．また $\mathscr{F}_{s+}$ と $W_t - W_{s+1/n}$ も独立である．よって $A \in \mathscr{F}_{s+}$ をとり，f を有界連続関数ととると

$$E[1_A f(W_t - W_{s+n/1})] = E[1_A]E[f(W_t - W_{s+n/1})]$$

が成り立つ．$n \to \infty$ とすると，(W_t) の連続性から

$$E[1_A f(W_t - W_s)] = E[1_A]E[f(W_t - W_s)].$$

ここで単調族定理を使えば，f は任意の有界可測関数に取れる．これは $W_t - W_s$ と $\mathscr{F}_{s+}$ が独立であることを意味している．従って

$$E[W_t|\mathscr{F}_{s+}] = E[W_t - W_s + W_s|\mathscr{F}_{s+}] = E[W_t - W_s] + W_s = W_s$$

となり (W_t) は $\mathscr{F}_{s+}$-マルチンゲールである．

さらに次が成り立つ．

命題 2.2. 次のことが成立する．

(1) $(W_t^2 - t)$ は $\mathscr{F}_{t+}$-マルチンゲール．

(2) $\exp\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\}$ は $\mathscr{F}_{t+}$-マルチンゲール．

証明　まず $t > s$ のとき

$$\begin{aligned}
E[W_t^2|\mathscr{F}_{s+}] &= E[(W_t - W_s + W_s)^2|\mathscr{F}_{s+}] \\
&= E[(W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2|\mathscr{F}_{s+}] \quad (\because \text{ 独立性}) \\
&= E[(W_t - W_s)^2] + 2W_s E[(W_t - W_s)|\mathscr{F}_{s+}] + W_s^2 \\
&= t - s + W_s^2.
\end{aligned}$$

よって両辺から t を引いて

$$E[W_t^2 - t|\mathscr{F}_{s+}] = W_s^2 - s.$$

これは (1) を示している．次に (2) を示すには

$$\begin{aligned}
E[\exp\{\sigma W_t\}|\mathscr{F}_{s+}] &= E[\exp\{\sigma(W_t - W_s + W_s)|\mathscr{F}_{s+}] \\
&= \exp\{\sigma W_s\}E[\exp\{\sigma(W_t - W_s)\}|\mathscr{F}_{s+}] \\
&= \exp\{\sigma W_s\}E[\exp\{\sigma(W_t - W_s)\}] \quad (\because \text{ 独立性}) \\
&= \exp\{\sigma W_s\}\exp\{\sigma^2(t - s)/2\}.
\end{aligned}$$

ここで両辺に $\exp\{-\sigma^2 t/2\}$ をかけて

$$E[\exp\{\sigma W_t - \sigma^2 t/2\}|\mathscr{F}_{s+}] = \exp\{\sigma W_s\}\exp\{-\sigma^2 s/2\}.$$

これは (2) を示している．□

Brown 運動の増分は $\mathscr{F}_{t+}$ と独立であることが示せたから，以後 $\mathscr{F}_{t+}$ を考えることにして $\mathscr{F}_t$ は右連続を仮定する．これにより，以前に述べた停止時刻も取り扱いが容易になる．

確率積分

Wiener 過程 (W_t) に対し，確率積分 $\int_0^t H_s dW_s$ を定義する．(W_t) の見本路は有界変動ではないことが知られているので，Stieltjes 積分として定義することは出来ない．

定義 2.3. 確率過程 (H_t) が次のように表現されるとき満たすとき**単純**と呼ばれる:

$$H_t = \sum_{i=1} \phi_i 1_{(t_{i-1},t_i]}(t). \tag{2.1}$$

ここで $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n$ で ϕ_i は $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$-可測な有界関数である．

単純過程 H に対して，確率積分 $\int_0^t H_s\, dW_s$ を次で定義する

$$\int_0^t H_s\, dW_s = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) \tag{2.2}$$

で定義する．上の和は実際は有限和である．

命題 2.4. H を単純過程であるとすると，次のことが成り立つ：

1. $\displaystyle\int_0^t H_s\, dW_s$ は連続マルチンゲールである．
2. $\displaystyle E\left[\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2\, ds\right]$
3. $\displaystyle E\left[\sup_{t\le T}\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)^2\right] \le 4E\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right].$

証明　まず 1. を示す．$s < t$, $t_{j-1} < s \le t_j$ とする．

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^t H_u\, dW_u \middle| \mathscr{F}_s\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) \middle| \mathscr{F}_s\right] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \phi_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) + E[\phi_j (W_{t\wedge t_j} - W_{t\wedge t_{j-1})} | \mathscr{F}_s] \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{\infty} E[E[\phi_i (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) | \mathscr{F}_{t_{i-1}}] | \mathscr{F}_s] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \phi_i (W_{s\wedge t_i} - W_{s\wedge t_{i-1}}) + \phi_j (W_{s\wedge t_j} - W_{s\wedge t_{j-1}}) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{\infty} E[\phi_i E[(W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}}) | \mathscr{F}_{t_{i-1}}] | \mathscr{F}_s]
\end{aligned}$$

$$= \int_0^s H_u \, dW_u.$$

よってマルチンゲールであることが分かった．

2. を示す．$t_{n-1} < t \le t_n$ とし，$X_i = (W_{t\wedge t_i} - W_{t\wedge t_{i-1}})$ とおけば，$X_1, \ldots, X_n$ は独立で，平均 0, 分散 $t \wedge t_i - t \wedge t_{i-1}$ であるから

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^t H_u \, dW_u\right)^2\right] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[\phi_i \phi_j X_i X_j] \\
&= \sum_{i=1}^n E[\phi_i^2 X_i^2] + 2\sum_{i<j} E[E[\phi_i\phi_j X_i X_j | \mathscr{F}_{t_{j-1}}]] \\
&= \sum_{i=1}^n E[\phi_i^2] E[X_i^2] + 2\sum_{i<j} E[\phi_i\phi_j X_i E[X_j | \mathscr{F}_{t_{j-1}}]] \\
&= \sum_{i=1}^n E[\phi_i^2](t\wedge t_i - t \wedge t_{i-1}) \\
&= E\left[\int_0^t H_u^2 \, du\right]
\end{aligned}$$

となり，証明できた．

3. はマルチンゲールに関する Doob の不等式である．□

単純過程に対して確率積分を定義したが，命題 2.4 を用いれば次のクラスの $\mathscr{H}$ に拡張できる．

$$\mathscr{H} = \{H = (H_t); \{\mathscr{F}_t\}\text{-適合で，任意の } M \text{ に対して } E\left[\int_0^T H_t^2 dt\right] < \infty\} \tag{2.3}$$

ここでは T を固定して 有限区間 $\mathbb{T} = [0, T]$ で考えることにする．T をすべて動かして考えれば $[0, \infty)$ に拡張することは容易である．

