リスクの数理

重川 一郎[*1]

2024 年 1 月 7 日

[*1] e-mail: shigekawa.ichiro.l20@kyoto-u.jp, URL: http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/

目次

第 1 章 確率論からの準備 5

1 確率空間 5

可測空間 5

確率空間 6

2 確率変数 8

確率変数 8

確率変数列の収束 8

3 条件付き期待値 10

条件付き期待値 10

条件付分散 13

停止時刻 14

第 2 章 リスクモデリングと保険料 17

4 リスクの定義 17

リスクとは 17

保険リスクモデル 18

5 リスクの評価 18

基本的なリスク尺度 18

一般化逆関数 19

Value at risk 20

第 3 章 Poisson 過程 27

6 Poisson 過程 27

Poisson 過程 27

時間的に一様な Poisson 過程，強度関数，Cramér-Lundberg モデル . . . 28

一様な Poisson 過程と非一様な Poisson 過程 31

7 Poisson 過程の構成 31

	更新過程としての Poisson 過程	31
	待ち時間のパラドックス	38
	到着時間の分布	40
8	順序統計量	41
第 4 章	**更新理論**	**49**
9	更新過程	49
10	更新方程式	54
11	更新方程式の応用	66
12	中心極限定理	76
第 5 章	**請求総額過程**	**81**
13	請求総額過程の漸近挙動	81
	更新モデルの平均と分散	81
	保険金計算	84
14	請求総額の分布	84
	裾の厚さ	84
	統計解析：超過平均	85
15	正則変動関数	86
	正則変動関数	86
	劣指数的分布	95
16	複合ポアソン過程の時空分解	99
	混合分布	99
	複合 Poisson 過程の時空分解	104
	Panjer の漸化式	109
第 6 章	**破産問題**	**115**
17	リスク過程と破産確率	115
18	破産確率の評価	117
19	破産確率の漸近挙動	120
	複合幾何過程の破産確率	127
	請求額の末尾確率が大きい場合	129
参考文献		**131**

第 1 章

確率論からの準備

この章では，確率論の基本的な枠組みを与える．確率空間や確率変数など，確率論の基本的な概念を復習を兼ねて概観する．

1.　確率空間

確率論を数学的に述べるための，基本的な枠組みである確率空間について述べる．Ω を一般的な集合とする．

可測空間

定義 1.1. Ω の部分集合を要素とする集合族 $\mathscr{F}$ が次の性質をみたすとき **σ-集合体** (σ-field) という：

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathscr{F}$.

(2) $A \in \mathscr{F} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{F}$

(3) $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1, 2, \ldots \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

集合 Ω に σ-集合体 $\mathscr{F}$ を付加した空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ を**可測空間** という．一般に位相空間 S に対して開集合をすべて含む最小の σ-集合体が一意に定まる．これを **Borel σ-集合体** (位相的 σ-集合体と呼ばれることも多い) とよび，以下 $\mathscr{B}(S)$ と記す．$(S, \mathscr{B}(S))$ は可測空間となる．S が位相空間の場合は特に断らなければ，σ-集合体として $\mathscr{B}(S)$ をとる．$S = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^d$ などが典型的なものである．

命題 1.2. $\mathscr{F}$ を σ-集合体とするとき，次のことが成り立つ：

(1) A, $B \in \mathscr{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathscr{F}$.

(2) $A_n \in \mathscr{F},\ n = 1, 2, \ldots \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$

証明 (1)： $A \setminus B = A \cap B^c$ より明らか．

(2)： 条件から

$$A_n^c \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \ldots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathscr{F} \implies \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big)^c \in \mathscr{F}$$

ここで de Morgan の法則を使って

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\Big)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

より，求める結果を得る． □

確率空間

基本的に σ-集合体では加算個の演算が自由にできる．確率論では可測空間に，確率 P を付加したものを考える．

定義 1.3. 可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の測度 P で $P(\Omega) = 1$ をみたすものを**確率測度** (probability measure) という．すなわち次の条件がみたされる：

(1) $P : \mathscr{F} \to [0, 1]$, $P(\Omega) = 1$.

(2) $A_n \in \mathscr{F},\ n = 1, 2, \ldots$ が互いに素 $(A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j)$ であるとき，

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n) \tag{1.1}$$

が成り立つ．

これらを組にした $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を**確率空間** (probability space) という．

Ω を**全事象**，または**標本空間** (sample space) という．Ω の要素 ω を**根元事象** (elementary event) または**標本** (sample) という．$\mathscr{F}$ の要素 A を**事象** (event) といい，その補集合 $A^c = \Omega \setminus A$ を余事象 (complementary event) という．$A \cap B$ を積事象，$A \cup B$ を和事象，$\emptyset$ を空事象と呼ぶ．

例 1.1. サイコロ投げの場合

確率空間として次のものを準備すればよい．

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^{\mathbb{N}} \ni \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots).$$

ω_n は $1, 2, \ldots, 6$ のいずれかで，n 回目に出た目を表す．確率は $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ を与えて

$$P(\omega_1 = \eta_1, \omega_2 = \eta_2, \ldots, \omega_n = \eta_n) = \frac{1}{6^n}$$

と定めればよい．これが実際に σ-加法的に拡張できることは明らかではないが，Kolmogorov の拡張定理と呼ばれる定理により証明できる．

命題 1.4. 確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ において次のことが成り立つ：

(1) $A \subseteq B \Longrightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
(2) $P(A^c) = 1 - P(A)$
(3) $A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$.
(4) 任意の $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ に対し $P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$.
(5) $A_n \uparrow A$ (i.e., $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$) のとき，$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.
(6) $A_n \downarrow A$ (i.e., $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$) のとき，$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

証明　(1)： $B = A + B \setminus A$ (disjoint union) より明らか．
(2)： $A^c = \Omega \setminus A$ と $P(\Omega) = 1$ から明らか．
(3)： (1) と確率の正値性から明らか．
(4)：$B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ $(n = 2, 3, \ldots)$ とおく．B_i は互いに素で

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad B_i \subseteq A_i.$$

よって，完全加法性から

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

より，求める結果を得る．
(5)：

$$P(A) = P(A_n) + \sum_{k=n}^{\infty} P(A_{k+1} \setminus A_k).$$

収束性から $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_{k+1} \setminus A_k) \to 0$ が成り立つので求める結果を得る．
(6)： de Morgan の法則と（5) を用いればよい． □

2.　確率変数

確率変数

定義 2.1. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とする．Ω から $\mathbb{R}$ への写像 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $\{\omega; X(\omega) \leq a\} \in \mathscr{F}$ が成り立つとき，X を**確率変数**と呼ぶ.

定義 2.2. (確率変数の分布)　X を確率変数とするとき，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 $P \circ X^{-1}$ (即ち $(P \circ X^{-1})(B) = P[X^{-1}(B)]$ で定義される $\mathbb{R}$ 上の確率測度）を X の**分布**といい，P^X で表わす.

定義 2.3. 2 つの確率変数 X, Y (必ずしも同一確率空間上で定義されている必要はない) に対し，$P^X = P^Y$ が成り立つとき，X と Y は**同分布をもつ** (同法則である) といい，

$$X \overset{d}{=} Y, \quad \text{あるいは} \quad X \overset{\mathscr{L}}{\approx} Y$$

と表わす.

確率変数列の収束

確率変数列の収束は基本的な概念である.

定義 2.4. 次のような確率変数の収束がある.

(1) 確率変数列 $\{X_n\}$ が 確率変数 X に**概収束**するとは，

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = X\Big) = 1 \tag{2.1}$$

が成り立つときをいう.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つとき確率変数列 $\{X_n\}$ は，確率変数 X に**確率収束**するという.

(3) 任意の有界連続関数 f に対し

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)] \tag{2.3}$$

が成立するとき確率変数列 X_n は，確率変数 X に**法則収束**するという.

収束に関し，よく使う性質をまとめておこう.

命題 2.5. 確率変数の族 $\{X_t\}$ が $t \to \infty$ のとき X に法則収束するしているとする．次のことが成立する．

(1) 確率変数の族 $\{Y_t\}$ が $t \to \infty$ のとき 0 に確率収束するならば，$\{X_t + Y_t\}$ は X に法則収束する．
(2) 確率変数の族 $\{Y_t\}$ が $t \to \infty$ のとき 0 に確率収束するならば，$\{X_tY_t\}$ は 0 に確率収束する．
(3) 確率変数の族 $\{Y_t\}$ が $t \to \infty$ のとき定数 θ に確率収束するならば，$\{X_tY_t\}$ は θX に法則収束する．

証明　(1) は特性関数の収束を言えばよい．その前に指数関数に関して

$$|e^{ix} - e^{iy}| \le |x - y|$$

が成り立っていることを思い出そう．これを使うと任意の ε に対し

$$\begin{aligned}
&|E[e^{i\xi(X_t+Y_t)}] - E[e^{i\xi X}]| \\
&\qquad = |E[e^{i\xi(X_t+Y_t)}] - E[e^{i\xi X_t}] + E[e^{i\xi X_t}] - E[e^{i\xi X}]| \\
&\qquad \le |E[e^{i\xi X_t}(e^{i\xi Y_t} - 1)]| + |E[e^{i\xi X_t}] - E[e^{i\xi X}]| \\
&\qquad \le E[|e^{i\xi Y_t} - 1|] + |E[e^{i\xi X_t}] - E[e^{i\xi X}]| \\
&\qquad \le E[|e^{i\xi Y_t} - 1|; |Y_t| > \varepsilon] + E[|e^{i\xi Y_t} - 1|; |Y_t| \le \varepsilon] + |E[e^{i\xi X_t}] - E[e^{i\xi X}]| \\
&\qquad \le 2P(|Y_t| > \varepsilon) + |\xi|\varepsilon + |E[e^{i\xi X_t}] - E[e^{i\xi X}]|
\end{aligned}$$

より

$$\varlimsup_{t\to\infty} |E[e^{i\xi(X_t+Y_t)}] - E[e^{i\xi X}]| \le |\xi|\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから，特性関数の収束が言えた．

(2) は $\{X_t\}$ の緊密性を使う．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．さらに $\delta > 0$ を任意にとるとき，緊密性からある $M > 0$ が存在して，$P(|X_t| \ge M) < \delta$ とできる．従って

$$\begin{aligned}
P(|X_tY_t| > \varepsilon) &= P(|X_tY_t| > \varepsilon; |X_t| < M) + P(|X_tY_t| > \varepsilon; |X_t| \ge M) \\
&\le P\left(|Y_t| > \frac{\varepsilon}{M}; |X_t| < M\right) + P(|X_t| \ge M) \\
&\le P\left(|Y_t| > \frac{\varepsilon}{M}\right) + \delta.
\end{aligned}$$

よって

$$\varlimsup_{t\to\infty} P(|X_tY_t| > \varepsilon) \le \lim_{t\to\infty} P\left(|Y_t| > \frac{\varepsilon}{M}\right) + \delta = \delta.$$

$\delta > 0$ は任意だから $\lim_{t\to\infty} P(|X_tY_t| > \varepsilon) = 0$ となり (2) が示せた．

(3) は

$$X_tY_t = \theta X_t + X_t(Y_t - \theta).$$

$X_t\theta$ は $X\theta$ に法則収束し，$X_t(Y_t - \theta)$ は (2) から 0 に確率収束する．よって (1) を使って X_tY_t が X に法則収束することが分かる． □

命題 2.6. 確率変数の族 (X_t), (Y_t), (Z_t) が次の条件をみたしているとする．

$$X_t \le Y_t \le Z_t, \quad t \in [0, \infty). \tag{2.4}$$

さらに $t \to \infty$ のとき (X_t) と (Z_t) がともに X に法則収束していると，(Y_t) も X に法則収束する．

証明　条件から，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$P(X_t \le x) \ge P(Y_t \le x) \ge P(Z_t \le x)$$

が成り立つ．x が X の分布関数の連続点であるとき，$t \to \infty$ としたとき，左辺と右辺は $P(X \le x)$ に収束する．従って

$$\lim_{t\to\infty} P(Y_t \le x) = P(X \le x)$$

となり，求める結果を得る． □

3.　条件付き期待値

確率論の基礎概念である条件付き期待値の復習を行う．

条件付き期待値

$A \in \mathscr{F}$ に対し，A の条件の下での条件付確率を

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

で定義した．但し $P(A) > 0$ を仮定している．A を固定すれば $B \mapsto P(B|A)$ は測度を定義するから，この測度に関する期待値として $E[X|A]$ が定義できる．実際これは

$$E[X|A] = \frac{E[X1_A]}{P(A)}$$

と定義される．条件 A の下での期待値と言うべきものである．この A をいろいろ動かすという考えで条件付き期待値をを一般化できる．

σ-field $\mathscr{G}$ が与えられたとき，$X \in L^1$ に対して，全ての $A \in \mathscr{G}$ に対し

$$E[X1_A] = E[Y1_A] \tag{3.1}$$

となる $\mathscr{G}$ 可測関数 Y が一意的に定まる．これを X の $\mathscr{G}$ で条件付けられた**条件付き期待値**と呼び $E[X|\mathscr{G}]$ とかく．特に $\mathscr{G}$ が有限生成の場合は disjoint 集合 $A_1, \dots, A_K$ で $\cup_j A_j = \Omega$ を満たすものが取れ，$\mathscr{G}$ の元は $A_1, \dots, A_K$ のうちのいくつかの和集合でかける．このときは

$$E[X|\mathscr{G}] = \sum_j E[X|A_j]1_{A_j} = \sum_j \frac{1}{P(A_j)} E[X1_{A_j}]1_{A_j} \tag{3.2}$$

と表される．一般の場合はこの様な極限と考えてよい．

条件付き期待値に関しては次のことが成り立つ：

1. $E[\alpha X + \beta Y|\mathscr{G}] = \alpha E[X|\mathscr{G}] + \beta E[Y|\mathscr{G}]$.
2. $X \geq 0$ ならば $E[X|\mathscr{G}] \geq 0$.
3. φ を凸関数とすると，$\varphi(E[X|\mathscr{G}]) \leq E[\varphi(X)|\mathscr{G}]$.
4. $0 \leq X_n \uparrow X$ のとき $E[X_n|\mathscr{G}] \uparrow E[X|\mathscr{G}]$.
5. $0 \leq X_n$ のとき $E[\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathscr{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X|\mathscr{G}]$.
6. $\mathscr{G}_1 \subseteq \mathscr{G}_2$ のとき $E[E[X|\mathscr{G}_2]|\mathscr{G}_1] = E[X|\mathscr{G}_1]$
7. $E[E[X|\mathscr{G}]] = E[X]$
8. X が $\mathscr{G}$-可測なら $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$.
9. X が $\mathscr{G}$ と独立ならば $E[X|\mathscr{G}] = E[X]$.