以下 $\mathscr{H}$ に拡張できることをきちんと定式化しよう．単純な H の場合は $\int_0^t H_s \, dW_s$ は2乗可積分連続マルチンゲールであり，$t = 0$ のとき 0 である．そこで $\mathscr{M}_{0,c}^2$ を2乗可積分連続マルチンゲール $(M_t)0$ で $M_0 = 0$ となるもの全体とする．M, $N \in \mathscr{M}_{0,c}^2$ にたいして内積 (M, N) を

$$(M, N) = E[M_T N_T] \tag{2.4}$$

で定める．また二つの確率過程 (X_t), (Y_t) が

$$P(X_t = Y_t \text{ for all } t \ge 0) = 0$$

のとき indistinguishable とよび，二つの確率過程を同一視する．$M \in \mathscr{M}_{0,c}^2$ が $(M, M) = 0$ をみたすと $M_T = 0$ P-a.s. となる．従ってすべての t に対して $M_t = 0$ P-a.s. となる．連続性があるので，これから

$$P(M_t = 0 \, \text{for all } t \ge 0) = 1$$

が成り立つことになる．以後 indistinguishabe なものは同一視する．

命題 2.5. $\mathscr{M}^2_{0,c}$ は (2.4) の内積で Hilbert 空間になる．但し，indistinguishabe なものは同一視する．

証明 $(M^{(n)})$ を Cauchy 列とする．$M^{(n)}_T$ は $L^2(P)$ の Cauchy 列であるから，極限が存在する．それを M_T とする．また部分列 $\{n_j\}$ をとって

$$E[(M^{(n_j)}_T - M^{(n_{j-1})})^2_T] \le 2^{-j}$$

とできる．Doob の不等式から

$$\begin{aligned} E[\sup_{0\le t\le T}|M^{(n_j)} - M^{(n_{j-1})}| > 1/j^2] &\le j^4 E[\sup_{0\le t\le T}|M^{(n_j)} - M^{(n_{j-1})}|^2] \\ &\le j^4 E[|M^{(n_j)}_T - M^{(n_{j-1})}_T|^2] \le \frac{4j^4}{2^{-j}} \end{aligned}$$

が成立する．$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4j^4}{2^{-j}} < 0$ だから Borel-Cantelli の補題から $M^{(n_j)}_t$ は t に関して一様収束する．その極限を M_t とすると，M_t は t に関して a.s. で連続である．$M^{(n)}_T$ は $L^2(P)$ の Cauchy 列であるから，その極限は M_T となる．$M^{(n)}_t$ が また M_t に L^2 収束することも同様に示せる．ところで $M^{(n)}$ はマルチンゲールであったから $t > s$ のとき

$$E[M^{(n)}_t|\mathscr{F}_s] = M^{(n)}_s$$

がな成り立つ．$n \to \infty$ として，$M = (M_t)$ もマルチンゲールであることが分かる． □

さて，確率過程 $t \mapsto \int_0^t H_s dW_s$ を $H \cdot W$ とかくと $H \mapsto H \cdot W$ は simple function に対しては $\mathscr{M}^2_{0,c}$ の中への Hilbert 空間としての等距離写像を定めている．従って自然に $\mathscr{H}$ の元に拡張できる．単純な場合に成立した関係がそのまま拡張される．これを定理として述べておこう．

定理 2.6. $H \in \mathscr{H}$ に対して確率積分 $\int_0^t H_s dW_s$ は $\mathscr{M}^2_{0,c}$ の元を定め，次が成立する．

1. $E\left[\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t H_s^2\, ds\right]$
2. $E\left[\sup_{t\le T}\left(\int_0^t H_s\, dW_s\right)^2\right] \le 4E\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right]$.
3. 停止時刻 τ に対し

$$\int_0^\tau H_s\, dW_s = \int_0^T 1_{\{s\le\tau\}} H_s\, dW_s. \tag{2.5}$$

証明 1. と 2. は simple な場合の自然な拡張である．3. を示そう．停止時刻 τ が次の形をしているとする．

$$\tau = \sum_{j=1}^n t_j 1_{A_j}.$$

ただし A_j は互いに祖で $A_j \in \mathscr{F}_{t_j}$ とする．

$$\int_0^T 1_{\{s>\tau\}} H_s \, dW_s = \int_0^T \sum_{j=1}^n 1_{A_j} 1_{\{s>t_j\}} H_s \, dW_s.$$

$1_{A_j} 1_{\{s>t_j\}} H_s$ は adapted で $\mathscr{H}$ の元である．よって

$$\int_0^T \sum_{j=1}^n 1_{A_j} 1_{\{s>t_j\}} H_s \, dW_s = \sum_{j=1}^n 1_{A_j} \int_{t_j}^T 1_{\{s>t_j\}} H_s \, dW_s = \int_\tau^T 1_{\{s>t_j\}} H_s \, dW_s.$$

これから

$$\begin{aligned}
\int_0^T 1_{\{s\le\tau\}} H_s \, dW_s &= \int_0^T \{1 - 1_{\{s<\tau\}}\} H_s \, dW_s \\
&= \int_0^T H_s \, dW_s - \int_0^T 1_{\{s<\tau\}} H_s \, dW_s \\
&= \int_0^T H_s \, dW_s - \int_\tau^T H_s \, dW_s \\
&= \int_0^\tau H_s \, dW_s.
\end{aligned}$$

次に一般の停止時刻 τ をとる．

$$\tau_n = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{jT}{2^n} 1_{A_j},$$

ただし

$$A_j = \{\frac{j-1}{2^n} \le \tau < \frac{j}{2^n}\}$$

とすると，τ_n も停止時刻で $\tau_n \downarrow \tau$ である．確率積分は連続だから

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_n} H_s \, dW_s = \int_0^\tau H_s \, dW_s \quad \text{a.s.}$$

また

$$E\left[\left\{\int_0^T 1_{\{s\le\tau_n\}} H_s \, dW_s - \int_0^T 1_{\{s\le\tau\}} H_s \, dW_s\right\}^2\right] = E\left[\int_0^T 1_{\{\tau<s\le\tau_n\}} H_s^2 \, ds\right] \to 0.$$

これから部分列 $\{n_j\}$ をとれば

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^T 1_{\{s\le\tau_{n_j}\}} H_s \, dW_s = \int_0^T 1_{\{s\le\tau\}} H_s \, dW_s \quad \text{a.s.}$$

なので (2.5) を得る． □

以上で $\mathscr{H}$ の元に対し確率積分が定義できた．離散の場合のマルチンゲール変換が確率積分に対応するわけであるが，離散の場合は被積分関数は predictable を仮定した．連続パラメーターの場合もそれが必要であるが，ブラウン運動の場合は $\{\mathscr{F}_t\}$-適合と predictable の概念が一致するので (正確には predictable version がとれるので）区別する必要がないのである．ジャンプのある確率過程を考えると，predictable という条件が必要になってくる．

$H \in \mathscr{H}$ に対して $\int_0^t H_s\,dW_s$ は 2 乗可積分マルチンゲールになるが逆に任意の 2 乗可積分マルチンゲール M_t は適当に $H \in \mathscr{H}$ をとって

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s\,dW_s$$

と一意的に表現できる．これを**マルチンゲール表現定理**という．

さらに (2.5) を使うと，次のように更に広いクラス $\tilde{\mathscr{H}}$ まで広げることが出来る．

$$\tilde{\mathscr{H}} = \{H = (H_t);\ \{\mathscr{F}_t\}\text{-適合で}, \int_0^T H_t^2\,dt < \infty \quad P\text{-a.e.}\} \tag{2.6}$$

実際有界な停止時刻の列 τ_n で $\tau_n \to \infty$ かつ $E[\int_0^{\tau_n} H_s^2\,ds] < \infty$ となるものが取れるので，$t < \tau_n$ のとき

$$\int_0^t H_s\,dW_s = \int_0^t 1_{\{s\le\tau_n\}} H_s\,dW_s$$

と定めればよい．このように定義された $\int_0^t H_s\,dW_s$ を**確率積分**と呼ぶ．創始者にちなんで伊藤積分と呼ばれることもある．ただし $\tilde{\mathscr{H}}$ にまで広げたときは，確率積分は最早マルチンゲールであるという保証はない．局所マルチンゲールというクラスになっている．適当な無限大に行く停止時刻の列 τ_n があって，τ_n で停止させた確率過程がマルチンゲールになるというクラスである．

伊藤過程

この確率積分を使っていろいろな計算が自由に出来る次のような確率過程のクラスを導入する

定義 2.7. 次の形の表現を持つ確率過程 (X_t) を**伊藤過程**と呼ぶ.

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\,ds + \int_0^t H_s\,dW_s. \tag{2.7}$$

ここで

- X_0 は $\mathscr{F}_0$-可測
- $K = (K_t)$, $H = (H_t)$ は $\{\mathscr{F}_t\}$-適合
- 任意の M に対し $\int_0^M |K_s|\,ds < \infty \quad P$-a.s.
- 任意の M に対し $\int_0^M |H_s|^2\,ds < \infty \quad P$-a.s.

このような分解は一意的であることが知られている．

伊藤の公式

伊藤過程の重要性は関数との合成で閉じていることである．即ち次の伊藤の公式が成立する．

定理 2.8. X を次の形の伊藤過程とする．

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s.$$

また $f(t,x)$ を x について 2 階連続的微分可能，t ついて連続微分可能であるとする．このとき $f(t,X_t)$ も再び伊藤過程となり，次の等式が成立する．

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f_t(s,X_s)ds + \int_0^t f_x(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s,X_s)d\langle X,X\rangle_s. \tag{2.8}$$

ここで

$$\int_0^t f_x(s,X_s)dX_s = \int_0^t f_x(s,X_s)K_s\, ds + \int_0^t f_x(s,X_s)H_s\, dW_s$$

$$\langle X,X\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds$$

である．

これを使うと，次で定義される局所マルチンゲール

$$M_t = \int_0^t H_s\, dW_s$$

に対し，

$$M_t^2 = \int_0^t 2M_s H_s\, dW_s + \langle M,M\rangle_t$$

が成り立つ．これは $M_t^2 - \langle M,M\rangle_t$ が局所マルチンゲールになることを意味している．この記号 $\langle M,M\rangle_t$ は，局所マルチンゲールに対してこのような性質を持つ増加過程として定義されるものである．**2 次変分** (quadratic variation) と呼ばれている．例えば Wiener 過程に対しては $\langle W,W\rangle_t = t$ となる．実はこの性質と，W_t がマルチンゲールであるという性質が Wiener 過程を特徴付けている．このことを Lévy の定理という．

幾何ブラウン運動

伊藤の補題として幾何ブラウン運動を述べよう．

$$S_t = x_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\} \tag{2.9}$$

で定義される確率過程を幾何ブラウン運動という．ファイナンスでは Black-Scholes モデルといわれる最も基本的な確率過程である．さてこの確率過程は $f(t,x) = x_0\exp\{(\mu{-}\sigma^2/2)t{+}\sigma x\}$

とおけば $S_t = f(t, W_t)$ と表される．$f_t = (\mu - \sigma^2/2)f$, $f_x = \sigma f$, $f_{xx} = \sigma^2 f$ であるから，伊藤の公式を使えば

$$\begin{aligned} f(t, W_t) &= f(0, x_0) + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2) f(s, W_s) ds + \int_0^t \sigma f(s, W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 f(s, W_s) ds \\ &= x_0 + \int_0^t \sigma S_s\, dW_s + \int_0^t \mu S_s\, ds \end{aligned}$$

すなわち

$$S_t = S_0 + \int_0^t \sigma S_s\, dW_s + \int_0^t \mu S_s\, ds$$

が成り立つ．これは形式的ではあるが，微分した形で

$$dS_t = \sigma S_t\, dW_t + \mu S_t\, dt \tag{2.10}$$

とかける．

これは確率積分を含む一種の微分方程式であり，確率微分方程式と言われるものの特別なものである．確率微分方程式に関してはここでは述べないが，存在や一意性など詳しい性質が調べられている．ここで扱うものは全て存在や一意性が成り立つものばかりであるので，それらの結果は断りなく使っていく．

ギルサノフの定理

最後にギルサノフ (Girsanov) の定理と呼ばれる測度の変換について述べておく．この定理はファイナンスでは同値マルチンゲール測度の構成をするときに重要になってくる．

定理 2.9. (θ_t) を $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ P-a.s. をみたす $\{\mathscr{F}_t\}$-適合過程であり，次の確率過程

$$L_t = \exp\left\{ -\int_0^t \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds \right\} \tag{2.11}$$

がマルチンゲールになるものとする．$Q = L_T P$ と定めると，Q は P と同値な測度であり，Q の下で $B_t = W_t + \int_0^t \theta_s\, ds$ は Wiener 過程となる．

上の定理で (L_t) がマルチンゲールになることを仮定したが，十分条件として

$$\exp\left\{ \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\, ds \right\} \in L^1(P)$$

が知られている (Novikov の条件といわれている).

第7章　連続時間モデル

この節では連続モデルを扱う．離散のモデルについては第 2 章で一般論を述べたが，ほぼ並行した議論が連続の場合にも可能である．ここでは一番簡単で典型的な Black-Scholes モデルを論じる．時間区間は $[0,T]$ で T が満期をあらわすとする．

1.　Black-Scholes モデル

安全証券は $S_t^0 = e^{rt}$ で与えられ，株 (危険証券) は S_t で次の確率微分方程式を満たしているとする．

$$dS_t = \sigma S_t\, dW_t + \mu S_t\, dt. \tag{1.1}$$

初期値は S_0 とする．このモデルを **Black-Scholes モデル**と呼ぶ

(S_t) は第 1 節で述べたように（(2.9) を参照），

$$S_t = S_0 \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\} \tag{1.2}$$

で与えられる．割り引かれた株価 $\overline{S}$ は $\overline{S}_t = e^{-rt} S_t$ だから，伊藤の公式から

$$d\overline{S}_t = -re^{-rt} S_t\, dt + e^{-rt} dS_t = -r\overline{S}_t\, dt + e^{-rt}(\sigma S_t\, dW_t + \mu S_t\, dt) = \overline{S}_t((\mu - r)dt + \sigma\, dW_t)$$

ここで，$B_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + W_t$ とおけば

$$d\overline{S}_t = \sigma \overline{S}_t\, dB_t \tag{1.3}$$

となる．ここで $\theta_t = (\mu - r)/\sigma$ とおいて

$$L_T = \exp\left\{ -\int_0^T \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds \right\} \tag{1.4}$$

と定める．ここで Girsanov の定理定理 2.9 を使えば $P^* = L_T P$ の下で (B_t) はブラウン運動となり，$\overline{S}$ は確率積分でかけるから P^* の下でマルチンゲールとなる．$\overline{S}$ は実際つぎのようにかける：

$$\overline{S}_t = S_0 \exp\{\sigma B_t - \sigma^2 t/2\}. \tag{1.5}$$

従ってこの場合は P^* が同値マルチンゲール測度である．また以後 P^* に関する期待値は $E^{P^*}[\ ]$ で表す.