8 だけ示しておこう．条件付き期待値を取っているのだから $XY \in L^1$, $Y \in L^1$ は仮定しなければならない．8 の主張には $XE[Y|\mathscr{G}] \in L^1$ であることも含まれている．実際 $|XE[Y|\mathscr{G}]| \leq E[|XY||\mathscr{G}]$ が成立する．

まず，8 が有界な X に対して成立することを示す．$A \in \mathscr{G}$ をとり $X = 1_A$ のときをまず見よう．任意に $B \in \mathscr{G}$ をとると

$$E[(1_A E[Y|\mathscr{G}])1_B] = E[1_{A\cap B} E[Y|\mathscr{G}]] = E[1_{A\cap B} Y] = E[1_{A\cap B} Y] = E[(1_A Y)1_B].$$

これは $E[1_A Y|\mathscr{G}] = 1_A E[Y|\mathscr{G}]$ を意味する．

次に $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$ が成り立つ有界な $\mathscr{G}$ 可測関数全体を Φ とおく．明らかに Φ はベクトル空間であり，定数関数を含む．また Φ の非負単調増大列 $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$ が有界な関数 X に概収束すると，$E[X_n Y|\mathscr{G}] = X_n E[Y|\mathscr{G}]$ で極限を取れば，優収束定

理から $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$ が成り立つ．よって，Dynkin 族定理から Φ は $\mathscr{G}$ 可測な有界関数全体を含む．

次に $Y \in L^1$ として，$\mathscr{G}$ 可測関数 X が $XY \in L^1$ を満たしているとする．$X_n = X1_{\{|X| \le n\}}$ とおくと X_n は有界だから

$$E[X_n Y|\mathscr{G}] = X_n E[Y|\mathscr{G}].$$

ここで $n \to \infty$ とすれば，有収束定理から左辺は $E[XY|\mathscr{G}]$ に概収束する．右辺は $XE[Y|\mathscr{G}]$ に概収束する．よって $E[XY|\mathscr{G}] = XE[Y|\mathscr{G}]$ が成立していることが分かる．

条件付き期待値は，L^2 の枠組みでは，直交射影になっていることも特徴的である．$\mathscr{G}$ 可測な $L^2(P)$ の元の全体を $L^2(P, \mathscr{G})$ と表そう:

$$L^2(P, \mathscr{G}) = \{f \in L^2(P);\ f \text{ は } \mathscr{G} \text{ 可測 }\}.$$

明らかに $L^2(P, \mathscr{G})$ は $L^2(P)$ の閉部分空間である．従って直交射影 $\pi_{\mathscr{G}} \colon L^2(P, \mathscr{G}) \to L^2(P)$ が定義できる．このとき

$$\pi_{\mathscr{G}} X = E[X|\mathscr{G}]$$

が成り立つ．実際 3. から $E[X|\mathscr{G}]^2 \le E[X^2|\mathscr{G}]$ なので $X \in L^2(P)$ のとき $E[X|\mathscr{G}] \in L^2(P)$ が成り立つ．また $Y \in L^2(P, \mathscr{G})$ に対し

$$\begin{aligned} E[(X - E[X|\mathscr{G}])Y] &= E[XY] - E[E[X|\mathscr{G}]Y] \\ &= E[XY] - E[E[YX|\mathscr{G}]] \\ &= E[XY] - E[YX] = 0 \end{aligned}$$

から

$$X = E[X|\mathscr{G}] + (X - E[X|\mathscr{G}])$$

が直交分解を与え要ることが分かるから，$E[X|\mathscr{G}]$ が直交射影になっている．これから

$$E[X^2] = E[E[X|\mathscr{G}]^2] + E[(X - E[X|\mathscr{G}])^2] \tag{3.3}$$

が成り立つことが分かる．

独立な確率変数のときによく使う計算法があるので，それを紹介する．X, Y を S, T に値を取る独立な確率変数とする．f を $S \times T$ 上の実数値可測関数として $E[f(X, Y)|Y]$ を計算したい．このとき

$$\varphi(y) = E[f(X, y)]$$

と定義すると，

$$E[f(X, Y)|Y] = \varphi(Y)$$

が成り立つ．これを

$$E[f(X,Y)|Y] = E[f(X,y)]|_{y=Y}$$

の様に書き表す．証明は Fubini の定理を使って

$$\begin{aligned}
E[\varphi(Y)g(Y)] &= \int_T \varphi(y)g(y)P^Y(dy) \\
&= \int_T \left\{ \int_S f(x,y)P^X(dx) \right\} g(y)P^Y(dy) \\
&= \int_{S\times T} f(x,y)g(y)P^{(X,Y)}(dxdy) \\
&= E[f(X,Y)g(Y)]
\end{aligned}$$

から分かる．$\varphi(y)$ のことを

$$\varphi(y) = E[f(X,Y)|Y=y]$$

とかいたりする．

<u>条件付分散</u>

条件付平均が定義されれば，条件付分散も次の様に定義できる．

$$V(X|\mathscr{G}) := E[(X - E[X|\mathscr{G}])^2|\mathscr{G}]. \tag{3.4}$$

この定義から

$$\begin{aligned}
E[(X - E[X|\mathscr{G}])^2|\mathscr{G}] &= E[X^2|\mathscr{G}] - 2E[XE[X|\mathscr{G}]|\mathscr{G}] + E[E[X|\mathscr{G}]^2|\mathscr{G}] \\
&= E[X^2|\mathscr{G}] - 2E[X|\mathscr{G}]E[X|\mathscr{G}] + E[X|\mathscr{G}]^2 \\
&= E[X^2|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]^2
\end{aligned}$$

なので

$$V(X|\mathscr{G}) = E[X^2|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]^2$$

という定義も可能である．

$\mathscr{G}$ が有限分割 $A_1, A_2, \ldots, A_K$ で与えられているときは

$$\begin{aligned}
V(X|\mathscr{G}) &= E[X^2|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]^2 \\
&= \sum_j E[X^2|A_j]1_{A_j} - \{\sum_j E[X|A_j]1_{A_j}\}^2 \\
&= \sum_j E[X^2|A_j]1_{A_j} - \sum_j E[X|A_j]^2 1_{A_j}
\end{aligned}$$

$$= \sum_j (E[X^2|A_j] - E[X|A_j]^2) 1_{A_j}$$

が成り立つ．同様に

$$\begin{aligned} E[(X - E[X|A_j])^2|A_j] &= E[X^2 - 2XE[X|A_j] + E[X|A_j]^2|A_j] \\ &= E[X^2|A_j] - 2E[X|A_j]E[X|A_j] + E[X|A_j]^2 \\ &= E[X^2|A_j] - E[X|A_j]^2 \end{aligned}$$

だから

$$V(X|\mathscr{G}) = \sum_j E[(X - E[X|A_j])^2|A_j] 1_{A_j}$$

も成り立つ．

命題 3.1. $X \in L^2(P)$ に対し次の等式が成立する．

$$V(X) = E[V(X|\mathscr{G})] + V(E[X|\mathscr{G}]). \tag{3.5}$$

証明　(3.5) の右辺を計算しよう．まず，

$$\begin{aligned} E[V(X|\mathscr{G})] &= E[E[X^2|\mathscr{G}] - E[X|\mathscr{G}]^2] \\ &= E[X^2] - E[E[X|\mathscr{G}]^2]. \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} V(E[X|\mathscr{G}]) &= E[E[X|\mathscr{G}]^2] - E[E[X|\mathscr{G}]]^2 \\ &= E[E[X|\mathscr{G}]^2] - E[X]^2. \end{aligned}$$

両者を足して求める結果が得られる． □

停止時刻

　時間とともに発展する確率的な現象は確率過程によって表現される．その確率過程を記述するためには，増大する σ-集合体の列を考えることが有用である．時刻列は $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ と離散の場合を扱い，$t \in \mathbb{T}$ でパラメータ付けされた σ-集合体の族を $\{\mathscr{F}_t\}_t$ とし，**フィルトレーション**と呼ぶ．$\mathscr{F}_t$ は時刻 t までの情報を表している．

　さて，確率過程の時間発展を記述するとき，重要な概念として停止時刻がある．τ が**停止時刻**とは，任意の t に対し

$$\{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \tag{3.6}$$

をみたす $\mathbb{Z}_+$-値の確率変数のことである．

τ が停止時刻とするとき，σ-fileld $\mathscr{F}_\tau$ を

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F};\, A \cap \{\tau \le t\} \in \mathscr{F}_t \quad \forall t\} \tag{3.7}$$

で定める．これは時刻 τ までに得られる情報を表している．

命題 3.2. τ を停止時刻，$A \in \mathscr{F}_\tau$ に対して

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega) & \omega \in A \\ \infty & \omega \notin A \end{cases} \tag{3.8}$$

と定めると，τ_A も停止時刻である．

証明　条件 (3.6) を確かめればよい．$A \in \mathscr{F}_\tau$ であるから

$$\{\tau_A \le t\} = \{\tau \le t\} \cap A \in \mathscr{F}_t.$$

□

第 2 章

リスクモデリングと保険料

この章では，リスクについて概観する．

4.　リスクの定義

リスクとは

日常語で使う**リスク**とは何らかの危険を背後に含むものを意味するが，その使われ方は多様である．共通して言えることは，何らかの不確実性を伴うものということができる．つまり確率的な現象を伴うものであり，数学的にリスクを定義するには，確率モデルとして確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ が与えられているものとする．このときリスクを次のように定義する．

定義 4.1. 可測関数 $X\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ を**リスク** (risk) と呼ぶ．リスク全体の集合を $\mathscr{M}$ とかく．

X は未来における損失額を指すことが多く，$X > 0$ なら損失が生じ，$X < 0$ なら逆に利益が生じる，ということを意味する．このノートではこのような使い方をするものとする．また，このノートでは保険数理的な観点で論じ，言葉も保険数理に現れるものを使用する．その方が直感的な意味合いが明確になるはずであるが，同じような考え方でリスクを扱うことは様々な場面で可能である．

さて，保険の枠組みで考えるとリスクは次のものの中に存在すると考える．保険者（= 保険会社）と被保険者が存在し，次のような形でリスクを定式化する．

(1) 被保険者が事故を起こしたときの保険金の請求 (claim)
(2) 被保険者は掛け金 (premium) を支払う．

リスクの考察は保険会社の視点で行うので，その立場からは

(1) 保険金の支払いによる支出
(2) 掛け金による収入

ということになる．時刻 t までの請求総額を S_t, 掛け金の総額を P_t と表すと時刻 t における リスクは $X_t = S_t - P_t$ として表される．

保険リスクモデル

保険商品の契約を統合したものを保険ポートフォリオ (insurance portfolio) という．保険ポートフォリオに対するリスクは保険金の支払いであり，期間を定めた場合の累積の請求総額のモデルとして次のようなものがある．

定義 4.2. 契約者数を n とし，契約者 j の請求総額を V_j とする．V_j は独立だが，同分布であることは仮定しない．このとき累積クレーム S を

$$S = \sum_{j=1}^{n} V_j \tag{4.1}$$

としたものを**個別的リスクモデル** (individual risk model) という．

これは，団体生命保険や，企業保険のような人数が固定されている集団に対するモデリングに適している．これに対し次のようなモデルも可能である．

定義 4.3. ある保険ポートフォリオにおける一定期間の請求件数を確率変数 N で表し，j 番目 $(j = 1, 2, \ldots, N)$ の保険金請求額を X_j とする．X_j は独立同分布であり，N とも独立であるとする．このとき

$$S = \sum_{j=1}^{N} X_j \tag{4.2}$$

としたものを**集合的リスクモデル** (collective risk model) という．

近年のリスク理論は集合的リスクモデルを扱う場合がほとんどであり，集合的リスク理論 (collective risk theory) と呼ばれる．

5.　リスクの評価

基本的なリスク尺度

保険会社の支払能力を**ソルベンシー** (solvency) という言葉で表し, **支払不能** (insolvent) に陥るリスクを**ソルベンシー・リスク** (solvency risk) という．保険金請求のリスクを S

で表すとき，支払い不能となる確率 $\overline{F}_S(x) = P(S > x)$ に注目することは自然であろう．これを S の裾野確率 (tail probability) と呼ぶ．

さて，リスクを見積もるための概念が「リスク尺度」である．保険の実務的な観点からの定義は

定義 5.1. 写像 $\rho\colon \mathscr{M} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ に対し，リスク $S \in \mathscr{M}$ に資金 $\rho(S)$ を追加することによって S が「許容的」になるとき ρ を**リスク尺度** (risk measure) という．

もちろん「許容的」をどうとらえるかは恣意的で，保険会社の営業方針によって変わってくる．損失 S に対して $\rho(S)$ を準備しておけば，会社の資産状況は $\rho(S) - S$ であり，支払い不能となる確率

$$\overline{F}_S(\rho(S)) = P(S > \rho(S)) \tag{5.1}$$

が小さくなるように $\rho(S)$ を準備すればよいという考え方は自然であろう．

一般化逆関数

次に進む前に，単調関数の逆関数について必要なことを纏めておく．$H(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の右連続単調非減少関数とする．このとき左連続逆関数を

$$H^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} :\ H(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (\inf H, \sup H) \tag{5.2}$$

と定義する．

$H^{\leftarrow}(\alpha)$ が単調非減少であることは明らかである．$H^{\leftarrow}$ が左連続であることは，$\alpha_n \uparrow \alpha$ となる列に対し $H^{\leftarrow}(\alpha_n) \uparrow H^{\leftarrow}(\alpha-) < H^{\leftarrow}(\alpha)$ であるとすると，

$$H^{\leftarrow}(\alpha_n) < x < H^{\leftarrow}(\alpha) - \delta$$

を満たす x と $\delta > 0$ が存在する．$H^{\leftarrow}(\alpha_n)$ は下限で，それより x が大きいので $H(x) \geq \alpha_n$ である．$n \to \infty$ として $H(x) \geq \alpha$ となる．$H^{\leftarrow}(\alpha)$ はこのような条件を満たす x の下限だから $H^{\leftarrow}(\alpha) \leq x$ となって $x < H^{\leftarrow}(\alpha) - \delta$ に矛盾する．これで，左連続が示せた．

ここまでは H の右連続性は使っていない．右連続性を使うと，次のことが示せる

$$A(\alpha) = \{x;\ H(x) \geq \alpha\}\ \text{は閉集合である，} \tag{5.3}$$

$$H(H^{\leftarrow}(\alpha)-) \leq \alpha \leq H(H^{\leftarrow}(\alpha)), \tag{5.4}$$

$$H^{\leftarrow}(\alpha) \leq x \iff \alpha \leq H(x), \tag{5.5}$$

$$t < H^{\leftarrow}(\alpha) \iff H(t) < \alpha. \tag{5.6}$$

まず (5.3) を示そう．$s_n \in A(\alpha)$ で $s_n \downarrow s$ ならば $\alpha \leq H(s_n) \downarrow H(s)$ より $H(s) \geq \alpha$ なので $s \in A(\alpha)$．$s_n \in A(\alpha)$ で $s_n \uparrow s$ ならば $\alpha \leq H(s_n) \uparrow H(s-) \leq H(s)$ より $H(s) \geq \alpha$ なので $s \in A(\alpha)$．これで $A(\alpha)$ が閉集合が示せた．

$A(\alpha)$ が閉集合なので $H^{\leftarrow}(\alpha) = \inf A(\alpha) \in A(\alpha)$ なので $H(H^{\leftarrow}(\alpha)) \geq \alpha$．また $x < H^{\leftarrow}(\alpha)$ だと $H^{\leftarrow}(\alpha)$ は下限なので $H(x) < \alpha$ となる．$x \uparrow H^{\leftarrow}(\alpha)$ として $H(H^{\leftarrow}(\alpha)-) \leq \alpha$ が分かる．

(5.5) は $H^{\leftarrow}(\alpha) \leq x$ ならば (5.4) を使って $\alpha \leq H(H^{\leftarrow}(\alpha)) \leq H(x)$．逆に $\alpha \leq H(x)$ ならば $H^{\leftarrow}(\alpha)$ の定義から $H^{\leftarrow}(\alpha) \leq x$ が従う．(5.6) は (5.5) の対偶である．

(5.4) から $H^{\leftarrow}(\alpha)$ が H の連続点なら

$$H(H^{\leftarrow}(\alpha)) = \alpha$$

が成り立つことになるから，$H^{\leftarrow}$ は H の逆関数に近い性質を持つことが分かる．それで，一般化された逆関数という言い方をする．

<u>Value at risk</u>

定義 5.2. $S \in \mathscr{M}$ に対し，分布関数 F_S に対する α-分位点 (α-percentile)

$$F_S^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_S(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1) \tag{5.7}$$

を水準 α の **Value at Risk** と呼び

$$VaR_\alpha(S) = F_S^{\leftarrow}(\alpha) \tag{5.8}$$

とかく．

$F_S^{\leftarrow}$ を一般化逆関数と呼んだ．$F_S^{\leftarrow}$ は左連続である．また (5.4) から次を満たす．

$$F_S(F_S^{\leftarrow}(\alpha)-) \leq \alpha \leq F_S(F_S^{\leftarrow}(\alpha)). \tag{5.9}$$

また (5.5), (5.6) から

$$\{\alpha;\, a < F_S^{\leftarrow}(\alpha) \leq b\} = \{\alpha;\, F_S(a) < \alpha \leq F_S(b)\}$$

が成り立つから，$F_S^{\leftarrow}$ を 確率空間 $((0,1), dx)$ 上の確率変数と見て $F_S^{\leftarrow}$ が F と同じ分布を持つことが分かる．

(5.9) から

$$P(S > VaR_\alpha(S)) = \overline{F}_S(VaR_\alpha(S)) = 1 - F_S(VaR_\alpha(S)) \leq 1 - \alpha \tag{5.10}$$

が成り立つ．保険会社は $VaR_\alpha(S)$ を準備しておけば，支払い不能になる確率を $1-\alpha$ より小さく抑えることができる．α を 1 に近くとっておけば，会社にとっては許容的と言えるだろう．

次に Value at risk の別の特徴づけを与える．

命題 5.3. $E[S] < \infty$ のとき，次の様に $\rho(S)$ を定める:

$$\rho(S) = \arg\min_{\rho\in\mathbb{R}}\{E[(S-\rho)_+] + \varepsilon\rho\}, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{5.11}$$

このとき

$$\rho(S) = VaR_{1-\varepsilon}(S) \tag{5.12}$$

が成り立つ.

証明　$VaR_{1-\varepsilon}(S) = F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)$ のときが最小であることを示せばよい.

$$g(\rho) = E[(S-\rho)_+] + \varepsilon\rho = \int_\rho^\infty (1-F_S(x))\,dx + \varepsilon\rho \tag{5.13}$$

とおく．この等式は

$$\begin{aligned}
E[(S-\rho)_+] &= \int_{(\rho,\infty)} (x-\rho)\,dF_S(x) \\
&= \int_{(\rho,\infty)} dF_S(x) \int_{(\rho,\infty)} 1_{(\rho,x)}(y)\,dy \\
&= \int_{(\rho,\infty)} dy \int_{(\rho,\infty)} 1_{(y,\infty)}(x)\,dF_S(x) \quad (\because\ \text{Fubini の定理}) \\
&= \int_{(\rho,\infty)} dy(1-F_S(y))
\end{aligned}$$

から分かる.

　まず $\rho < F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)$ のとき

$$\begin{aligned}
g(\rho) - g(F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)) &= \int_\rho^\infty (1-F_S(x))\,dx + \varepsilon\rho - \int_{F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)}^\infty (1-F_S(x))\,dx - \varepsilon F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon) \\
&= \int_\rho^{F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)} (1-F_S(x))\,dx + \varepsilon(\rho - F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)) \\
&> \int_\rho^{F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)} (1-(1-\varepsilon))\,dx + \varepsilon(\rho - F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)) \\
&= \varepsilon(F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon) - \rho) + \varepsilon(\rho - F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)) = 0.
\end{aligned}$$

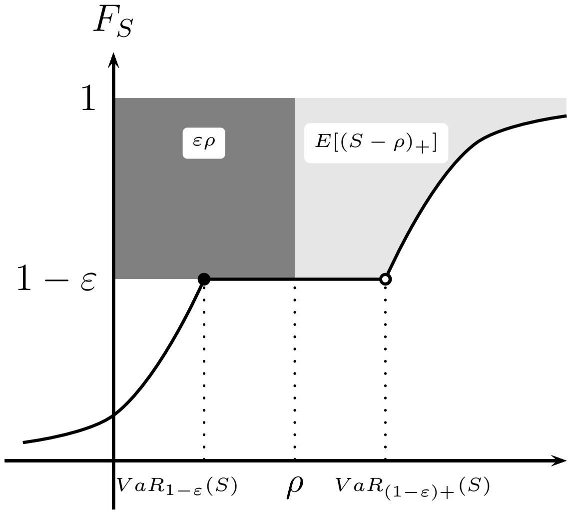
また $\rho > F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)$ のとき

$$\begin{aligned}
g(\rho) - g(F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)) &= \int_\rho^\infty (1-F_S(x))\,dx + \varepsilon\rho - \int_{F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)}^\infty (1-F_S(x))\,dx - \varepsilon F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon) \\
&= -\int_{F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)}^{\rho} (1-F_S(x))\,dx + \varepsilon(\rho - F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon))
\end{aligned}$$

$$\geq -\int_{F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)}^{\rho} (1-(1-\varepsilon))\,dx + \varepsilon(\rho - F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon))$$
$$\geq -\varepsilon(\rho - F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)) + \varepsilon(\rho - F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)) = 0.$$

よって $F_S^{\leftarrow}(1-\varepsilon)$ のときが最小であることが示せた. □

次の図からも分かるように最小値を取る ρ は一意ではない. $1-\varepsilon$ が $F_S^{\leftarrow}$ の不連続点 (F_S は flat になる) では $VaR_{1-\varepsilon}(S) \leq \rho \leq VaR_{(1-\varepsilon)_+}(S)$ で同じ値を取る. またこの図から定理の意味も明らかだろう.



上の命題は VaR に次のような解釈を与える. 負債 S に対して資本金 $\rho(S)$ を準備したとき, 不足額の期待値は $E[(S-\rho(S))_+]$ をできるだけ小さくする. そのとき $\rho(S)$ を準備するのにコストがかかり, 金利 $\varepsilon > 0$ に対して利息 $\varepsilon\rho(S)$ がかかる. その和を最小にするのが $VaR_{1-\varepsilon}(S)$ である.

このように VaR は解釈のしやすさもあり実務的にもよく用いられているが, α-分位点以降のリスクを考慮していないという批判もある. そこで次のような評価もしばしば用いられる.

定義 5.4. 確率変数 S に対して

$$TVaR_\alpha(S) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(S)\,du \tag{5.14}$$

を S に対する水準 α の **Tail Value at Risk** = TVaR と呼ぶ.

上の尺度は, 一点だけでなく α 以上の分位点の相加平均を計算しており, その意味で **Average Value at Risk** = AVaR などとも呼ばれる. 定義から

$$TVaR_\alpha(S) \geq VaR_\alpha(S) \tag{5.15}$$

が成り立つ.

命題 5.5. 分布関数 F_S は連続であるとする．このとき $TVaR$ は次の表示を持つ．

$$TVaR_\alpha(S) = E[S|S > VaR_\alpha(S)] \tag{5.16}$$

証明　F_S の連続性から $F_S^{\leftarrow}$ は狭義単調増大となる．従って次が成り立つ．

$$u > \alpha \iff F_S^{\leftarrow}(u) > F_S^{\leftarrow}(\alpha) \implies F_S^{\leftarrow}(u) \geq F_S^{\leftarrow}(\alpha) \iff u \geq \alpha \tag{5.17}$$

ここで，S の分布と $F_S^{\leftarrow}(\alpha)$ の分布は同じだから

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(S)\,du &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{(\alpha,1)} VaR_u(S)\,du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\{VaR_u(S)>VaR_\alpha(S)\}} VaR_u(S)\,du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}E[S; S > VaR_\alpha(S)]\end{aligned}$$

が得られる．□

(5.17) から (5.16) は $E[S|S \geq VaR_\alpha(S)]$ と表しても同じである．ただし，F_S の連続性は本質的で，これがなければ (5.16) は成立しない．実際は区別しておく必要があるので次の定義を導入する．

定義 5.6. S が $E[S] < \infty$ を満たすとき

$$CTE_\alpha(S) := E[S|S > VaR_\alpha(S)] \tag{5.18}$$

を水準 α の**条件付裾野期待値** (conditional tail expectation = CTE) と呼ぶ．

類似の概念で，混同して使われることもあるが，次の概念も使うことにする．

定義 5.7. S が $E[S] < \infty$ を満たすとき

$$ES_\alpha(S) := E[(S - VaR_\alpha(S))_+] \tag{5.19}$$

を水準 α の**不足額期待値** (expected shortfall = ES) と呼ぶ．

$$\rho(S) = VaR_\alpha(S) + ES_\alpha(S) \tag{5.20}$$

と定義すれば VaR の不足分を補ったリスク尺度と言える．

定理 5.8. $F_S(VaR_\alpha(S)) < 1$ なる $\alpha \in (0,1)$ に対して次が成立する．

$$\begin{aligned}TVaR_\alpha(S) &= VaR_\alpha(S) + \frac{1}{1-\alpha}ES_\alpha(S) \\ &= CTE_\alpha(S) + \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\overline{F}_S(VaR_\alpha(S))}\right]ES_\alpha(S).\end{aligned} \tag{5.21}$$

証明 F_S と $VaR_\alpha(S)$ に対して

$$\gamma = F_S(VaR_\alpha(S)) \geq \alpha$$

と定めると

$$P(S > VaR_\alpha(S)) = 1 - F_S(VaR_\alpha(S)) = 1 - \gamma.$$

これと ES_α の定義から

$$\begin{aligned}
ES_\alpha(S) &= E[(S - VaR_\alpha(S))1_{\{S>VaR_\alpha(S)\}}] \\
&= E[S1_{\{S>VaR_\alpha(S)\}} - VaR_\alpha(S)P(S > VaR_\alpha(S)) \\
&= \int_0^1 F_S^{\leftarrow}(u)1_{\{F_S^{\leftarrow}(u)>VaR_\alpha(S)\}}(u)\,du - (1-\gamma)VaR_\alpha(S) \quad (\because F_S^{\leftarrow} \text{ は } S \text{ と同分布}) \\
&= \int_0^1 F_S^{\leftarrow}(u)1_{\{u>F_S(VaR_\alpha(S))\}}(u)\,du - (1-\gamma)VaR_\alpha(S) \quad (\because (5.6)) \\
&= \int_\gamma^1 F_S^{\leftarrow}(u)\,du - (1-\gamma)VaR_\alpha(S).
\end{aligned}$$

ここで $\alpha < u < \gamma$ のとき $F_S^{\leftarrow}(u) = VaR_\alpha(S)$ となることに注意して

$$\begin{aligned}
ES_\alpha(S) &= \int_\alpha^1 F_S^{\leftarrow}(u)\,du - (\gamma-\alpha)VaR_\alpha(S) - (1-\gamma)VaR_\alpha(S) \\
&= \int_\alpha^1 F_S^{\leftarrow}(u)\,du - (1-\alpha)VaR_\alpha(S).
\end{aligned}$$

両辺を $1-\alpha$ で割って

$$\frac{ES_\alpha(S)}{1-\alpha} + VaR_\alpha(S) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_S^{\leftarrow}(u)\,du = TVaR_\alpha(S)$$

を得る．また条件付きで書き直して

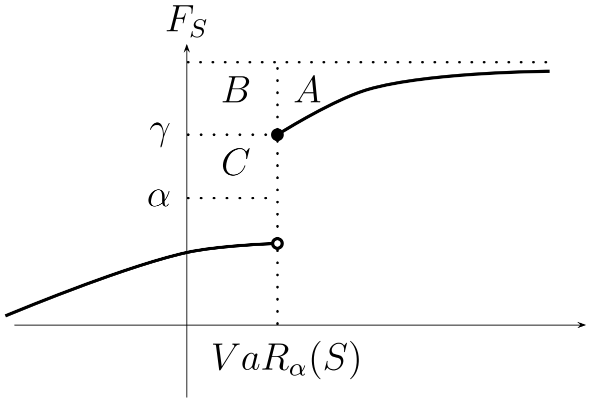
$$\begin{aligned}
ES_\alpha(S) &= E[(S - VaR_\alpha(S))|S > VaR_\alpha(S)]P(S > VaR_\alpha(S)) \\
&= (E[S|S > VaR_\alpha(S)] - VaR_\alpha(S))P(S > VaR_\alpha(S)) \\
&= (CTE_\alpha(S) - VaR_\alpha(S))\overline{F}_S(VaR_\alpha(S))
\end{aligned}$$

となるので，先ほどの結果を使って

$$\begin{aligned}
CTE_\alpha(S) &= VaR_\alpha(S) + \frac{1}{\overline{F}_S(VaR_\alpha(S))}ES_\alpha(S) \\
&= TVaR_\alpha(S) - ES_\alpha(S)\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{\overline{F}_S(VaR_\alpha(S))}\right]
\end{aligned}$$

となり，求める結果を得る． □

図示すると次のようになる．A, B, C が表しているのは，次の図のそれぞれ部分の面積である．



それぞれのリスク尺度が表しているものは

$$CTE_\alpha(S) = \frac{A+B}{1-\gamma} \tag{5.22}$$

$$ES_\alpha(S) = A \tag{5.23}$$

$$TVaR_\alpha(S) = \frac{A+B+C}{1-\alpha} = \frac{A}{1-\alpha} + \frac{B}{1-\gamma} \tag{5.24}$$

である．(5.24) を示すには，次のことが必要である．

$$B : C = 1-\gamma : \gamma - \alpha. \tag{5.25}$$

これらの関係式を使うと定理 5.8 は容易に見て取れるであろう．また次の不等式

$$TVaR_\alpha(S) \leq CTE_\alpha(S) \tag{5.26}$$

が成り立つが，等号は $\alpha = \gamma$ のときに限る．従って F_S が $VaR_\alpha(S)$ で連続な場合は等号が成り立つ．他の尺度との関係は次のようになっている．

$$VaR_\alpha(S) \leq VaR_\alpha(S) + ES_\alpha(S) \leq TVaR_\alpha(S) \leq CTE_\alpha(S). \tag{5.27}$$

これらも，上の図から $VaR_\alpha(S) = \frac{B}{1-\gamma}$ を使えばほぼ明らかだろう．$CTE_\alpha(S)$ が最もリスクを高く見積もっていることになる．

第 3 章

Poisson 過程

この章では，Poisson 過程について述べる．

6. Poisson 過程

Poisson 過程

後で使う記法を導入しておく．実関数 f に対し

$$f(s,t] := f(t) - f(s) \tag{6.1}$$

とかく．

以下確率空間を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ として，この上で考える．確率変数 M が パラメーター $\lambda \geq 0$ の Poisson 分布を持つとは

$$P(M = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.2}$$

が成り立つときと定義する．M の平均は λ で，分散も λ である．

このとき，Poisson 過程の定義を次で与える．

定義 6.1. 確率過程 $(N_t)_{t\geq 0}$ が次をみたすとき **Poisson 過程**と呼ぶ.

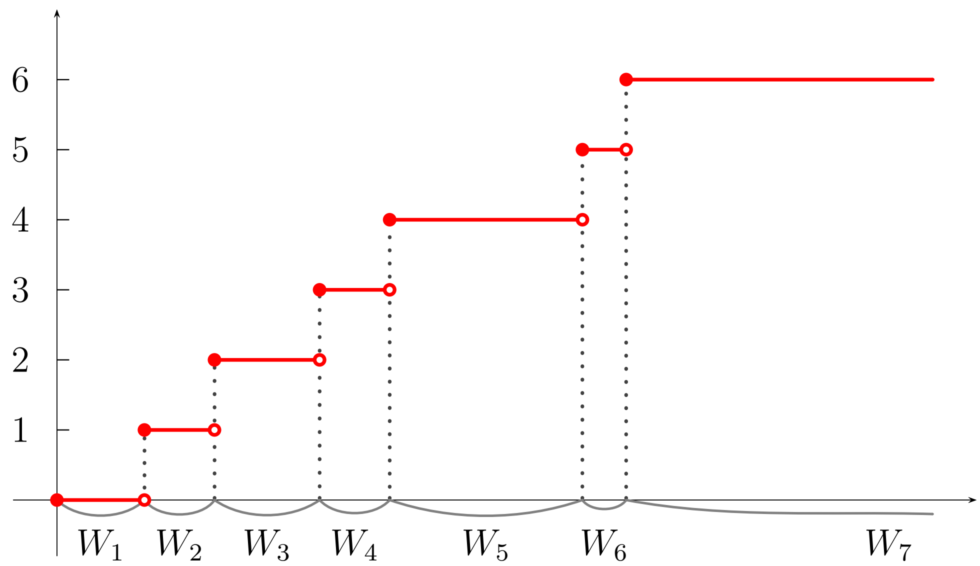
(1) 0 から出発する: $N_0 = 0$ a.s.

(2) 独立増分性を持つ: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対し $N(t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ は独立である．

(3) ある右連続非減少関数 $\mu(t)$ で $\mu(0) = 0$ をみたすものが存在し $N(s,t]$ はパラメーター $\mu(0,t]$ の Poisson 分布を持つ.

(4) $(N(t))$ は右連続左極限を持つ.