Black-Scholes の公式

第 2 章で離散の場合に，価格は同値マルチンゲール測度による平均で与えられることを示した．今の場合もそのことを認めると，具体的にコールオプションの価格を求めることが出来る．コールオプションは $H=(S_T-K)_+$ で記述されるから，価格 $\pi(H)$ はそれを割り引いた $e^{-rT}(S_T-K)_+=(\overline{S}_T-e^{-rT}K)_+$ の期待値として表される．即ち

$$\begin{aligned}\pi(H)&=E^{P^*}[(\overline{S}_T-e^{-rT}K)_+]=E^{P^*}[(S_0\exp\{\sigma B_T-\sigma^2T/2\}-e^{-rT}K)_+]\\&=E^{P^*}[(S_0e^Z-e^{-rT}K)_+].\end{aligned}$$

ここで $Z=\sigma B_T-\sigma^2T/2$ とおいた．容易に分かるように，P^* のもとでは Z は平均 $-\sigma^2T/2$, 分散 σ^2T の正規分布である．これは離散の極限として導いた (1.2) の結果と一致している．伊藤解析を使うとこれらのことが容易に導かれたことになる．以下でこの公式を証明していこう．

自己充足戦略

ポートフォリオ $\phi=(\eta,\theta)$ を与えたときの価値過程は

$$V_t(\phi)=\eta_tS_t^0+\theta_tS_t \tag{1.6}$$

で定義される．self-financing strategy は，離散のときは $\Delta V_t(\phi)=\phi_t\cdot\Delta S_t$ であったから

$$dV_t(\phi)=\eta_t\,dS_t^0+\theta_t\,dS_t \tag{1.7}$$

が成り立つことと定義する．これが意味を持つために

$$\int_0^T|\eta_t|\,dt<\infty,\quad \int_0^T|\theta_t|^2\,dt<\infty\quad P\text{-a.s.} \tag{1.8}$$

を仮定する．$(\mathscr{F}_t)$-適合な確率過程 ϕ が (1.7), (1.8) をみたすとき **self-financing strategy** と呼ぶ．self-financing strategy の全体を SF という記号で表す．

割り引かれた株価過程は $\overline{S}_t=e^{-rt}S_t$ で定義されていた．

命題 1.1. ϕ が (1.8) を満たすとき，$V_t(\phi)$ を (1.7) で定め $\overline{V}_t(\phi)=e^{-rt}V_t(\phi)$ とおく．このとき ϕ が self-financing であるための必要十分条件は

$$\overline{V}_t(\phi)=V_0(\phi)+\int_0^t\theta_t\,d\overline{S}_t \tag{1.9}$$

が全ての $t\in[0,T]$ で成り立つことである．

証明　$\overline{V}(\phi)$ の定義から

$$d\overline{V}_t(\phi)=-r\overline{V}_t(\phi)\,dt+e^{-rt}\,dV_t(\phi)$$

であるから,

$$\begin{aligned}d\overline{V}_t(\phi)&=-re^{-rt}(\cancel{\eta_te^{rt}}+\theta_tS_t)\,dt+\cancel{e^{-rt}\eta_td(e^{rt})}+e^{-rt}\theta_t\,dS_t\\&=\theta_t((-re^{-rt}S_t)\,dt+e^{-rt}\,dS_t)\\&=\theta_t\,d\overline{S}_t\end{aligned}$$

となり，(1.9) が得られる．逆も同様にできる．　□

許容戦略による複製

定義 1.2. self-financing strategy ϕ が**許容** (admissible) であることを，割り引かれた価値過程 $\overline{V}_t(\phi) = \eta_t + \theta_t \overline{S}_t$ が P^* の下でマルチンゲールであると定義する．

定義 1.3. 条件付き請求権 H (非負の $\mathscr{F}_T$ 可測関数) に対して許容戦略 ϕ で $V_T(\phi) = H$ となるものが存在するとき，**複製**できるという．

定理 1.4. 条件付き請求権 H が P^* に関して可積分であるとき，H は複製可能である．このとき時刻 t における価値過程は，複製戦略を ϕ として

$$\overline{V}_t(\phi) = E^{P^*}[e^{-rT} H | \mathscr{F}_t] \tag{1.10}$$

とあらわされる．

証明 まず H が ϕ によって複製できるとする．従って $V_T(\phi) = H$ で $\overline{V}_t(\phi)$ は P^* の下でマルチンゲールになる．よって

$$\overline{V}_t(\phi) = E^{P^*}[\overline{V}_T(\phi)|\mathscr{F}_t] = E^{P^*}[e^{-rT} V_T(\phi)|\mathscr{F}_t] = E^{P^*}[e^{-rT} H|\mathscr{F}_t]$$

が得られる．

H が P^* に関して可積分であるとき，複製戦略の存在を示そう．$M_t = E^{P^*}[e^{-rT} H|\mathscr{F}_t]$ はマルチンゲールであり，マルチンゲール表現定理から $P(\int_0^T K_t^2\, dt < \infty) = 1$ となる $(\mathscr{F}_t)$-適合な確率過程が (K_t) が存在し，M_t が

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s\, dB_s \tag{1.11}$$

と表される．とあらわされる．ここで $\theta_t = K_t/\sigma \overline{S}_t$, $\eta_t = M_t - \theta_t \overline{S}_t$ とおき，$\phi = (\eta, \theta)$ とすると

$$\begin{aligned} \overline{V}_t(\phi) = \eta_t + \theta_t \overline{S}_t = M_t &= M_0 + \int_0^t K_s\, dB_s \\ &= M_0 + \int_0^t \sigma \theta_s \overline{S}_s\, dB_s \\ &= M_0 + \int_0^t \theta_s\, d\overline{S}_s. \quad (\because (1.3)) \end{aligned}$$

これで，命題 1.1 を使えば $\phi = (\eta, \theta)$ が self-financing であることがわかる．その価値過程は

$$V_t(\phi) = e^{rt} M_t = E^{P^*}[e^{-r(T-t)} H|\mathscr{F}_t]$$

で与えられる．この表現から $V_t(\phi)$ は非負の 2 乗可積分マルチンゲールで $V_T(\phi) = H$ が成立している．これで複製できていることがわかった． □

無裁定条件

Black-Scholes のモデルに対して，無裁定の条件を示そう．取引戦略は self-financing の条件を課すことは当然であるが，これだけでは裁定機会が構成できてしまう．離散時間の場合には起こらなかったが，連続時間では有限時間に無限回取引を行うことが出来るので，裁定機会が存在してしまう．このような取引戦略を排除するために，何らかの制約を設ける必要がある．そのことを述べていく．