ここで $N(s,t] = N_t - N_s$ という記法を使っている．



Poisson 過程

この定義から $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ と非負整数 $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$ に対し，

$$\begin{aligned}
P(N(t_1) = k_1, &N(t_2) = k_2, \ldots, N(t_n) = k_n) \\
&= P(N(t_1) = k_1, N(t_1, t_2] = k_2 - k_1, \ldots, N(t_{n-1}, t_n] = k_n - k_{n-1}) \\
&= e^{-\mu(t_1)} \frac{\mu(t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\mu(t_1,t_2]} \frac{\mu(t_1, t_2]^{k_2-k_1}}{(k_2 - k_1)!} \cdots e^{-\mu(t_{n-1},t_n]} \frac{\mu(t_{n-1}, t_n]^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n - k_{n-1})!} \\
&= e^{-\mu(t_n)} \frac{\mu(t_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{\mu(t_1, t_2]^{k_2-k_1}}{(k_2 - k_1)!} \cdots \frac{\mu(t_{n-1}, t_n]^{k_n-k_{n-1}}}{(k_n - k_{n-1})!}.
\end{aligned}$$

時間的に一様な **Poisson** 過程，強度関数，**Cramér-Lundberg** モデル

平均値関数 $\mu(t)$ が $\lambda > 0$ が取れて

(6.3) $$\mu(t) = \lambda t$$

で与えられるとき，（時間的に）一様な Poisson 過程と呼ぶ．そうでないものは非一様であるという．λ は強度と呼ぶ．特に $\lambda = 1$ のとき，標準 Poisson 過程と呼ぶ．

またより一般に

(6.4) $$\mu(s, t] = \int_s^t \lambda(u)\, du, \quad s < t$$

となるとき，$\lambda(t)$ を強度関数と呼ぶ．このとき，$\mu(t)$ は連続となる．$N(t)$ が一様のとき，$\mu(s, t] = \mu(s + h.t + h]$ が任意の $h > 0$ に対して成り立つ．すなわち，定常増分過程であることが分かる．

独立増分性を使うと，(N_t) はマルコフ過程であることが分かる．ここでマルコフ過程とは $\mathscr{F}_t$ を

$$\mathscr{F}_t = \sigma\{N_s;\, 0 \le s \le t\} \tag{6.5}$$

で定めるとき

$$E[f(N_t)|\mathscr{F}_s] = E[f(N_t)|N_s], \quad 0 \le s < t \tag{6.6}$$

が成り立つことである．そのためには

$$E[1_{\{N_t=l\}}|\mathscr{F}_s] = \sum_{k=0}^{l} P(N_t = l|N_s = k)1_{\{N_s=k\}} \tag{6.7}$$

を示せばよい．そこで $A \in \mathscr{F}_s$ として

$$\begin{aligned}
E[1_{\{N_t=l\}}1_A] &= E[\sum_{k=0}^{l} 1_{\{N_s=k\}}1_{\{N_t=l\}}1_A] \\
&= E[\sum_{k=0}^{l} 1_{\{N_s=k\}}1_{\{N_t-k=l-k\}}1_A] \\
&= \sum_{k=0}^{l} E[1_{\{N_s=k\}}1_{\{N_t-N_s=l-k\}}1_A] \\
&= \sum_{k=0}^{l} E[1_{\{N_t-N_s=l-k\}}]E[1_{\{N_s=k\}}1_A] \\
&= \sum_{k=0}^{l} P(N_t - N_s = l-k|N_s = k)E[1_{\{N_s=k\}}1_A] \\
&= E[\sum_{k=0}^{l} P(N_t = l|N_s = k)1_{\{N_s=k\}}1_A].
\end{aligned}$$

これは (6.7) を示している．

マルコフ過程に対して推移確率を

$$p(s,k;t,k+h) = P(N_t = k+h|N_s = k)$$

で定めると

$$\begin{aligned}
p(s,k;t,k+h) &= P(N_t = k+h|N_s = k) \\
&= P(N_t - N_s = h|N_s = k) \\
&= P(N_t - N_s = h) \\
&= e^{-\mu(s,t]}\frac{\mu(s,t]^h}{h!}
\end{aligned}$$

が成り立つ．推移確率の微分 $\lambda_{k,k+h}(t)$ を次で定める．

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \lim_{s\downarrow 0} \frac{p(t,k;t+s,k+h)}{s}$$

命題 6.2. (N_t) が連続な強度関数 $\lambda(t)$ を持つとき

$$\lambda_{k,k+h}(t) = \begin{cases} \lambda(t), & \text{if } h=1, \\ 0, & \text{if } h \geq 2, \end{cases} \tag{6.8}$$

証明

$$p(t,k;t+s,k+h) = e^{-\mu(t,t+s]} \frac{\mu(t,t+s]^h}{h!}$$

である．ここで

$$\mu(t,t+s] = \int_t^{t+s} \lambda(u)\,du = \lambda(t)s + o(s)$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{p(t,k;t+s,k+h)}{s} &= e^{-\mu(t,t+s]} \frac{\mu(t,t+s]^h}{sh!} \\ &= e^{-\lambda(t)s+o(s)} \frac{(\lambda(t)s+o(s))^h}{sh!} \\ &= (1-\lambda(t)s+o(s))(\lambda(t)^h s^{h-1} + o(s^{k-1}))\frac{1}{h!} \\ &\to \begin{cases} \lambda(t), & \text{if } h=1, \\ 0, & \text{if } h \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

これが求める結果である． □

この結果は，Poisson 過程が大きさ 2 以上のジャンプを持たないことを導く．ここではその一端だけ見よう．$t \geq 0$, $s > 0$ に対して

$$P(N(t,t+s] \geq 2) = o(s). \tag{6.9}$$

が成り立つ．実際

$$P(N(t,t+s] \geq 2) = 1 - e^{-\mu(t,t+s]} - \mu(t,t+s]e^{-\mu(t,t+s]}.$$

ここで

$$\mu(t,t+s] = \int_t^{t+s} \lambda(u)\,du = s\lambda(t) + o(s)$$

なので

$$
\begin{aligned}
1-&e^{-\mu(t,t+s]}-\mu(t,t+s]e^{-\mu(t,t+s]}\\
&=1-(1-s\lambda(t)+o(s))-(s\lambda(t)+o(s))(1-s\lambda(t)+o(s))\\
&=o(s)
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
P((N(t,t+s]=1)&=\mu(t,t+s]e^{-\mu(t,t+s]}=(s\lambda(t)+o(s))(1-s\lambda(t)+o(s))\\
&=s\lambda(t)+o(s)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

一様な Poisson 過程と非一様な Poisson 過程

平均関数 μ が与えられたとき，標準 Poisson 過程 $\tilde{N}$ を用いて $N_t=\tilde{N}_{\mu(t)}$ と定義すると，(N_t) は μ を平均関数とする（非一様） Poisson 過程となる．

また逆に μ が連続で単調増大の場合は逆関数 μ^{-1} が存在し，やはり単調増大連続関数となる．N が平均関数 μ の Poisson 過程とすると，$N_{\mu^{-1}(t)}$ は標準 Poisson 過程となる．まとめると次が得られる．

命題 6.3. (N_t) を平均関数 μ を持つ Poisson 過程，$\tilde{N}$ を標準 Poisson 過程とする．このとき次が成り立つ．

(1) $(\tilde{N}_{\mu(t)})$ は平均関数 $\mu(t)$ の Poisson 過程となる．
(2) $\mu(t)$ が単調増大連続関数で $\lim_{t\to\infty}\mu(t)=\infty$ のとき $(N_{\mu^{-1}(t)})$ は標準 Poisson 過程となる．

7. Poisson 過程の構成

更新過程としての Poisson 過程

実際に定義 6.1 の性質を持つ Poisson 過程が存在することを示そう．ここでは更新過程として構成する．ここで，更新過程について簡単に説明を加える．後で，詳しい性質を述べるが，特に保険数学の観点からも応用上重要なものである．

W_k, $k=1,2,\dots$ を i.i.d. で $W_k>0$ a.s. をみたすものとする．これから $T_0=0$,

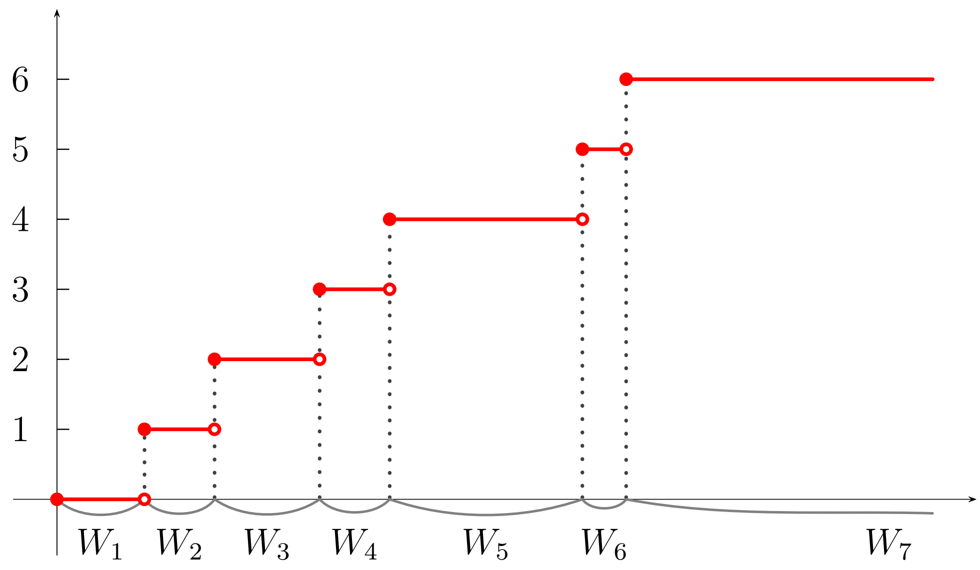
$$
T_n=W_1+W_2+\cdots+W_n \tag{7.1}
$$

で定まる確率変数列 (T_n) を**更新過程**と呼ぶ．(T_n) は到着時刻，あるいは生起時刻，更新時刻を表す．保険数学では事故が起こった時刻を表すが，電球が寿命で新しいものと交換

する（更新する）時刻といった意味を持つ概念である．W_k は到着時間間隔 (inter-arrival time) と呼ばれる．時刻 t までの生起回数 N_t を

$$N_t = \sharp\{k = 1, 2, \dots; T_k \le t\} = \max\{k = 1, 2, \dots; T_k \le t\} \tag{7.2}$$

で定める．



更新過程

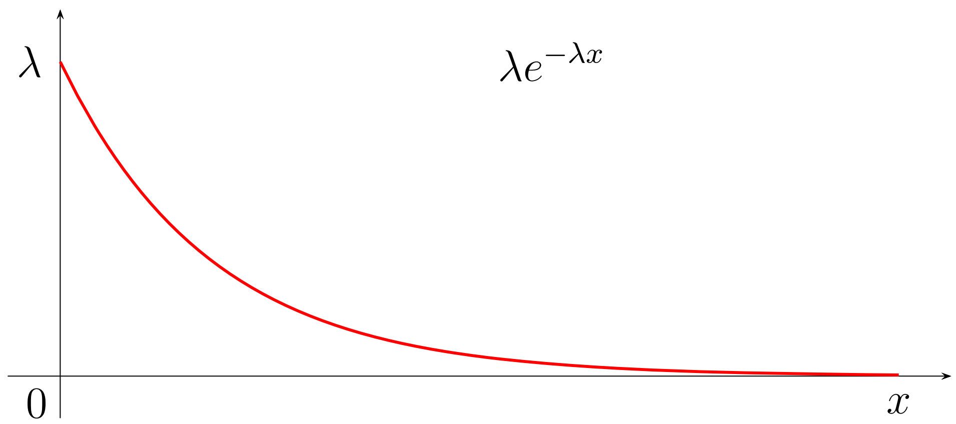
さて，以上は更新過程の一般的な設定であるが，Poisson 過程を定義するためには W_k は**指数分布**に従うことを仮定する．即ち W_n の分布関数を F とすると次の形で与えられる．

$$F(x) = P(W_n \le x) = 1 - e^{-\lambda x}. \tag{7.3}$$

従って密度関数が

$$\lambda e^{-\lambda x} \tag{7.4}$$

であり，このパラメーターの入れ方は $\frac{1}{\lambda}$ が平均で $\frac{1}{\lambda^2}$ が分散となる．この分布を $E(\lambda)$ とかく．（本によってはパラメーターを平均 $\mu = \frac{1}{\lambda}$ に取る流儀もあるので注意すること．）



指数分布の密度関数

また二つの分布関数 F, G の合成積を

$$F * G(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x-y)\, dG(y) \tag{7.5}$$

で定める．これは二つの独立な確率変数 X, Y の分布関数を F, G とするとき，$X+Y$ の分布関数が $F * G$ となる:

$$\begin{aligned} P(X+Y \le z) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{(-\infty, z]}(x+y) dF(x) dG(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1_{(-\infty, z-y]}(x) dF(x) dG(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} F(z-y) dG(y). \end{aligned}$$

さて，これらのことを準備すると，次のことが示せる．

命題 7.1. 次が成り立つ．

$$P(T_n \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad t \ge 0 \tag{7.6}$$

さらに

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{7.7}$$

証明 $P(T_n \le t) = F^{n*}$ である．ここで $n*$ は合成積を n 回繰り返すことを意味する．(7.6) の右辺を $F_n(t)$ とおくと，

$$F_n'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

である．このことを利用して，$F_n = F^{n*}$ を帰納法で示そう．n のときを仮定して $n+1$ のときを示す．

$$\begin{aligned}
F^{(n+1)*}(t) &= \int_0^t F(t-s)dF^{n*}(s) \\
&= \int_0^t (1-e^{-\lambda(t-s)})\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds - \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\lambda e^{-\lambda s}\lambda\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds - e^{-\lambda t}\int_0^t \lambda\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}ds - e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}$$

ここで，両辺を微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F^{(n+1)*}(t) &= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} - \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

よって $F'_{n+1} = \frac{d}{dt}F^{(n+1)*}(t)$ が分かる．しかも $F_{n+1}(0) = F^{(n+1)*}(0) = 0$ であるから $F_{n+1} = F^{(n+1)*}$ が示せた．

これから容易に

$$P(N_t = k) = P(T_k \le t) - P(T_{k+1} \le t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

□

上の証明の中で $F^{(n+1)*}(t)$ の微分を計算したが，これは密度関数のことに他ならない．即ち $F^{(n+1)*}$ は次の密度関数を持つ．

$$f_{n+1}(t) = 1_{\{t\ge 0\}}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = 1_{\{t\ge 0\}}\frac{1}{\Gamma(n+1)}\lambda^{n+1}e^{-\lambda t}\,t^{n+1-1} \tag{7.8}$$

これはガンマ分布の密度関数であるから T_n はガンマ分布を持つことが分かる．密度関数の合成積を計算しても，F^{n*} の形は帰納的に証明できる．

$\mathscr{F}_t$ を

$$\mathscr{F}_t = \sigma\{N(s); 0 \le s \le t\} \tag{7.9}$$

で定める．このとき

定理 7.2. 次が成り立つ：

(7.10) $$P(N(s+t)-N(s)=n|\mathscr{F}_s)=P(N(t)=n).$$

証明 $A\in\mathscr{F}_s$ に対して $P(\{N(s+t)-N(s)\geq n\}\cap A)=P(N(t)\geq n)P(A)$ を示せばよい．また $A\cap\{N(s)=m\}$ を考えることにより， A 上で $N(s)=m$ としてよい．このとき，$A=\{T_{m+1}>s\}\cap B$ と表される．ここで $B\in\sigma\{W_1,W_2,\dots,W_m\}$ であり，B 上で $T_m\leq s$ である．ところで $N(s+t)\geq m+n$ と $T_{m+n}\leq s+t$ は同値であり，$\sigma\{T_l-T_m;\, l>m\}$ は W_1, W_2,. . . ,W_m と独立であるから

$$\begin{aligned}
&P(\{N(t+s)-N(s)\geq n\}\cap A)\\
&\quad=P(\{N(t+s)\geq n+m\}\cap A)\\
&\quad=P(\{T_{m+n}\leq s+t\}\cap\{T_{m+1}>s\}\cap B)\\
&\quad=P(\{T_{m+n}-T_m\leq s+t-T_m\}\cap\{T_{m+1}-T_m>s-T_m\}\cap B)\\
&\quad=E[v(T_m);B]
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
v(\xi)&=P(\{T_{m+n}-T_m\leq s+t-\xi\}\cap\{T_{m+1}-T_m>s-\xi\})\\
&=P(\{T_n\leq s+t-\xi\}\cap\{W_1>s-\xi\})\\
&=P(\{T_{n-1}+W_n\leq s+t-\xi\}\cap\{W_n>s-\xi\})\\
&=E[w(\xi,W_n);W_n>s-\xi].
\end{aligned}$$

但し

$$w(\xi,\eta)=P(T_{n-1}\leq s+t-\xi-\eta)\quad\text{for }\xi\in[0,s]\text{ and }\eta\in[s-\xi,s+t-\xi].$$

ここで初めて W_n が指数分布であることを使う．任意の可測関数 f に対して

$$\begin{aligned}
E[f(W_n);W_n>a]&=\int_a^\infty\lambda e^{-\lambda x}f(x)\,dx\\
&=\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda(a+y)}f(a+y)\,dy\quad(x=a+y)\\
&=e^{-\lambda a}\int_0^\infty\lambda e^{-\lambda y}f(a+y)\,dy\\
&=e^{-\lambda a}E[f(a+W_n)]
\end{aligned}$$

が成り立つ．特に

$$\begin{aligned}
v(\xi)&=E[w(\xi,W_n);W_n>s-\xi]\\
&=e^{-\lambda(s-\xi)}E[w(\xi,W_n+s-\xi)]\\
&=e^{-\lambda(s-\xi)}P(T_{n-1}\leq s+t-\xi-W_n-s+\xi)
\end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda(s-\xi)}P(T_{n-1} \le t - W_n)$$
$$= e^{-\lambda(s-\xi)}P(T_n \le t) = e^{-\lambda(s-\xi)}P(N(t) \ge n).$$

従って

$$P(\{N(s+t) - N(s) \ge n\} \cap A) = E[v(T_m); B] = E[e^{-\lambda(s-T_m)}; B]\, P(N(t) \ge n).$$

これと

$$P(A) = P(\{T_{m+1} > s\} \cap B) = P(\{W_{m+1} > s - T_m\} \cap B) = E[e^{-\lambda(s-T_m)}; B]$$

をあわせて求める結果を得る． □

今までは，更新過程から Poisson 過程を構成したことになる．これで存在定理としては問題ないが，逆向きの議論も可能であること，すなわち Poisson 過程から，ジャンプの時間を並べたものが，更新過程になることを示しておこう．

定理 7.3. 次が成り立つ．

(1) 指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ を持つ i.i.d. 列から更新過程を作ると，これは Poisson 過程を定める．

(2) N を強度 λ の Poisson 過程とする．$0 \le T_1 \le T_2 \le \cdots$ をジャンプの時刻の列とすると，$\mathrm{Exp}(\lambda)$ の i.i.e. 列を用いて (7.1) のように表現される．

証明 (1) は示したので (2) を示す．まず帰納的に $0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots$ に対し

(7.11)
$$P(N_{t_1} \ge 1, N_{t_2} \ge 2, \ldots, N_{t_n} \ge n)$$
$$= \int_{w_1=0}^{t_1} \lambda e^{-\lambda w_1} \int_{w_2=0}^{t_2-w_1} \lambda e^{-\lambda w_2} \cdots \int_{w_n=0}^{t_n-w_1-\cdots-w_{n-1}} \lambda e^{-\lambda w_n}\, dw_n \cdots dw_1$$

が成立することを示そう．まず $n=1$ の場合は

$$P(N_{t_1} \ge 1) = 1 - P(N_{t_1} = 0) = 1 - e^{-\lambda t_1} = \int_{w_1=0}^{t_1} \lambda e^{-\lambda w_1}\, dw_1$$

で正しいことが分かる．定義から

$$\{T_n \le t\} = \{N_t \ge n\} \tag{7.12}$$

が成り立つ．これと上の結果を合わせて

$$P(T_1 \le t) = \int_{w=0}^{t} \lambda e^{-\lambda w}\, dw$$

が分かり，T_1 は指数分布を持つことが分かる．

次に n のときを仮定して $n+1$ のときを示そう．正確には Poisson 過程の強マルコフ性を使うことになるのだが，T_1 で条件付けて，それ以後の増分が独立なので

$$
\begin{aligned}
&P(N_{t_1} \geq 1, N_{t_2} \geq 2, \ldots, N_{t_{n+1}} \geq n+1) \\
&= E[P(N_{t_1} \geq 1, N_{t_2} \geq 2, \ldots, N_{t_{n+1}} \geq n+1 | \mathscr{F}_{T_1})] \\
&= \int_0^{t_1} P(N(w_1, t_2] \geq 1, \ldots, N(w_1, t_{n+1}] \geq n | T_1 = w_1) dF_{T_1}(dw_1) \\
&= \int_0^{t_1} P(N(w_1, t_2] \geq 1, \ldots, N(w_1, t_{n+1}] \geq n) \lambda e^{-\lambda w_1} \, dw_1) \\
&= \int_0^{t_1} \lambda e^{-\lambda w_1} \, dw_1 P(N_{t_2 - w_1} \geq 1, \ldots, N_{t_{n+1} - w_1} \geq n) \\
&= \int_0^{t_1} \lambda e^{-\lambda w_1} \, dw_1 \int_{w_2=0}^{t_2 - w_1} \lambda e^{-\lambda w_2} \cdots \int_{w_{n+1}=0}^{t_{n+1} - w_1 - \cdots - w_{n-1} - w_n} \lambda e^{-\lambda w_{n+1}} dw_{n+1} \cdots dw_2.
\end{aligned}
$$

これは $n+1$ のときにも成り立つことを示している．

これで (7.11) が成り立つことが示せた．さらに (7.12) を繰り返せば

$$
\{N_{t_1} \geq 1, N_{t_2} \geq 2, \ldots, N_{t_n} \geq n\} = \{T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \ldots, T_n \leq t_n\}
$$

が成り立つので

$$
\begin{aligned}
&P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2, \ldots, T_n \leq t_n) \\
&\quad = \int_{w_1=0}^{t_1} \lambda e^{-\lambda w_1} \int_{w_2=0}^{t_2 - w_1} \lambda e^{-\lambda w_2} \cdots \int_{w_n=0}^{t_n - w_1 - \cdots - w_{n-1}} \lambda e^{-\lambda w_n} \, dw_n \cdots dw_1 \\
&\quad = \int_0^{t_1} du_1 \cdots \int_0^{t_n} \lambda^n e^{-\lambda u_n} 1_{\{u_1 < u_2 < \cdots < u_n\}} \, du_n.
\end{aligned}
$$

最後の式は変数変換 $u_1 = w_1$, $u_2 = w_1 + w_2$,...,$u_n = w_1 + \cdots + w_n$ を行った．Jacobian は 1 であることに注意しよう．w_1, w_2,...,w_n の積分領域は

$$
\begin{gathered}
0 < w_1 < t_1 \\
0 < w_2 < t_2 - w_1 \\
\vdots \\
0 < w_n < t_n - w_1 - w_2 - \cdots - w_{n-1}
\end{gathered}
$$

は

$$
\begin{gathered}
0 < w_1 < t_1 \\
w_1 < w_1 + w_2 < t_2 \\
\vdots \\
w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1} < w_1 + w_2 + \cdots + w_n < t_n
\end{gathered}
$$

であるから，u_1, u_2,$\ldots$, u_n でかくと

$$\begin{gathered}0 < u_1 < t_1 \\ u_1 < u_2 < t_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} < u_n < t_n\end{gathered}$$

となるので，上の式が成立することが分かる．この式は長方形領域で成立しているが，近似の議論により一般の Borel 集合 B に対して成立することが分かる．即ち

$$P((T_1, T_2, \ldots, T_n) \in B) = \int \cdots \int_B \lambda^n e^{-\lambda u_n} 1_{\{u_1 < u_2 < \cdots < u_n\}}\, du_1 du_2 \cdots du_n$$

となり，密度関数が $\lambda^n e^{-\lambda u_n} 1_{\{u_1<u_2<\cdots<u_n\}}$ であることが分かる．これで $(T_1, \ldots, T_n)$ の分布が分かった．

上の変数変換の逆 $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \mapsto (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ を行えば $W_1 = T_1$, $W_2 = T_2 - T_1$, $\ldots$, $W_n = T_n - T_{n-1}$ が得られるので，$(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ の密度関数が得られる．$u_1 < u_2 < \cdots < u_n$ の関係は $w_1 > 0$, $w_2 > 0$, $\ldots$, $w_n > 0$ に対応し，$u_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ だから密度関数が $\lambda e^{-\lambda w_1} \lambda e^{-\lambda w_2} \cdots \lambda e^{-\lambda w_n} 1_{\{w_1>0, w_2>0, \ldots, w_n>0\}}$ になることが分かる．即ち W_1, W_2, $\ldots$, W_n は i.i.d. で指数分布に従うことが分かる．これで (2) が示せた．

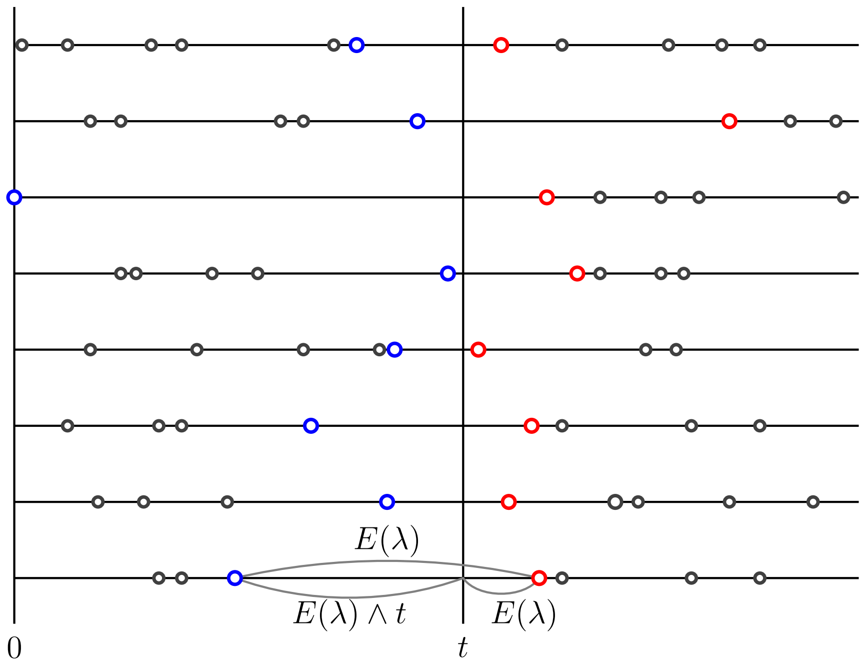
結果的には (7.11) の関係式は $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ の分布と関連していることを示唆しているが，そのことを直接使ったわけではない．　□

待ち時間のパラドックス

(N_t) の定義から

$$T_{N_t} \le t < T_{N_t+1} \tag{7.13}$$

が分かる．$B_t := t - T_{N_t}$ を事前待ち時間，$F_t := T_{N_t+1} - t$ を事後待ち時間と呼ぶ．t がある W_k の間にあるのだから B_t, F_t は W_k より短いように思える．ある程度時間がたつと，時間に関する対称性が表れてくるので，B_t, F_t の平均は W_k の平均の半分 $\frac{1}{2\lambda}$ ではないかと予想される．これが正しくないことを示そう．むしろ B_t, F_t は W_k と同じ分布と考えたほうが正しいといえる．ただし，二つの分布は t に依存するので，正確には $t \to \infty$ の極限で考える必要がある．この結果は直観に反するように思われるのでパラドックスと呼ばれるが，数学的には何の矛盾もない．



事前待ち時間と事後待ち時間

命題 7.4. B_t と F_t は独立で，F_t は W_k と同じパラメーター λ の指数分布を持ち，B_t は

$$\begin{cases} P(B_t \le x) = 1 - e^{-\lambda x}, & x < t, \\ P(B_t = t) = e^{-\lambda t}. \end{cases} \tag{7.14}$$

を満たす．

証明

$$G_{B_t,F_t}(x_1, x_2) = P(B_t \le x_1,\, F_t \le x_2)$$

とおく．$B_t \le t$ は必ず成り立つので，$x_1 < t$ と $x_1 \ge t$ で場合分けする．まず $x_1 < t$, $x_2 > 0$ のとき

$$\begin{aligned} \{B_t \le x_1\} &= \{t - x_1 \le T_{N_t} \le t\} = \{N(t - x_1, t] \ge 1\} \\ \{F_t \le x_2\} &= \{t < T_{N_t+1} \le t + x_2\} = \{N(t, t + x_2] \ge 1\} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} G_{B_t,F_t}(x_1, x_2) &= P(N(t - x_1, t] \ge 1,\, N(t, t + x_2] \ge 1) \\ &= P(N(t - x_1, t] \ge 1) P(N(t, t + x_2] \ge 1) \\ &= (1 - e^{-\lambda x_1})(1 - e^{-\lambda x_2}). \end{aligned}$$

同様に $x_1 \geq t$, $x_2 > 0$ のとき，$B_t \leq t$ であるから

$$G_{B_t,F_t}(x_1,x_2) = P(B_t \leq x_1, F_t \leq x_2) = P(F_t \leq x_2) = 1 - e^{-\lambda x_2}.$$

両者から

$$\begin{aligned} G_{B_t,F_t}(x_1,x_2) &= P(N(t-x_1,t] \geq 1,\, N(t,t+x_2] \geq 1) \\ &= P(N(t-x_1,t] \geq 1)P(N(t,t+x_2] \geq 1) \\ &= \{1_{[0,t)}(x_1)(1-e^{-\lambda x_1}) + 1_{[t,\infty))}(x_1)\}(1-e^{-\lambda x_2}). \end{aligned}$$

となる．これで独立性も分かる．また

$$P(B_t < t) = \lim_{x_1 \uparrow t} P(B_t \leq x_1) = \lim_{x_1 \uparrow t}(1-e^{-\lambda x_1}) = 1 - e^{-\lambda t}$$

であるから

$$P(B_t = t) = P(B_t \leq t) - P(B_t < t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

となるので，この部分は退化していることが分かる． □

更に $t \to \infty$ のとき

$$P(B_t \leq x_1) \to 1 - e^{-\lambda x_1}$$

であるから，W_k と同じパラメーター λ の指数分布に収束することが分かる．

到着時間の分布

平均関数 $\mu(t)$ を持つ一様でない Poisson 過程 N は，標準 Poisson 過程 $\tilde{N}$ を用いて $N_t = \tilde{N}_{\mu(t)}$ と表現できる．$\tilde{T}_n$ を $\tilde{N}$ の更新時刻とすると，パラメーター 1 の指数分布を持つ待ち時間列 $\tilde{W}$ が取れて

$$\tilde{T}_n = \tilde{W}_1 + \tilde{W}_2 + \cdots + \tilde{W}_n, \quad n \geq 1$$

と表せ，N の更新時間は

$$T_n = \mu^{-1}(\tilde{T}_n)$$

と表される．

命題 7.5. Poisson 過程 N に対して，μ は連続な正の強度関数 λ を持つとする．このとき次が成り立つ．

(1) 更新時刻 $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ の結合分布は次の密度関数を持つ:

$$f_{T_1,\ldots,T_n}(t_1,\ldots,t_n) = e^{-\mu(t_n)} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i) 1_{\{0<t_1<\cdots<t_n\}}. \tag{7.15}$$

(2) 待ち時間列 $(W_1,\dots,W_n)$ の結合分布は次の密度関数を持つ:

$$\text{(7.16)}\quad f_{W_1,\dots,W_n}(w_1,\dots,w_n)=e^{-\mu(w_1+\cdots+w_n)}\prod_{i=1}^{n}\lambda(w_1+\cdots+w_i),\quad w_i\ge 0.$$

証明 仮定から μ は微分可能で $\mu'(t)=\lambda(t)$ が成り立つ．また $(\tilde{W}_k)$ と $(\tilde{T}_k)$ の対応は

$$(w_1,\dots,w_n)\overset{S}{\to}(w_1,w_1+w_2,\dots,w_1+\cdots+w_n)$$
$$(t_1,\dots,t_n)\overset{S^{-1}}{\to}(t_1,t_2-t_1,\dots,t_n-t_{n-1})$$

で与えられ $\det(\frac{\partial S}{\partial w})=1$ である．変数変換の公式から $0<t_1<\cdots<t_n$ に対し

$$\begin{aligned}f_{\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n}(t_1,\dots,t_n)&=f_{\tilde{W}_1,\dots,\tilde{W}_n}(t_1,t_2-t_1,\dots,t_n-t_{n-1})\\&=e^{-t_1}e^{-(t_2-t_1)}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})}=e^{-t_n}.\end{aligned}$$

μ^{-1} が存在して連続であるから

$$\begin{aligned}P(T_1\le t_1,\dots,T_n\le t_n)&=P(\mu^{-1}(\tilde{T}_1)\le t_1,\dots,\mu^{-1}(\tilde{T}_n)\le t_n)\\&=P(\tilde{T}_1\le\mu(t_1),\dots,\tilde{T}_n\le\mu(t_n))\\&=\int_0^{\mu(t_1)}\cdots\int_0^{\mu(t_n)}f_{\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_n}(s_1,\dots,s_n)\,ds_1\cdots ds_n\\&=\int_0^{\mu(t_1)}\cdots\int_0^{\mu(t_n)}e^{-s_n}1_{\{s_1<s_2<\cdots<s_n\}}\,ds_1\cdots ds_n.\end{aligned}$$

ここで変数 $t_1,\dots,t_n$ で微分して $\mu'(t_i)=\lambda(t_i)$ を使えば (7.15) を得る．

(2) は変換 S を使えば

$$f_{W_1,\dots,W_n}(w_1,\dots,w_n)=f_{T_1,\dots,T_n}(w_1,w_1+w_2,\dots,w_1+\cdots+w_n)$$

であることが分かるので代入すればよい． □

8. 順序統計量

i.i.d. 確率変数列 X_1, $X_2,\dots,X_n$ に対し，それを小さいものから並べたもの

$$\text{(8.1)}\qquad X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$$

を順序統計量と呼ぶ．

命題 8.1． X_k が密度関数 f を持つとき $(X_{(1)},X_{(2)},\dots,X_{(n)})$ の分布は次の密度関数を持つ．

$$\text{(8.2)}\qquad f_{X_{(1)},X_{(2)},\dots,X_{(n)}}=n!\prod_{k=1}^{n}f(x_k)1_{\{x_1<x_2<\cdots<x_n\}}$$

証明　$\mathbb{R}^n$ の部分集合 C_n を

$$C_n := \{(x_1, \ldots, x_n);\, x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$$

とおく．更に X_k が密度を持つから $X_k = X_l$ となる事象は確率 0 なので

$$\tilde{\Omega} = \{X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}\} = \{X_k \neq X_l \text{ for } 1 \leq k < l \leq n\}$$

は $P(\tilde{\Omega}) = 1$ を満たす．Π_n を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換 π の全体とする．$x_1 < \cdots < x_n$ に対し

$$P(X_{(1)} \leq x_1, \ldots, X_{(n)} \leq x_n) = P(\bigcup_{\pi \in \Pi_n} A_\pi)$$