定義 1.5. $\mathscr{F}_T$ 可測な非負確率変数 H をヨーロッパ型条件付き請求権 (Europian contingent claim) という．

特に $H = f(S_T)$ で $f(x) = (x - K)_+$ のときコールオプション ($f(x) = (K - x)_+$ のときプットオプション) という．

さて，不自然な取引を排除するために，次のようなクラスを導入する．ξ を非負の可測関数で $E^{P^*}[\xi] < \infty$ をみたすものとする．このとき $\phi \in \mathrm{SF}$ が $\mathrm{SF}(\xi)$ に属すことを

$$\overline{V}_t(\phi) \geq -E^{P^*}[\xi|\mathscr{F}_t] \quad \forall t \in [0, T] \tag{1.12}$$

がみたされることと定義する．やや技巧的な条件であるが，単に下に有界という条件を課している場合も多い．出来るだけ広いクラスを含む方が結果として望ましいので，このような形が考えられたのであろう．

定義 1.6. ϕ を SF の元とする．このとき $E^{P^*}[\xi] < \infty$ となる ξ が存在して $\phi \in \mathrm{SF}(\xi)$ とできるとき，ϕ を**従順戦略** (tame strategy) と呼び，その全体を SF_t とかく．ここで ξ は ϕ に依存してよい．

命題 1.7. 測度 P^* の下で次のことが成り立つ．

(1) $\phi \in \mathrm{SF}$ のとき $\overline{V}(\phi)$ は局所マルチンゲールである．

(2) $\phi \in \mathrm{SF}(\xi)$ のとき $\overline{V}(\phi)$ は優マルチンゲールである．

(3) $\phi \in \mathrm{SF}(0)$ のとき $\overline{V}(\phi)$ は非負優マルチンゲールである．

証明 (1) $\overline{V}_t(\phi)$ は (1.9) の形からブラウン運動に対する確率積分になるから局所マルチンゲールになる．

(2) $\overline{V}_t(\phi)$ は局所マルチンゲールだから $\tau_n \uparrow \infty$ となる停止時間の列が存在して，$\overline{V}_{\tau_n \wedge t}(\phi)$ がマルチンゲールとなる．$\phi \in \mathrm{SF}(\xi)$ を仮定しているので，$\overline{V}_{\tau_n \wedge t}(\phi) + E[\xi|\mathscr{F}_{\tau_n \wedge t}]$ は非負のマルチンゲールになる．従って $s < t$ のとき

$$E^{P^*}[\overline{V}_{\tau_n \wedge t}(\phi) + E[\xi|\mathscr{F}_{\tau_n \wedge t}]|\mathscr{F}_s] = \overline{V}_{\tau_n \wedge s}(\phi) + E[\xi|\mathscr{F}_{\tau_n \wedge s}]$$

ここで $n \to \infty$ として Fatou の補題を使えば

$$E^{P^*}[\overline{V}_t(\phi) + E[\xi|\mathscr{F}_t]|\mathscr{F}_s] = E^{P^*}[\varliminf_{n\to\infty}(\overline{V}_{\tau_n \wedge t}(\phi) + E[\xi|\mathscr{F}_{\tau_n \wedge t}])|\mathscr{F}_s]$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \varliminf_{n\to\infty} E^{P^*}[\overline{V}_{\tau_n\wedge t}(\phi)+E[\xi|\mathscr{F}_{\tau_n\wedge t}]|\mathscr{F}_s] \\
&= \varliminf_{n\to\infty} \overline{V}_{\tau_n\wedge s}(\phi)+E[\xi|\mathscr{F}_{\tau_n\wedge s}] \\
&= \overline{V}_s(\phi)+E[\xi|\mathscr{F}_s].
\end{aligned}
$$

$E[E[\xi|\mathscr{F}_t]|\mathscr{F}_s]=E[\xi|\mathscr{F}_s]$ だから，$\overline{V}_t(\phi)$ は優マルチンゲールになる．

(3) $\overline{V}(\phi)$ の非負性は条件 (1.12) から明らか． □

定義 1.8. $\phi\in\mathrm{SF}$ が裁定機会であるとは $V_0(\phi)=x\leq 0$ で $V_T(\phi)\geq 0$ かつ

$$P(V_T(\phi)>0)>0$$

がみたされる時をいう．

定理 1.9. ξ を非負可測関数で $E^{P^*}[\xi]<\infty$ をみたすものとする．このとき $\phi\in\mathrm{SF}(\xi)$ は裁定機会には決してならない．

証明 ϕ が裁定機会であったとする．$\overline{V}_T(\phi)\geq 0$ が成り立つが，命題 1.7 から $\overline{V}(\phi)$ は優マルチンゲールであるから，仮定から

$$\overline{V}_0(\phi)\geq E[\overline{V}_T(\phi)|\mathscr{F}_0]=E[\overline{V}_T(\phi)]>0.$$

これは $\overline{V}_0(\phi)\leq 0$ に矛盾する． □

2. オプションの価格付け

優ヘッジと価格付け

オプションの価格を決めるうえで，ヘッジできるかどうかが重要なポイントであった．売り手と買い手と双方がヘッジできる値段が一致すれば，それで値段が確定する．

定義 2.1. H を 条件付き請求権（$\mathscr{F}_T$ 可測な非負関数）とする．$\phi\in\mathrm{SF}_t$ が H に対する初期投資 x の優ヘッジであることを，

$$V_0(\phi)=x,\quad V_T(\phi)\geq H$$

がみたされることと定義する．このとき ϕ を (x,H)-ヘッジと呼ぶ．

H を条件付き請求権とする．第 2 章で述べたのと同様に，売り手値段 (seller's price) を

$$\pi_s=\inf\{y\geq 0;\exists\theta\in\mathrm{SF}_t \text{ s.t. } V_T(\theta)=y+G_T(\theta)\geq H\} \tag{2.1}$$

で定める．H がヘッジされるような，最も安い初期投資である．売り手はこれを値段とすれば，損をすることはない．

買い手の立場からは，買い手値段 (buyer's price) は

$$\pi_b=\sup\{z\geq 0;\exists\theta\in\mathrm{SF}_t \text{ s.t. } V_T(\theta)=-z+G_T(\theta)\geq -H\} \tag{2.2}$$

とすべきであろう．こすれば，満期時に損失を生むことがない．

この両者が一致すれば，これを H の値段とすることが合理的である．これが実際に一致することを示そう．

定理 2.2. H を P^* に関して可積分な条件付き請求権とする．また定理 1.4 で保証される，許容複製戦略を ϕ として次が成立する．

$$\pi_s = \pi_b = e^{-rT}E^{P^*}[H] \tag{2.3}$$

が成立する．$x = \pi_s = \pi_b$ とすると，定理 1.4 で保障される，H に対する許容複製戦略を ϕ として，ϕ が (x, H)-ヘッジとなる．