が成り立つ．但し

$$A_\pi = \{X_{\pi(k)} = X_{(k)},\, k = 1, \ldots, n\} \cap \tilde{\Omega} \cap \{X_{\pi(1)} \leq x_1, \ldots, X_{\pi(n)} \leq x_n\}.$$

A_π は互いに素なので

$$P(\bigcup_{\pi \in \Pi_n} A_\pi) = \sum_{\pi \in \Pi_n} P(A_\pi).$$

また X_k は i.i.d. なので対称性から

$$\begin{aligned}
P(A_\pi) &= P((X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(n)}) \in C_n \cap (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) \\
&= P((X_1, \ldots, X_n) \in C_n \cap (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{k=1}^{n} f(y_k) 1_{\{y_1 < \cdots < y_n\}} dy_1 \cdots dy_n.
\end{aligned}$$

Π_n は $n!$ 個の元が存在するから

$$P(X_{(1)} \leq x_1, \ldots, X_{(n)} \leq x_n) = n! \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{k=1}^{n} f(y_k) 1_{\{y_1 < \cdots < y_n\}} dy_1 \cdots dy_n.$$

これから $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ の分布の密度関数が (8.2) で与えられることが分かる． □

定理 8.2. N を強度関数 λ を持つ Poisson 過程とする．$N_t = n$ での条件の下で $(T_1, \ldots, T_n)$ の分布は密度関数 $\frac{\lambda(x)}{\mu(t)}$ を持つ i.i.d. 列 $X_1, \ldots, X_n$ の順序統計量 $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ の分布に等しい:

$$(T_1, \ldots, T_n | N_t = n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}) \tag{8.3}$$

言い換えれば左辺の条件付きの分布は次の密度を持つ:

$$\frac{n!}{\mu(t)^n} \prod_{k=1}^{n} \lambda(x_k) 1_{\{0 < x_1 < \cdots < x_n < t\}} \tag{8.4}$$

証明　次の極限を求める．

$$\lim_{h_1\downarrow 0,\dots,h_n\downarrow 0} \frac{P(T_1\in(t_1,t_1+h_1],\dots,T_n\in(t_n,t_n+h_n]|N_t=n)}{h_1\cdots h_n}.$$

$0<t_1<\cdots<t_n<t$ なので h_k を十分小さくとれば $(t_k,t_k+h_k]\subseteq[0,t]$ で互いに素としてよい．

$$\begin{aligned}&\{T_1\in(t_1,t_1+h_1],\dots,T_n\in(t_n,t_n+h_n],N_t=n\}\\ &\quad=\{N(0,t_1]=0,N(t_1,t_1+h_1]=1,N(t_1+h_1,t_2]=0,N(t_2,t_2+h_2]=1,\dots,\\ &\qquad\qquad N(t_{n-1}+h_{n-1},t_n]=0,N(t_n,t_n+h_n]=1,N(t_n+h_n,t]=0\}\end{aligned}$$

であるから，その確率は独立性から

$$\begin{aligned}&P(T_1\in(t_1,t_1+h_1],\dots,T_n\in(t_n,t_n+h_n],N_t=n)\\ &\quad=P(N(0,t_1]=0)P(N(t_1,t_1+h_1]=1)P(N(t_1+h_1,t_2]=0)P(N(t_2,t_2+h_2]=1)\cdots\\ &\qquad P(N(t_{n-1}+h_{n-1},t_n]=0)P(N(t_n,t_n+h_n]=1)P(N(t_n+h_n,t]=0)\\ &\quad=e^{-\mu(t_1)}[\mu(t_1,t_1+h_1]e^{-\mu(t_1,t_1+h_1]}]e^{-\mu(t_1+h_1,t_2]}[\mu(t_2,t_1+h_1]e^{-\mu(t_2,t_2+h_2]}]\cdots\\ &\qquad e^{-\mu(t_{n-1}+h_{n-1},t_n]}[\mu(t_n,t_n+h_n]e^{-\mu(t_n,t_n+h_n]}]e^{-\mu(t_n+h_n,t]}\\ &\quad=e^{-\mu(t)}\mu(t_1,t_1+h_1]\cdots\mu(t_n,t_n+h_n].\end{aligned}$$

両辺を $P(N_t=n)=e^{-\mu(t)}\dfrac{\mu(t)^n}{n!}$ と $h_1\cdots h_n$ で割って

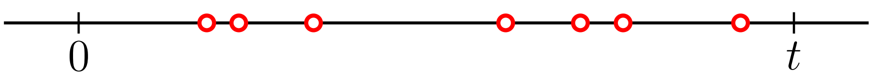
$$\begin{aligned}&\frac{P(T_1\in(t_1,t_1+h_1],\dots,T_n\in(t_n,t_n+h_n]|N_t=n)}{h_1\cdots h_n}\\ &=\frac{n!}{\mu(t)^n}\frac{\mu(t_1,t_1+h_1]}{h_1}\cdots\frac{\mu(t_n,t_n+h_n]}{h_n}\\ &\to\frac{n!}{\mu(t)^n}\lambda(t_1)\cdots\lambda(t_n),\qquad \text{as } h_k\downarrow 0,\quad k=1,\dots,n.\end{aligned}$$

これが求める結果である．　□

例 8.1. 強度 $\lambda>0$ の Poisson 過程の場合は，更新時間 T_k の $N_t=n$ の下での条件付分布の密度関数は

(8.5) $$f_{T_1,\dots,T_n}(t_1,\dots,t_n)=n!t^{-n},\quad 0<t_1<\cdots<t_n<t$$

である．命題 8.1 の結果から，これは $(0,t)$ の一様分布の順序統計量 $U_{(1)},\dots,U_{(n)}$ の分布に等しいことが分かる．この分布は強度 λ に依存していないことに注意しよう．



個数で条件付けた場合

例 8.2. $\mathbb{R}^n$ の対称関数 g は，任意の置換 π に対し

$$g(x_1, \dots, x_n) = g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \tag{8.6}$$

を満たす．例えば

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} x_k$$

などがその例である．

定理 8.2 の仮定の下で，

$$(g(T_1, \dots, T_n)|N_t = n) \stackrel{d}{=} g(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) = g(X_1, \dots, X_n).$$

従って，任意の可測関数 f に対して

$$(\sum_{k=1}^{n} f(T_k)|N_t = n) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{n} f(X_{(k)}) = \sum_{k=1}^{n} f(X_k)$$

例 8.3. (衝撃ノイズ) 電子到着時刻が T_k で表され，時間とともに放電していくモデルを考える．この場合放電は減少関数 $f(t)$ で表される．但し $t < 0$ では $f(t) = 0$ である．このとき時刻 t での電気量は

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} f(t - T_k) \tag{8.7}$$

で表される．典型的な例は $f(t) = e^{-\theta t} 1_{[0,\infty)}(t)$, $\theta > 0$ である．

これを一般化したものが

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k f(t - T_k) \tag{8.8}$$

で

- (X_k) は (T_k) と独立
- $t < 0$ では $f(t) = 0$

を仮定する．$f = 1_{[0,\infty)}$ と取ると Cramér-Lundberg モデルになる．遅れのある請求処理の場合は

- $t < 0$ では $f(t) = 0$.
- $f(t)$ は非減少.
- $\lim_{t \to \infty} f(t) = 1$.

を仮定する．

Y_k を時刻 T_k での投資とすると，時刻とともに利率 r で増えていくので $t \geq T_k$ で $e^{r(t-T_k)}Y_k$ と変化する．従って時刻 t での資産は

$$S_t^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_t} e^{r(t-T_k)}Y_k, \quad t \geq 0. \tag{8.9}$$

逆に t までの時刻 T_k で Y_k を受け取るときの，現在時点 $t=0$ での価値は，割引率を掛けて

$$S_t^{(2)} = \sum_{k=1}^{N_t} e^{-rT_k}Y_k, \quad t \geq 0. \tag{8.10}$$

で表される．

命題 8.3. N を到着時間列が (T_k) で表される，Poisson 過程とし，(X_k) は N と独立な i.i.d. 列とする．$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を可測関数とすると次の等式が成り立つ．

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} g(T_k, X_k) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{N_t} g(tU_k, X_k) \tag{8.11}$$

ここで (U_k) は (X_k), (T_k) とは独立な $(0,1)$ 上の一様分布の i.i.d. 列である．

証明　定理 8.2 を使って

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} g(T_k, X_k) \leq x \,\middle|\, N_t = n\right) = P\left(\sum_{k=1}^{n} g(tU_{(k)}, X_k) \leq x\right)$$

が分かる．(X_k) の対称性を用いると

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{k=1}^{n} g(tU_{(k)}, X_k) \leq x\right) &= E\left[P\left(\sum_{k=1}^{n} g(tU_{(k)}, X_k) \leq x \,\middle|\, U_1, \dots, U_n\right)\right] \\
&= E\left[P\left(\sum_{k=1}^{n} g(tU_{(k)}, X_{\pi(k)}) \leq x \,\middle|\, U_1, \dots, U_n\right)\right].
\end{aligned}$$

ここで π は任意の置換である．特に π を $U_{(k)} = U_{\pi(k)}$ となるようにとる．この π のとり方は U_k に依存するが，X_k が独立なので次と等しくなる．

$$\begin{aligned}
&E\left[P\left(\sum_{k=1}^{n} g(tU_{(k)}, X_{\pi(k)}) \leq x \,\middle|\, U_1, \dots, U_n\right)\right] \\
&\quad = E\left[P\left(\sum_{k=1}^{n} g(tU_{\pi(k)}, X_{\pi(k)}) \leq x \,\middle|\, U_1, \dots, U_n\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\sum_{k=1}^{n} g(tU_k, X_k) \le x\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{N_t} g(tU_k, X_k) \le x \;\middle|\; N_t = n\right).
\end{aligned}
$$

あとは n で足し合わせて

$$
\begin{aligned}
P(S_t \le x) &= E[P(S_t \le x|N_t)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n) P\left(\sum_{k=1}^{n} g(T_k, X_k) \le x \;\middle|\; N_t = n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n) P\left(\sum_{k=1}^{N_t} g(tU_k, X_k) \le x \;\middle|\; N_t = n\right) \\
&= P\left(\sum_{k=1}^{N_t} g(tU_k, X_k) \le x\right).
\end{aligned}
$$

これは (8.11) を意味する． □

例 8.4. (例 8.3 の続き) 次の割引和を考えた:

$$
S_t = \sum_{k=1}^{N_t} e^{-rT_k} X_k. \tag{8.12}
$$

命題 8.3 を使うと

$$
S_t \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{N_t} e^{-rtU_k} X_k \tag{8.13}
$$

が成り立つ．ここで U_k は X_k, N_t とは独立な一様分布である．$N_t = n$ で条件づけると

$$
\begin{aligned}
E[S_t|N_t = n] &= E\left[\sum_{k=1}^{N_t} e^{-rtU_k} X_k \;\middle|\; N_t = n\right] \\
&= E\left[\sum_{k=1}^{n} e^{-rtU_k} X_k \;\middle|\; N_t = n\right] \\
&= nE[e^{-rtU_1} X_1] \\
&= nE[e^{-rtU_1}]E[X_1] \\
&= n\int_0^1 e^{-rtu}\, du E[X_1] \\
&= n[-\frac{1}{rt} e^{-rtu}]_0^1 E[X_1] \\
&= n\frac{1}{rt}(1 - e^{-rt})E[X_1].
\end{aligned}
$$

これは即ち

$$E[S_t|N_t] = N_t E[e^{-rtU_1}X_1] = N_t \frac{1}{rt}(1-e^{-rt})E[X_1] \tag{8.14}$$

を意味する．平均をとれば

$$\begin{aligned} E[S_t] &= E[E[S_t|N_t]] = E[N_t]\frac{1}{rt}(1-e^{-rt})E[X_1] = \lambda t \frac{1}{rt}(1-e^{-rt})E[X_1] \\ &= \frac{\lambda}{r}(1-e^{-rt})E[X_1] \end{aligned}$$

となって

$$E[S_t] = \frac{\lambda}{r}(1-e^{-rt})E[X_1] \tag{8.15}$$

が得られる．Cramér-Lundberg モデルは $r=0$ の場合で $E[S_t] = \lambda t E[X_1]$ である．

S_t の分散も計算することが出来る．まず，$N_t = n$ で条件づけた分散を計算する．

$$\begin{aligned} V(S_t|N_t=n) &= E[(S_t - E[S_t|N_t=n])^2|N_t=n] \\ &= E\left[\left(\sum_{k=1}^n e^{-rtU_k}X_k - nE[e^{-rtU_1}X_1]\right)^2\right] \quad (\because\ \text{命題 } 8.3) \\ &= E\left[\left\{\sum_{k=1}^n (e^{-rtU_k}X_k - E[e^{-rtU_k}X_k])\right\}^2\right] \\ &= nV(e^{-rtU_1}X_1). \end{aligned}$$

これは

$$V(S_t|N_t) = N_t V(e^{-rtU_1}X_1) \tag{8.16}$$

を意味する．ここで命題 3.1 を用いて S_t の分散を計算すると

$$\begin{aligned} V(S_t) &= E[V(S_t|N_t)] + V(E[S_t|N_t]) \\ &= E[N_t V(e^{-rtU_1}X_1)] + V(N_t E[e^{rtU_1}X_1]) \\ &= E[N_t]V(e^{-rtU_1}X_1) + V(N_t)E[e^{rtU_1}X_1]^2 \\ &= \lambda t(V(e^{-rtU_1}X_1) + E[e^{rtU_1}X_1]^2) \\ &= \lambda t E[e^{-2rtU_1}X_1^2] \\ &= \lambda t \int_0^1 e^{-2rtu}\,du\, E[X_1^2] \\ &= \lambda t \frac{1}{2rt}(1-e^{-2rt})E[X_1^2] \\ &= \frac{\lambda}{2r}(1-e^{-2rt})E[X_1^2] \end{aligned}$$

即ち

$$V(S_t) = \frac{\lambda}{2r}(1 - e^{-2rt})E[X_1^2] \tag{8.17}$$

が示せた．Cramér-Lundberg モデルは $r = 0$ の場合で $V(S_t) = \lambda t E[X_1^2]$ が分かる．

以上で利率を考慮しても計算が可能であることが分かった． □

第 4 章

更新理論

この章では，更新理論について述べる．

9. 更新過程

$\{W_k\}$ を正値 (i.e., $W_k > 0$ a.s.) の i.i.d. 確率変数列とし，その部分和を

$$T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \tag{9.1}$$

で定める．W_k は到着時間間隔または待ち時間，T_n は n 回目の更新（または再生）時刻である．この T_n を**更新列**と呼ぶ．便宜上 $T_0 = 0$ としておく．

$$\mu = E[W_k] \in (0, \infty] \tag{9.2}$$

は平均再帰時間と呼ばれる．

$$N_t = \sharp\{k = 1, 2, \ldots ; T_k \leq t\} = \max\{k = 1, 2, \ldots ; T_k \leq t\} \tag{9.3}$$

は時刻 t までに起こった回数であり，(N_t) を**更新過程**と呼ぶ.

$$\{T_n \leq t\} = \{N_t \geq n\} \tag{9.4}$$

が成り立つ．但し，

$$\{T_n < t\} = \{N_t > n\}$$

は成り立たないので注意を要する．実際 $T_n < t < T_{n+1}$ のとき，$N_t = n$ なので，左辺に属するが，右辺には属さない．次の関係式も後で使う．

$$T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1} \tag{9.5}$$

また 対数の強法則から $T_n \to \infty$ a.s. だから $N_t < \infty$ a.s. が成り立つ.

$$N(a, b] = N_b - N_a \tag{9.6}$$

は時間 $(a,b]$ で起こった回数を表している．W_k が指数分布のとき，N_t は Poisson 過程になるのであった．従って，Poisson 過程は，更新過程の特別なものである．

定理 9.1. 次が成り立つ．

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\frac{1}{\mu}\quad \text{a.s.} \tag{9.7}$$

$\mu=\infty$ のときは，右辺は 0 とみなす．

この証明は次のことに注意すれば対数の強法則から従う．

命題 9.2. $\{Z_n\}$ を確率変数列で $n\to\infty$ のとき $Z_n\to Z$ a.s. が成り立っているとする．また $\{M(t)\}_{t\geq 0}$ を非負整数値を取る確率過程で $t\to\infty$ のとき $M(t)\to\infty$ a.s. が成り立っているとする．このとき $t\to\infty$ のとき

$$Z_{M(t)}\to Z \text{ a.s.}$$

が成り立つ．

証明　次のようにおく．

$$\Omega_1=\{\omega\in\Omega; M(t,\omega)\to\infty\},\quad \Omega_2=\{\omega\in\Omega; Z_n(\omega)\to Z(\omega)\}.$$