証明　以下測度は P^* の下で考える．ϕ を H の許容複製戦略とする．すると $\overline{V}_t(\phi)$ はマルチンゲールで $\overline{V}_T(\phi) = e^{-rT}H$ である．$x = \overline{V}_0(\phi)$ とおく．

また $y \geq \pi_s(H)$ として，$\psi \in \mathrm{SF}_t$ を (y, H)-ヘッジとする．すると命題 1.7 (2) より $\overline{V}_t(\psi)$ は優マルチンゲールである．両者から $\overline{V}_t(\psi) - \overline{V}_t(\phi)$ は優マルチンゲールになる．しかも $\overline{V}_0(\psi) = y, \overline{V}_0(\phi) = x$ だから，$\psi \in \mathrm{SF}_t$ が (y, H)-ヘッジであることを使って

$$\begin{aligned} y - x &= \overline{V}_0(\psi) - \overline{V}_0(\phi) \\ &\geq E^{P^*}[\overline{V}_T(\psi) - \overline{V}_T(\phi)|\mathscr{F}_0] \\ &= E^{P^*}[e^{-rT}V_T(\psi) - e^{-rT}H|\mathscr{F}_0] \\ &= e^{-rT}E^{P^*}[V_T(\psi) - H|\mathscr{F}_0] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

これで $\pi_s \geq x$ が分かった．また明らかに ψ は (x, H) ヘッジであるから $\pi_s \leq x$ が成立する．よって $\pi_s = x$ が成り立つ．また $\overline{V}_t(\phi)$ はマルチンゲールであるから

$$x = E^{P^*}[\overline{V}_T(\phi)] = E^{P^*}[e^{-rT}H]$$

である．

次に買い手値段について考えよう．また $z \leq \pi_b(H)$ として，$\psi \in \mathrm{SF}_t$ を $(-z, -H)$-ヘッジとする．すると命題 1.7 (2) より $\overline{V}_t(\psi)$ は優マルチンゲールである．また上で取った複製戦略 ϕ の符号を変えて $-\phi$ を考えるとしかも $\overline{V}_t(-\psi) = -\overline{V}_t(\psi)$ である．$\overline{V}_t(\psi) - \overline{V}_t(-\phi)$ は優マルチンゲールになる．$\overline{V}_0(\psi) = -z$ $-\overline{V}_0(-\phi) = x$ だから，$\psi \in \mathrm{SF}_t$ が (y, H)-ヘッジであることを使って

$$\begin{aligned} -z + x &= \overline{V}_0(\psi) - \overline{V}_0(-\phi) \\ &\geq E[\overline{V}_T(\psi) - \overline{V}_T(-\phi)|\mathscr{F}_0] \\ &= E[e^{-rT}V_T(\psi) + e^{-rT}H|\mathscr{F}_0] \\ &= e^{-rT}E[V_T(\psi) + H|\mathscr{F}_0] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

これで $\pi_b \leq x$ が分かった．また明らかに $-\phi$ は $(-x, -H)$ ヘッジであるから $\pi_b \geq x$ が成立する．よって $\pi_s = x$ が成り立つ．以上ですべてが示せた．　□

複製戦略

価格に関しては上の定理で求まっているが，ヘッジする立場から言えば複製戦略がきちんと求まっている必要がある．その表現を次に述べる．H は $f(S_T)$ の形で与えられている場合を考える．$f\colon (0,\infty) \to [0,\infty$ は次の条件を満たしているものとする : $c>0, k_1>0, k_2>0$ が存在して

$$|f(x)| \le c(1+x)^{k_1} x^{-k_2}.$$

このとき次を得る．

定理 2.3. $H = f(S_T)$ の複製戦略 $\phi = (\eta, \theta)$ は次で与えられる:

$$\theta_t = e^{-r(T-t)} F_x(T-t, S_t) \tag{2.4}$$

$$\eta_t = e^{-rT}(F(T-t, S_t) - F_x(T-t, S_t)S_t). \tag{2.5}$$

ここで

$$F(T-t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x \exp\{\sigma y \sqrt{T-t} + (r-\sigma^2/2)(T-t)\}) e^{-y^2/2}\, dy.$$

また，対応する価値過程は

$$V_t(\phi) = e^{-r(T-t)} F(T-t, S_t) \tag{2.6}$$

で与えられる．

証明 ϕ を H の複製戦略とする．

$$S_t = S_0 \exp\{(r-\sigma^2/2)t + B_t\}$$

であった．(S_t) は次を満たしていることに注意しよう: $t>s$ のとき

$$S_t = S_s \exp\{(r-\sigma^2/2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)\}$$

このことに注意すれば

$$\begin{aligned} V_t(\phi) &= E^{P^*}[e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathscr{F}_t] \\ &= E^{P^*}[e^{-r(T-t)} f(S_t \exp\{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(B_T - B_t)) | \mathscr{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} F(T-t, S_t). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} F(T-t, x) &= E^{P^*}[f(x \exp\{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(B_T - B_t))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x \exp\{\sigma y \sqrt{T-t} + (r-\sigma^2/2)(T-t)\}) e^{-y^2/2}\, dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(T-t, y/x, r-\sigma^2/2, \sigma)\,dy.$$

但し，

$$g(t,z,\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta z\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\log z-\alpha t)^2}{2\beta t}\right\}.$$

f の条件から $F(T-t,x)$ は (t,x) について微分可能である．$G(t,x)=F(T-t,e^{rt}x)$ とおけば

$$\overline{V}_t(\phi) = V_t(\phi)e^{-rt} = e^{-rT}G(t,e^{-rt}S_t) = e^{-rT}G(t,\overline{S_t}).$$

ここで伊藤の公式を使うと

$$\begin{aligned}
d(\overline{V}_t(\phi)) &= e^{-rT}d(G(t,\overline{S}_t))\\
&= e^{-rT}G_x(t,\overline{S}_t)\,d\overline{S}_t + e^{-rT}G_t(t,\overline{S}_t)\,dt + \frac{1}{2}e^{-rT}G_{xx}(t,\overline{S}_t)\,d\langle\overline{S},\overline{S}\rangle_t\\
&= e^{-rT}G_x(t,\overline{S}_t)\sigma\overline{S}_t\,dB_t + e^{-rT}G_t(t,\overline{S}_t)\,dt\\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-rT}G_{xx}(t,\overline{S}_t)\sigma^2\overline{S}_t^2\,dt.
\end{aligned}$$

積分形で書けば

$$\begin{aligned}
E^{P^*}[e^{-rT}f(S_T)|\mathscr{F}_t] &= \overline{V}_t(\phi)\\
&= E^{P^*}[e^{-rT}f(S_T)] + e^{-rT}\int_0^t G_x(s,\overline{S}_s)\sigma\overline{S}_s\,dB_s\\
&\quad + e^{-rT}\int_0^t \{G_t(s,\overline{S}_s) + \frac{1}{2}G_{xx}(s,\overline{S}_s)\sigma^2\overline{S}_s^2\}ds.
\end{aligned}$$