すると $P(\Omega_1\cap\Omega_2)=1$ で $\Omega_1\cap\Omega_2$ 上で

$$Z_{M(t)}\to Z$$

が成り立つ． □

さて，定理の証明に戻ろう．

定理 9.1 の証明　(9.5) から

$$T_{N_t}\leq t<T_{N_t+1}.$$

N_t で割って

$$\frac{T_{N_t}}{N_t}\leq\frac{t}{N_t}<\frac{T_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}. \tag{9.8}$$

ところで大数の強法則から a.s. で

$$\frac{T_n}{n}\to\mu$$

また $N_t\to\infty$ a.s. なので命題 9.2 を用いて

$$\frac{T_{N_t}}{N_t}\to\mu.$$

これと (9.8) を組み合わせて求める結果が得られる． □

N_t の期待値を

$$U(t) = E[N_t] \tag{9.9}$$

とおく．$U(t)$ が有限であること後で示すが，それに関わりなく Fatou の補題から

$$\frac{1}{\mu} = E\left[\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}\right] \le \liminf_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} \tag{9.10}$$

が成り立つ．逆向きの評価をこれから示していく．

(9.9) の別の表現を与えると

$$U(t) = E[N_t] = \sum_{n=1}^{\infty} P(N_t \ge n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n \le t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \tag{9.11}$$

となる．F は W_k の（右連続）分布関数で，F^{n*} は F の n 回の合成積を表す．また F^{n*} は n に関して単調減少である．

$$F^{n*}(t) \ge F^{(n+1)*}(t). \tag{9.12}$$

これは $\{T_{n+1} \le t\} \subset \{T_n \le t\}$ から従う．

ここでもう一つ後で必要になる Wald の等式を示しておく．

定理 9.3. (**Wald の等式**)　$\{X_k\}$ を i.i.d. 列で $E[|X_k|] < \infty$ を満たすとする．部分和を $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ で定義する．N を停止時刻で $E[N] < \infty$ も仮定すると

$$E[S_N] = E[X_1]E[N] \tag{9.13}$$

が成り立つ．

証明　最初に $X_k \ge 0$ a.s. の場合を示す．このときは積分の収束性を気にしないで Fubini の定理が使える．

$$\begin{aligned} E[S_N] &= \sum_{n=1}^{\infty} E[S_n 1_{\{N=n\}}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} E[X_m 1_{\{N=n\}}] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E[X_m 1_{\{N=n\}}] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} E[X_m 1_{\{N\ge m\}}]. \end{aligned}$$

ここで $\{N \geq m\} = \{N \leq m-1\}^c \in \mathscr{F}_{m-1}$ が X_m と独立であることに注意すれば

$$\sum_{m=1}^{\infty} E[X_m 1_{\{N \geq m\}}] = \sum_{m=1}^{\infty} E[X_m] E[1_{\{N \geq m\}}] = E[X_1] \sum_{m=1}^{\infty} E[1_{\{N \geq m\}}] = E[X_1] E[N].$$

一般の場合は $|X_k|$ に対して上の議論を使えば

$$\infty > \sum_{m=1}^{\infty} E[|X_m|] P(N \geq m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E[|X_m| 1_{\{N=n\}}].$$

これで可積分性が示せたから Fubini の定理で和の順番が交換できて

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E[X_m 1_{\{N=n\}}] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} E[X_m 1_{\{N=n\}}] = \sum_{n=1}^{\infty} E[S_n 1_{\{N=n\}}].$$

左辺は $\{N \geq m\} \in \mathscr{F}_{m-1}$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E[X_m 1_{\{N=n\}}] &= \sum_{m=1}^{\infty} E[X_m 1_{\{N \geq m\}}] = \sum_{m=1}^{\infty} E[X_m] E[1_{\{N \geq m\}}] \\ &= E[X_1] \sum_{m=1}^{\infty} E[1_{\{N \geq m\}}] = E[X_1] E[N]\end{aligned}$$

が成り立つので，求める結果を得る． □

以上の準備の下で次の定理を得る．

定理 9.4. 任意の $t \geq 0$ に対し $E[N_t] < \infty$ で次が成り立つ．

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E[N_t]}{t} = \frac{1}{\mu}. \tag{9.14}$$

$\mu = \infty$ のときは，右辺は 0 とみなす．

証明　最初は t を固定して考える．次のことに注意しよう．

$$F^{n*}(t) = P(T_n \leq t) \leq P(W_1 \leq t, W_2 \leq t, \ldots, W_n \leq t) = P(W_1 \leq t)^n = F(t)^n \tag{9.15}$$

また大数の強法則から $n \to \infty$ のとき $T_n \to \infty$ a.s. が成り立つ．従って

$$F^{n*}(t) = P(T_n \leq t) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

よって $r \in \mathbb{N}$ が存在して $F^{r*}(t) < 1$ とできる．これらを使って

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{r} F^{(mr+j)*}(t) \\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{r} F^{mr*}(t) \quad (\because\ (9.12)\ ) \\
&= r\sum_{m=0}^{\infty} F^{mr*}(t) \\
&\leq r\sum_{m=0}^{\infty} F^{r*}(t)^m \quad (\because\ (9.15)\ ) \\
&= \frac{r}{1-F^{r*}(t)} < \infty.
\end{aligned}
$$

U が右連続単調非減少は明らか．

さて (9.14) を示すには

$$
\limsup_{t\to\infty} \frac{E[N_t]}{t} \leq \frac{1}{\mu} \tag{9.16}
$$

を示せばよい．まず W_k が有界のときを示す．$P(W_k \leq c) = 1$ とする．

Wald の等式を使うのに，$N_t + 1$ が停止時刻であることを示そう．

$$
\{N_t + 1 \leq k\} = \{N_t \leq k-1\} = \{N_t \geq k\}^c = \{T_k \leq t\}^c \in \mathscr{F}_k.
$$

これで停止時刻であることが分かったので Wald の公式を使って

$$
E[T_{N_t+1}] = E[W_1](E[N_t]+1).
$$

ところで

$$
E[T_{N_t+1}] = E[T_{N_t} + W_{N_t+1}] \leq t + c \quad (\because\ (9.5)\ )
$$

よって

$$
E[N_t] = \frac{E[T_{N_t+1}]}{E[W_1]} - 1 \leq \frac{t+c}{E[W_1]} - 1.
$$

次に一般の場合は $\tilde{W}_k = W_k \wedge c$ として，$\tilde{T}_n$, $\tilde{N}_t$ を $\tilde{W}_k$ に対して定めると $N_t \leq \tilde{N}_t$ なので上の結果を使って

$$
E[N_t] \leq E[\tilde{N}_t] \leq \frac{t+c}{E[W_1 \wedge c]} - 1.
$$

これから

$$
\limsup_{t\to\infty} \frac{E[N_t]}{t} \leq \frac{1}{E[W_1 \wedge c]}.
$$

ここで $c \to \infty$ とすれば (9.16) が得られる． □

10.　更新方程式

次の形の方程式

$$Z = z + Z * F \tag{10.1}$$

を**更新方程式**と呼ぶ．z, F が既知で，Z が未知関数である．$*$ は合成積で，(10.1) はもう少し詳しく書くと z, Z は $t<0$ では 0 で

$$Z(t) = z(t) + \int_{[0,t]} Z(t-s)dF(s), \quad t \geq 0 \tag{10.2}$$

が成り立つ．関数はすべて有界区間で有界変動で，右連続を仮定しておく．F は分布関数で $F(0)=0$ を仮定している．実際に使うときは F は前節第 9 節の W_1 の分布である．ここでは関数は $[0,\infty)$ でのみ考えているわけだが，必要なら $t<0$ では z や Z はすべて 0 であると思ってもよい．その方が合成積を考えるときは合理的であろう．

解の存在と一意性は基本的な問題である．形式的な計算で解の形を予想して見よう．(10.1) を Fourier 変換すると (Fourier 変換を $\hat{f}$ で表す)

$$\hat{Z} = \hat{z} + \hat{Z}\hat{F}$$

だから

$$\hat{Z} = \frac{\hat{z}}{1-\hat{F}} = \hat{z}\sum_{k=0}^{\infty}\hat{F}^k = \sum_{k=0}^{\infty}\hat{F}^k\hat{z}.$$

今度は Fourier 逆変換をして

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty} F^{k*} * z = z + \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*} * z$$

と形式的に表現できる．(9.11) から $U = \sum_{k=1}^{\infty} F^{k*}$ であったから U を使って (10.1) の解 Z が表現できることが予想できる．それを定理の形で述べると次のようになる．

定理 10.1. z が有界区間で有界な関数ならば，

$$Z(t) = z(t) + \int_{[0,t]} z(t-s)\,dU(s), \quad t \geq 0 \tag{10.3}$$

は (10.1) の解であり，$t<0$ で 0 で，有界区間で有界な解はこれ以外には存在しない．

証明　まず

$$Z(t) = z(t) + \int_{[0,t]} z(t-s)dU(s) = z(t) + z * \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$$

とおくと，

$$z + Z * F = z + (z + z * \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}) * F = z + z * \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*} = Z$$

となり，Z は (10.2) の解であることが分かる．一意性は，もし二つあれば，その差 W は $W = F * W$ を満たす．従ってすべての n に対し $W = F^{n*} * W$ となる．ところが $n \to \infty$ のとき $F^{n*}(t) \to 0$ となるので $W = 0$ が従う． □

更新方程式はいろいろは応用がある．それはまた後で議論することにして，ここでは一つだけ $z(t) = 1 - F(t)$, $Z(t) = 1$ の例を挙げる．その前に，関数 1 について注意をしておこう．我々は $[0, \infty)$ での関数を考えており，$t < 0$ では 0 として扱っている．従って 1 も本来は $1_{[0,\infty)}$ と記したほうが誤解がない．合成積は

$$G * 1(t) = \int_{[0,\infty)} G(t-s) d1_{[0,\infty)}(s), \quad t \geq 0$$

であるが，$d1_{[0,\infty)}(s)$ は Heviside 関数 $1_{[0,\infty)}$ の微分なので Dirac 測度 δ_0 を意味する．従って上の式は $G * 1 = G$ を意味する．これは 1 が合成積に関して単位元となることを意味している．そういう意味では 1 という記法は不自然ではないであろう．しかしあくまで関数としては $1_{[0,\infty)}$ であることは留意しておいたほうがよい．G の方も $t < 0$ では $G(t) = 0$ としているが，一般に $G(0) = 0$ は仮定しない．従って dG も点 0 に $G(0) - G(0-) = G(0)$ の点測度を持つ．

点測度を持つ場合が多少気になるであろうから，合成積の可換性も確認しておこう．

$$\begin{aligned}
G * K(t) &= \int_{[0,t]} G(t-s)\, dK(s) \\
&= \int_{[0,t]} dK(s) \int_{[0,t-s]} dG(u) \\
&= \int_{[0,t]} dG(u) \int_{[0,t-u]} dK(s) \\
&= \int_{[0,t]} K(t-u)\, dG(u) \\
&= K * G(t)
\end{aligned}$$

となる．途中で $G(0-) = K(0-) = 0$ を使っていることに留意しよう．

合成積 $*$ を積と見れば，有界区間で有界変動な右連続関数全体が合成積に関して可換半群を成していることが分かる．1 が単位元であるが，逆元が常に存在するわけではないので，群にはならない．逆元が存在する場合もあり，例 10.1 の後で注意するが，$1 - F$ の逆元は $1 + U$ になっている．このように代数的に見れば，多少見通しがよくなる．例えば

$p_n(t) = \dfrac{t^n}{n!}$ とすると

$$
\begin{aligned}
p_n * p_m(t) &= \int_0^t \frac{1}{n!}(t-s)^n \frac{1}{(m-1)!} s^{m-1}\, ds \quad (s = ut,\ ds = tdu) \\
&= \frac{1}{n!(m-1)!} \int_0^1 (t-ut)^n (ut)^{m-1} t\, du \\
&= \frac{1}{n!(m-1)!} t^{n+m} \int_0^1 (1-u)^n u^{m-1} t\, du \\
&= \frac{1}{n!(m-1)!} t^{n+m} B(n+1, m) \\
&= \frac{1}{n!(m-1)!} t^{n+m} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m+1)} \\
&= \frac{1}{n!(m-1)!} t^{n+m} \frac{n!(m-1)!}{(n+m)!} \\
&= \frac{t^{n+m}}{(n+m)!} \\
&= p_{n+m}(t)
\end{aligned}
$$

となるから，p_n が多項式のような働きをする．

とりあえず，簡単な例から見ていくことにする．

例 10.1. $z(t) = 1 - F(t)$ の場合を考える．そこで

$$
1 - F(t) + \int_{[0,t]} dF(s) = 1 - F(t) + F(t) = 1 \tag{10.4}
$$

に注意すると，これは (10.2) で $z(t) = 1 - F(t)$, $Z = 1$ としたものである．解は (10.3) で与えられるから

$$
1 = z(t) + \int_{[0,t]} z(t-s)\, dU(s), \quad t \geq 0
$$

が成り立つことが分かる．書き換えれば

$$
1 = 1 - F(t) + \int_{[0,t]} (1 - F(t-s))\, dU(s) = 1 - F(t) + U(t) - \int_{[0,t]} F(t-s))\, dU(s)
$$

これから

$$
U(t) = F(t) + \int_{[0,t]} F(t-s)\, dU(s) = F(t) + \int_{[0,t]} U(t-s)\, dF(s) \tag{10.5}
$$

なので， $z = F$, $Z = U$ も解になっていることが分かる． □

上の (10.5) で $U = F + U * F$ の関係式を証明した．この関係式は次のように書き直すことができる．

$$(1 + U) * (1 - F) = 1. \tag{10.6}$$

実際これは $U = F + U * F$ を使えば

$$(1 + U) * (1 - F) = 1 - F + U - U * F = 1$$

から明らかである．これは合成積に対して $1 + U$ と $1 - F$ が互いに逆元になっていることを示している．従って更新方程式は形式的な計算が可能であることを示している．更新方程式は $(1 - F) * Z = z$ の形をしている．従って z が与えられたとき，逆元 $1 + U$ との合成積を取って $Z = (1 + U) * z$ が解となる．このように見れば，定理 10.1 は理解しやすいであろう．

更新方程式 (10.1) は，F は固定されており，z を与えたとき，解 Z を求めることが問題になる．定理 10.1 はその解が $Z = (1 + U) * z$ で与えられると言っており，数学的にはこれでけりが付いたことになるが，実際の問題では Z の具体的な形が必要になる．$(1 + U) * z$ は，対応 $z \mapsto Z = (1 + U) * z$ を与えるが，U が (9.11) で無限級数の形で与えられるので，計算は容易ではない．それに対して，その逆写像は $z = (1 - F) * Z$ で与えられ，こちらの方が計算はやや楽になる．従って，Z をいろいろ動かして，$(1 - F) * Z$ を計算して，これがちょうど最初に与えた z になれば，答えが求まったことになる．そうそうことがうまくいく訳ではないが，具体的な計算をいろいろやってみるのは，見通しを得るためにも有用である．実際 $t * (1 - F)$ や $(t^2) * (1 - F)$ の計算が後で出て来るが，$(1 - F) * Z$ の計算の例を蓄積している訳である．また，$Z = (1 + U) * z$ をぴったり求める必要はなく，漸近的な挙動が求まればよい．後で出てくる 定理 10.3 はその合理化を与える定理と考えることもできる．

定理 9.4 で $U(t) = E[N_t]$ の $t \to \infty$ での漸近挙動を調べたが，より精密な結果が Blackwell により得られている．分布 F の台が，ある δ が存在して $\{\delta, 2\delta, 3\delta, \dots\}$ に含まれているとき算術的であるという．これが成り立たないとき，非算術的という．

定理 10.2. F が非算術的であるとする．このとき $\lim_{t\to\infty} U(t, t+h] = \frac{h}{\mu}$ が成り立つ．

この証明はいくつか準備が必要である．その前にこの定理から導かれることを先に述べておく．それを述べるために，直接的 Riemann 積分可能について述べる．関数 z（話を明確にするため定義域は $[0, \infty)$ としておく）が直接的 Riemann 積分可能であることを次で定義する．任意の $h > 0$ に対し

$$\begin{aligned} u_k &= \sup_{x \in ((k-1)h, kh]} z(x), \\ l_k &= \inf_{x \in ((k-1)h, kh]} z(x) \end{aligned} \tag{10.7}$$

と定めるとき

$$I^h = h\sum_{k=1}^{\infty} u_k,$$
$$I_h = h\sum_{k=1}^{\infty} l_k$$

が絶対収束し，さらに $h \to 0$ のとき $I^h - I_h \to 0$ となることである．また I^h および I_h の極限で積分 $\int_0^\infty z(s)\,ds$ を定義する．

定理 10.3. F が非算術的であるとする．また z を直接 Riemann 積分可能とする．このとき Z を (10.1) の解とすると

$$\lim_{t\to\infty} Z(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty z(s)\,ds \tag{10.8}$$