左辺はマルチンゲールなので，分解の一意性から

$$G_t + \frac{1}{2}G_{xx}\sigma^2x^2 = 0$$

が成り立っている．よって

$$\begin{aligned}
\overline{V}_t(\phi) &= E^{P^*}[e^{-rT}f(S_T)] + e^{-rT}\int_0^t G_x(s,\overline{S}_s)\,d\overline{S}_s\\
&= E^{P^*}[e^{-rT}f(S_T)] + e^{-rT}\int_0^t e^{rs}F_x(T-t,S_s)\,d\overline{S}_s.
\end{aligned}$$

ここで $G_x(t,x) = e^{rt}F_x(T-t,e^{rt}x)$ を使った．これと (1.9) の表現を比較して

$$\theta_t = e^{-r(T-t)}F_x(T-t,S_t)$$

が分かる．さらに η はポートフォリオの定義

$$V_t(\phi) = \eta_t e^{rt} + \theta_t S_t$$

から

$$\begin{aligned}\eta_t &= e^{-rt}V_t(\phi) - e^{-rt}\theta_t S_t \\ &= e^{-rt}e^{-r(T-t)}F(T-t,S_t) - e^{-rt}e^{-r(T-t)}F_x(T-t,S_t)S_t \\ &= e^{-rT}(F(T-t,S_t) - F_x(T-t,S_t)S_t).\end{aligned}$$

これが求める結果である. □

コールオプションの価格付け

コールオプションの場合は $f(S_T) = (S_T - K)_+$ であり，さらに具体的な表示を与えることが出来る.

定理 2.4. コールオプションの価格は

$$C(T,(S_T-K)_+) = S_0\Phi(d_+) - Ke^{-rT}\Phi(d_-). \tag{2.7}$$

ここで

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy, \tag{2.8}$$

$$d_+ = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + T(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{2.9}$$

$$d_- = \frac{\log(\frac{S_0}{K}) + T(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{2.10}$$

($d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T}$ である.)
また複製戦略 $\phi = (\eta,\theta)$ は次で与えられる.

$$\eta_t = \Phi\left(\frac{\log(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), \tag{2.11}$$

$$\theta_t = e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_t}{K}) + (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{2.12}$$

証明 $f(x) = (x-K)_+$ とおいて，定理 2.3 より

$$\begin{aligned}F(s,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x\exp\{\sigma y\sqrt{s} + (r-\sigma^2/2)s\})e^{-y^2/2}\,dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y(s,x)}^{\infty}(x\exp\{\sigma y\sqrt{s} + (r-\sigma^2/2)s\} - K)e^{-y^2/2}\,dy,\end{aligned}$$

但し $y(s,x)$ は次の解である.

$$x\exp\{\sigma y\sqrt{s} + (r-\sigma^2/2)s\} = K.$$

すなわち

$$y(s,x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{s}}\left(\log\left(\frac{K}{x}\right)-(r-\sigma^2/2)s\right).$$

よって

$$\begin{aligned}F(s,x)&=\frac{e^{rs}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y(s,x)}^{\infty}x\exp\{\sigma y\sqrt{s}-\frac{y^2}{2}-\sigma^2\frac{s}{2})\}\,dy-K\{1-\Phi(y(s,x))\}\\&=\frac{e^{rs}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y(s,x)}^{\infty}x\exp\{-\frac{(y-\sigma\sqrt{s})^2}{2}\}\,dy-K\{1-\Phi(y(s,x))\}\\&=\frac{e^{rs}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y(s,x)-\sigma\sqrt{s}}^{\infty}x\exp\{-\frac{y^2}{2}\}\,dy-K\{1-\Phi(y(s,x))\}\\&=xe^{rs}\{1-\Phi(y(s,x)-\sigma\sqrt{s})\}-K\{1-\Phi(y(s,x))\}\\&=xe^{rs}\Phi(-y(s,x)+\sigma\sqrt{s})-K\Phi(-y(s,x)).(\because \text{対称性})\end{aligned}$$

よって定理 2.3 より

$$C(T,(S_T-K)_+)=e^{-rT}F(T,S_0)=S_0\Phi(\sigma\sqrt{T}-y(T,S_0))-e^{-rT}K\Phi(-y(T,S_0)).$$

ここで

$$\begin{aligned}-y(T,S_0)&=-\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{K}{S_0}\right)-(r-\sigma^2/2)T\right)\\&=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+(r-\sigma^2/2)T\right)\\&=d_-\end{aligned}$$

であり

$$\sigma\sqrt{T}-y(T,S_0)=\sigma\sqrt{T}+d_-=d_+$$

であるから

$$\begin{aligned}C(T,(S_T-K)_+)&=S_0\Phi(\sigma\sqrt{T}-y(T,S_0))-e^{-rT}K\Phi(-y(T,S_0))\\&=S_0\Phi(d_+)-Ke^{-rT}\Phi(d_-).\end{aligned}$$

これで

さて，複製戦略は $\theta=e^{-(T-t)}\frac{\partial F}{\partial s}(T-t,S_t)$ を計算する必要がある．

$$\frac{\partial F}{\partial x}(s,x)=e^{rs}\Phi(-y(s,x)+\sigma\sqrt{s})+xe^{rs}\frac{\partial}{\partial x}\Phi(-y(s,x)+\sigma\sqrt{s})-K\frac{\partial}{\partial x}\Phi(-y(s,x))$$

であるが

$$xe^{rs}\frac{\partial}{\partial x}\Phi(-y(s,x)+\sigma\sqrt{s})$$

$$
\begin{aligned}
&= xe^{rs}\Phi'(-y(s,x)+\sigma\sqrt{s})\frac{\partial}{\partial x}(-y(s,x)) \\
&= xe^{rs}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(-y(s,x)+\sigma\sqrt{s})^2\}\frac{1}{\sigma\sqrt{s}}\frac{\partial}{\partial x}\log(\frac{x}{K}) \\
&= xe^{rs}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}y(s,x)^2\}\exp\{y(s,x)\sigma\sqrt{s}\}\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 s\}\frac{1}{\sigma\sqrt{s}}\frac{1}{x} \\
&= e^{rs}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}y(s,x)^2\}\exp\{\frac{1}{\sigma\sqrt{s}}\left(\log\left(\frac{K}{x}\right)-(r-\sigma^2/2)s\right)\sigma\sqrt{s}\}\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 s\}\frac{1}{\sigma\sqrt{s}} \\
&= e^{rs}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}y(s,x)^2\}\exp\{\log\left(\frac{K}{x}\right)-(r-\sigma^2/2)s\}\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 s\}\frac{1}{\sigma\sqrt{s}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}y(s,x)^2\}\exp\{\log\left(\frac{K}{x}\right)\}\frac{1}{\sigma\sqrt{s}} \\
&= \frac{K}{\sigma\sqrt{s}\sqrt{2\pi}x}\exp\{-\frac{1}{2}y(s,x)^2\}.
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
-K\frac{\partial}{\partial x}\Phi(-y(s,x)) &= -K\Phi'(-y(s,x))\frac{\partial}{\partial x}(-y(s,x)) \\
&= -K\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(-y(s,x))^2\}\frac{1}{\sigma\sqrt{s}}\frac{\partial}{\partial x}\log(\frac{x}{K}) \\
&= -\frac{K}{\sigma\sqrt{s}\sqrt{2\pi}x}\exp\{-\frac{1}{2}(-y(s,x))^2\}.
\end{aligned}
$$

これで2項目と3項目が打ち消しあうことが分かる．よって $y(T-t,S_t)=\dfrac{\log(\frac{K}{S_t})-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\theta_t &= e^{-r(T-t)}\frac{\partial F}{\partial x}(T-t,S_t) \\
&= e^{-r(T-t)}e^{r(T-t)}\Phi(-y(T-t,S_t)+\sigma\sqrt{T-t}) \\
&= \Phi\left(-\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\log(\frac{K}{S_t})-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right)+\sigma\sqrt{T-t}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\log(\frac{S_t}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+(T-t)\sigma^2\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log(\frac{S_t}{K})+(T-t)(r+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}
$$

さらに価値過程は (2.6) から，再び $y(T-t,S_t)=\dfrac{\log(\frac{K}{S_t})-(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ に注意して

$$
\begin{aligned}
V_t(\phi) &= e^{-r(T-t)}F(T-t,S_t) \\
&= e^{-r(T-t)}S_t e^{r(T-t)}\Phi(-y(T-t,S_t)+\sigma\sqrt{T-t})-e^{-r(T-t)}K\Phi(-y(T-t,S_t))
\end{aligned}
$$

$$= S_t\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_t}{K})+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)-e^{-r(T-t)}K\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_t}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right).$$

従って

$$\eta_t = e^{-rt}V_t(\phi)+e^{-rt}\theta_t S_t = -e^{-rT}K\Phi\left(\frac{\log(\frac{S_t}{K})+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

これですべてが示せた. □

関連図書

[1] A. Bain and D. Crisan, "*Fundamentals of stochastic filtering*," Stochastic Modelling and Applied Probability, 60, Springer, New York, 2009.

[2] R. J. Elliott and P. E. Kopp, "*Mathematics of financial markets*," Springer-Verlag, New York, 1999.

[3] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, Markov processes, Characterization and convergence, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.

[4] I. Karatzas and S. E. Shreve, "*Brownian motion and stochastic calculus*," Second edition, Springer-Verlag, New York, 1991.

[5] I. Karatzas and S. E. Shreve, "*Methods of mathematical finance*," Applications of Mathematics, 39, Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] D. Lamberton and B. Lapeyre, "*Introduction to stochastic calculus applied to finance,*" Second edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.

[7] D. Revuz and M. Yor, "*Continuous martingales and Brownian motion*," Third edition, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1999.

[8] R. J. Williams, "*Introduction to the mathematics of finance*," Graduate Studies in Mathematics, 72, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

「数理ファイナンス」レポート問題

問題

1. 株価の変動が以下のように変動する．また安全債券は現在価格が 1 で，1 年後が 1.1 であるとする．但し，金利は 0 とする．

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \text{現在} & \text{1 年後} & \\ & 160 & \text{確率 } 0.6 \\ 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & 80 & \text{確率 } 0.4 \end{tikzcd}$$

このとき，行使価格を 120 として，コールオプションと，プットオプションの現在時点での価格を求めよ．

2. 次のような CRR モデルについて述べよ．期間は $0, 1, 2, \ldots, T$ とし，安全証券を $S_t^0 = (1+\rho)^t$, $\rho > -1$ とし，危険証券 (S_t) は次の規則で変化するとする $(-1 < a < b)$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & (1+b)S_t & \text{確率 } p \\ S_t \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & (1+a)S_t & \text{確率 } 1-p \end{tikzcd}$$

また上の事象は各時刻ごとに独立であるとする．

(1) 割り引かれた株価過程 (S_t/S_t^0) がマルチンゲールになるような p を求めよ．

(2) 市場が viable であるための必要十分条件は $\rho \in (a, b)$ であることを示せ．

(3) $\rho \leq a$ のとき，裁定機会を構成せよ．

3. 4 点からなる集合 $\Omega = \{\omega_{00}, \omega_{10}, \omega_{01}, \omega_{11}\}$ に，次の確率測度が与えられている．$P(\omega_{00}) = \frac{1}{6}$, $P(\omega_{10}) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_{01}) = \frac{1}{6}$, $P(\omega_{11}) = \frac{1}{3}$. 更に安全証券 $(B_t)_{t=0,1}$ は $B_t = 1$ (定数) を満たし，株価 $(S_t)_{t=0,1}$ は $S_0 = 1$ (定数), $S_1(\omega_{00}) = S_1(\omega_{01}) = \frac{1}{2}$, $S_1(\omega_{10}) = S_1(\omega_{11}) = 2$ を満たしている．このとき次に答えよ．

(1) (S_t) をマルチンゲールにする P と同値な確率測度 Q (EMM という) を全て求めよ．

(2) 次のオプション H の EMM Q による期待値 $E^Q[H]$ を求めよ．

$$\begin{cases} H(\omega_{00}) = \frac{3}{2}, & \\ H(\omega) = 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(3) ポートフォリオ $\phi = (\eta, \theta)$ を用いて価値過程を $V_t(\phi) = \eta B_t + \theta S_t$ で定める．このとき

$$\pi_s(H) = \inf\{V_0(\phi); V_1(\phi) \geq H\}$$

を求めよ．

4. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間，$\mathscr{G}$ を部分 σ-field とする．$X \in L^2(P)$ に対し次を示せ．

$$E[(X - E[X|\mathscr{G}])^2] = \inf\{E[(X-Y)^2];\ Y \in L^2(P) \text{ は } \mathscr{G}\text{-可測}\}.$$

5. $(M_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ を (劣) マルチンゲールとする．τ を停止時刻として，M^τ を τ で停止させた確率過程とする．Doob の任意抽出定理を使って M^τ が再び (劣) マルチンゲールになることを示せ.

6. 安全証券 S_t^0 と，危険証券 S_t が次で与えられているとする．

$$S_t^0 = 1,$$
$$dS_t = S_t dW_t.$$

ここで (W_t) はブラウン運動である．このとき

$$I_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}} dW_s$$

と定めると，

$$\langle I \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{T-s}\, ds = \log(\frac{T}{T-t})$$

となり，$t \to T$ のとき $\langle I \rangle_t \to \infty$ となる．このことから $\overline{\lim_{t\to T}} |I_t| = \infty$ が従う（このことは証明しなくてよい）．そこで $a > 0$ に対して停止時刻 τ_a を

$$\tau_a = \inf\{t \in [0,T]; I_t = a\} \wedge T$$

と定める．$N = \{\tau_a \geq T\}$ とおくと，$P(N) = 0$ であることを示せ．さらに $\phi_t = (\eta_t, \theta_t)$ を

$$\eta_t = \begin{cases} I_{\tau_a \wedge t} - \theta_t S_t, & \text{on } N^c \\ 0, & \text{on } N \end{cases}$$

$$\theta_t = \begin{cases} \dfrac{1}{S_t\sqrt{T-t}} 1_{\{t \leq \tau_a\}}, & \text{on } N^c \\ 0, & \text{on } N \end{cases}$$

と定めると，ϕ は self-financing で，裁定機会となることを示せ.（フィルトレーション $\mathscr{F}_t$ は null-sets をすべて含むように取っているとする.）