が成り立つ．また z が単に $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$ を満たす場合は

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Z(t)}{t} = 0 \tag{10.9}$$

が成り立つ．

証明　固定した $h > 0$ に対し，z を次の形で与えられる関数とする．

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1_{((k-1)h,kh]}.$$

ここで $\sum_k |a_k| < \infty$ を仮定しておく．このとき $U(t,t+h]$ は $\frac{h}{\mu}$ に収束するから有界である．従って $M_h > 0$ が存在して $U(t,t+h] \le M_h$ とできる．よって有界収束定理から

$$\begin{aligned}
\int_{[0,t]} z(t-s)dU(s) &= \int_{[0,t]} \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1_{((k-1)h,kh]}(t-s)dU(s) \\
&= \int_{[0,t]} \sum_{k=1}^{\infty} a_k 1_{(t-kh,t-(k-1)h]}(s)dU(s) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k U(t-kh, t-(k-1)h] \\
&\to \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{h}{\mu}.
\end{aligned}$$

（有界収束定理は $\sum_k |a_k|\delta_k$ という有限測度に対して使えばよい．）

さて，一般の直接的 Riemann 積分可能な関数 z の場合，$h>0$ に対して，u_k, l_k を (10.7) で定めると

$$\begin{aligned}\int_{[0,t]}\sum_{k=1}^{\infty} l_k 1_{((k-1)h,kh]}(t-s)dU(s) &\le \int_{[0,t]} z(t-s)\,dU(s)\\ &\le \int_{[0,t]}\sum_{k=1}^{\infty} u_k 1_{((k-1)h,kh]}(t-s)dU(s).\end{aligned}$$

ここで $t\to\infty$ とすると

$$\frac{I_h}{\mu} \le \varliminf_{t\to\infty}\int_{[0,t]} z(t-s)\,dU(s) \le \varlimsup_{t\to\infty}\int_{[0,t]} z(t-s)\,dU(s) \le \frac{I^h}{\mu}$$

ここで $h\to 0$ とすると I^h と I_h が同じ極限に収束するから，求める結果を得る．

$\lim_{t\to\infty} z(t)=0$ だけを仮定する場合は，任意の $\varepsilon>0$ に対し $z=z_1+z_2$ で，z_1 は台がコンパクトで $\|z_2\|_\infty\le\varepsilon$ と分解できる．Z_1, Z_2 をそれぞれ z_1, z_2 に対する更新方程式の解とすると

$$\lim_{t\to\infty} Z_1(t) = \int_0^\infty z_1(t)\,dt$$

であり，

$$\begin{aligned}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{|Z_2(t)|}{t} &\le \varlimsup_{t\to\infty}\frac{|z_2(t)|}{t} + \varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{[0,t]}|z_2(t-s)|\,dU(s)\\ &\le \varepsilon\varlimsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{[0,t]}dU(s) = \frac{\varepsilon}{\mu}.\end{aligned}$$

よって

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{|Z(t)|}{t} \le \varlimsup_{t\to\infty}\frac{|Z_1(t)|}{t} + \varlimsup_{t\to\infty}\frac{|Z_2(t)|}{t} \le \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

ε は任意だから求める結果を得る． □

直接 Riemann 積分可能な関数の例を見ておく．

命題 10.4. 単調非増加で $f(x)\ge 0$ かつ $f(0)<\infty$ の関数が $\int_0^\infty f(x)\,dx<\infty$ を満たせば直接的 Riemann 積分可能である．

証明　h は単調非増加であるので $I^h=\sum_{k=0}^\infty hf(kh)$, $I_\delta=\sum_{k=0}^\infty hf((k+1)h)$ とおくと

$$I^h \ge \int_0^\infty f(x)\,dx \ge I_h = I^h - f(0)h$$

から

$$I^h - I_h = f(0)h \to 0 \quad \text{as } h \to 0.$$

即ち直接的 Riemann 積分可能が示せた. □

命題 10.5. $f(x) \geq 0$ の連続関数が直接的 Riemann 積分可能であるための必要十分条件は，ある $h > 0$ に対し， $I^h < \infty$ となることである.

証明　必要性は明らかだから十分性を示す．そこである $h > 0$ に対し， $I^h < \infty$ を仮定する．任意に $\delta > 0$ を取り，$N(\delta) = [\frac{\delta}{h}] + 1$ とおく.

二つの関数

$$f^\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \sup_{x \in ((k-1)\delta, k\delta]} f(x) \} 1_{((k-1)\delta, k\delta]}$$
$$f_\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \{ \inf_{x \in ((k-1)\delta, k\delta]} f(x) \} 1_{((k-1)\delta, k\delta]}$$

を考える．$\delta = h$ とした関数 f^h を基本に優関数を構成しよう．そこで

$$F^\delta(x) = \sum_{k=-N(\delta)}^{N(\delta)} f^h(x + kh)$$

と定める．$f^\delta \leq F^\delta$ を示そう．任意に $x \in ((l-1)\delta, l\delta]$ を取る．さてこの $[(l-1)\delta, l\delta]$ で f の最大値を取る点を y とする．一点とは限らないが，一つ選び出す．$x \in ((m-1)h, mh]$, $y \in ((n-1)h, nh]$ となる m, $n \in \mathbb{N}$ が一意的に定まる．$|n - m| \leq N(\delta)$ が成り立つ．実際 $|x - y| \leq \delta$ だから，$m \leq n$ とすると $(n-1)h - mh \leq \delta$ となるので

$$n - 1 - m \leq \frac{\delta}{h}$$

つまり

$$n - 1 - m \leq [\frac{\delta}{h}]$$

なので $n - m \leq N(\delta)$ が成り立つ．$n \leq m$ の場合も同様である．このことから

$$\{ \sup_{z \in ((l-1)\delta, l\delta]} f(z) \} 1_{((l-1)\delta, l\delta]}(x) \leq \{ \sup_{z \in ((l-1)h, h]} f(z) \} 1_{((n-1)\delta, n\delta]}(y) \leq F^\delta(x)$$

が成り立つ．よって F^δ が優関数となる，F^δ は積分可能である．従って任意の δ に対して $I^\delta < \infty$ が成立することが分かる．正値性から絶対収束は特に気にしなくてよい．さて，$\delta \to 0$ の状況を考えると $\delta < h$ のとき $N(\delta) = 1$ だから優関数 F^δ は共通である．また連続性から $f^\delta - f_\delta$ は各点で 0 に収束する．従って $I^\delta - I_\delta$ は Lebesgue の優関数定理から 0 に収束する．即ち直接的 Riemann 積分可能が示せた． □

定理 10.1 で一意性を示すのに $W = F * W$ から $W = 0$ を出した．これは F の分布が正に集中していることを使っている．この条件を外すと次のことが言える．以後，dF の台の代数的性質が関わるので，そのことを少し注意しておく．分布 F の台が，ある δ が存在して $\{0, \pm\delta, \pm 2\delta, \pm 3\delta, \dots\}$ に含まれているとき**算術的**であるという．また δ の最小値を**幅**と呼ぶ．これが成り立たないとき，**非算術的**という．これらのことは $\mathbb{R}$ の加法に対する部分群及び，部分半群に関わることなので，基本的なことを復習しておく．

命題 10.6. M を $\mathbb{R}$ の加法に対する部分群とする．M は次の 3 つの場合のどれかになる．

1. $M = \{0\}$.
2. M は $\mathbb{R}$ で稠密.
3. ある $\delta > 0$ が存在して $M = \{0, \pm\delta, \pm 2\delta, \pm 3\delta, \dots\}$.

証明 $M = \{0\}$ の場合は明らかだから，それ以外の場合を考える．

$$\delta = \inf\{|x|;\, x \in M\}$$

と定める．$\delta = 0$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|x| < \varepsilon$ が存在し $\pm nx$ の形の元が M に含まれるので，任意の $\mathbb{R}$ の元に対して ε 近傍に M の元が存在する．よって M は $\mathbb{R}$ で稠密．

$\delta > 0$ のときは $x_n \downarrow \delta$ となる元が存在する．$x_n - x_{n+1} \to 0$ になるので，$\delta > 0$ だから n が大きいと $x_n - x_{n+1} = 0$ となって，δ が M の元であることが分かる．さらに M が $\{0, \pm\delta, \pm 2\delta, \pm 3\delta, \dots\}$ を含むことが分かるが，それ以外の元が存在すれば，距離が δ より近い元が存在し矛盾するので M と一致する．□

半群の場合も同様のことが成り立つ．

命題 10.7. M を $\mathbb{R}$ の加法に対する部分半群とする．$M \subset [0, \infty)$ のときは次の 3 つの場合のどれかになる．

1. $M = \{0\}$
2. M は ∞ で漸近的に稠密．即ち任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分大きな x に対し，x の ε 近傍に M の点が存在する．
3. ある $\delta > 0$ が存在して $M \subset \{0, \delta, 2\delta, 3\delta, \dots\}$ で，十分大きな n に対しては $n\delta \in M$.

M が $[0, \infty)$ にも $(-\infty, 0]$ にも含まれないときは次のいずれかが成り立つ．

1. M は $\mathbb{R}$ で稠密.

2. ある $\delta > 0$ が存在して $M = \{0, \pm\delta, \pm 2\delta, \pm 3\delta, \dots\}$.

証明　$M = \{0\}$ の場合は明らかだから，それ以外の場合を考える．

$$\overline{M} = \{x - y; x, y \in M\}$$

とすると，$\overline{M}$ は加法群となる．

$$\delta = \inf\{|x - y|; x, y \in M\}$$

とすると，$\delta > 0$ のとき $\overline{M} = \{0, \pm\delta, \pm 2\delta, \pm 3\delta, \dots\}$ となる．さらに inf は min で $x - y = \delta$ となる $x, y \in M$ が存在する．x, y は δ の倍数だから $x = (k+1)\delta$, $y = k\delta$ となる．さてここで k^2 より大きな整数は

$$\alpha k + \beta, \quad \alpha = k, k+1, k+2, \dots, \ \beta = 0, 1, 2, \dots, k-1$$

の形に表される．このとき $\alpha - \beta \geq 1$ であるから

$$(\alpha - \beta)k\delta + \beta(k+1)\delta = (\alpha k + \beta)\delta.$$

左辺は M の元であるから $n \geq k^2$ のとき $n\delta \in M$ が分かる．

$\delta = 0$ のとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$0 < y - x < \varepsilon$ となる $x, y \in M$ が存在する．$k \in \mathbb{N}$ を $k(y - x) > x$ となるようにとる．このとき

$$\alpha x + \beta(y - x), \quad \alpha = k, k+1, k+2, \dots, \ \beta = 0, 1, 2, \dots, k$$

の形の元を考えると

$$\alpha x + \beta(y - x) = (\alpha - \beta)x + \beta y$$

より，M の元である．さらに

$$\alpha x + k(y - x) > \alpha x + x = (\alpha + 1)x$$

なので，$[\alpha x, (\alpha + 1)x]$ の元は，ε 近傍に必ず M の元を含む．即ち kx より大きな元はすべて ε 近傍に M の元を含んでいる．従って ∞ で漸近的に稠密が示せた．

M が $[0, \infty)$ にも $(-\infty, 0]$ にも含まれないときは二つの半群 $M_+ \subset [0, \infty)$ および $M_- \subset (-\infty, 0]$ の元の和として M を構成する．どちらかが 漸近的に稠密だと，反対符号の部分は，無限に発散する列を含むから，そのずらしで $\mathbb{R}$ で稠密が言える．

M_+ も M_- も discrete の場合は $\delta_+ > 0$ が存在して $M_+ \subset \{n\delta_+; n \in \mathbb{Z}_+\}$ であり $\delta_- > 0$ が存在して $M_- \subset \{-n\delta_-; n \in \mathbb{Z}_+\}$ である．δ_+, δ_- は最小のものをとる．また N を大きくとれば $M_+ \supset \{n\delta_+; n \geq N\}$ であり $M_- \supset \{-n\delta_-; n \geq N\}$ である．

まず $\frac{\delta_+}{\delta_-} = \alpha$ が無理数の場合を考えよう．定数倍して（$1/\delta_-$ をかけて）$\delta_+ = \alpha$, $\delta_- = 1$ としてよい．任意に $\varepsilon > 0$ を取る．さて，$m\alpha + n$ $n, m \in \mathbb{Z}$ の形の元は $\mathbb{R}$ で稠密である．$|n|, |m| \leq N$ となる整数は有限個なので $|n|, |m| \geq N$ で $m\alpha + n \in [0, \varepsilon)$ となるものが存在する．$m > 0$, $n < 0$ の場合を考えよう．n の符号を変えて $m\alpha - n$ とかく．正整数倍して $lm\alpha - ln \in M$ であるから $[0, \infty)$ の元は ε 近傍に M の元を含む．M_- の元を加えれば，$\mathbb{R}$ の元はすべて ε 近傍に M の元を含む．$\varepsilon > 0$ は任意だから M は $\mathbb{R}$ で稠密である．$m < 0$, $n > 0$ の場合も同様である．

つぎに $\frac{\delta_+}{\delta_-} = \alpha$ が有理数の場合を扱う．$\alpha = \frac{l}{k}$ と互いに素な数の比で表す．$\frac{\delta_-}{k}$ で割って，$\delta_- = k$, $\delta_+ = l$ とする．$M_+ \supset \{nl; n \geq N\}$ であり $M_- \supset \{-nk; n \geq N\}$ である．さて，N よりも大きな異なる素数 p_1, p_2 を取ると，$p_1 l$ と $p_2 k$ は 互いに素である．よって $m, n \in \mathbb{Z}$ が取れて

$$mp_1 l + np_2 k = 1$$

と出来る．$m > 0$, $n < 0$ として n の符号を変えて $mp_1 l - np_2 k = 1$ と表す．条件から $mp_1 l \in M_+$, $-np_2 k \in M_-$ であるから $1 \in M$ であり，$\mathbb{N} \subset M$ が従う．M_- の元を加えて $\mathbb{Z} \subset M$ まで示せる．$m < 0$, $n > 0$ のときも同様．この場合は加法半群 M は 加法群になる．□

命題 10.8. F を $\mathbb{R}$ 上の分布で 0 に集中してはいない非算術的分布とする．ζ を有界連続関数で $\zeta = \zeta * F$ を満たしているとする:

$$\zeta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x - y)\, dF(y). \tag{10.10}$$

このとき ζ は定数となる．

証明 Feller の本のやり方に従う．

ζ を (10.10) の有界連続な解であるとする．φ を台が $[-1, 1]$ に含まれる C^∞ の非負関数で $\int \varphi(x)\, dx = 1$ を満たしているとする．$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ とし，$\zeta_\varepsilon = \zeta * \varphi_\varepsilon$ とおく．ζ_ε は微分可能で ζ'_ε も有界一様連続である．この場合に ζ_ε が定数を示せば ζ も定数であることが従うから，始めから ζ が微分可能で ζ' は有界一様連続を仮定してよい．

さて，ζ が正の最大値 m を取る場合からまず示す．(負の最小値の場合も符号を変えればよいから同様.）最大値を 0 で取るとしてよい．

$$m = \int_{\mathbb{R}} \zeta(-y) dF(y)$$

だから F の台で $\zeta(-y) = m$ が成り立つ．また F との合成積を繰り返すことにより $r = 1, 2, \ldots$ に対し $\zeta = \zeta * F^{r*}$ が満たされている．よって $\zeta(-y)$ は F^{r*} の台上で m

に等しい．M を F, F^{2*}, $F^{2*}, \ldots$ の台の和集合とすると，M は半群である．命題 10.7 から M が $[0,\infty)$ か $(-\infty,0]$ に含まれなければ M は $\mathbb{R}$ で稠密になるので ζ は 定数になる．M が $[0,\infty)$ に含まれる場合は 命題 10.7 から ∞ で漸近的に稠密になるので ζ の一様連続性から $y\to\infty$ のとき $\zeta(-y)\to m$ となる．$r\to\infty$ のとき F^{r*} の測度は ∞ の近傍に集中してくるので $\zeta=\zeta*F^{r*}$ は $r\to\infty$ のとき m に収束して，ζ が定数であることが分かる．

ζ が最大値を取らないとき $m=\sup\zeta>0$ としてこの場合を示す．$t_n\to\pm\infty$ で $\zeta(t_n)\to m$ となる列が存在する．簡単のため $t_n\to\infty$ としておく．$\zeta_n(x)=\zeta(x+t_n)$ は有界同程度連続なので，任意の有界区間で一様収束する部分列を含んでいる．2 重の添え字を省略して ζ_n が広義一様収束するとする．$\zeta_n\to\eta$ とする．明らかに $\eta=\eta*F$ である．しかも $\eta(0)=\max\eta$ であるから，上の結果から $\eta=m$ である．さて $h>0$ を任意に与えるとき．$[0,h]$ で ζ_n は m に一様収束するから或る n が存在して $\zeta(s)>\frac{1}{2}m$ $s\in[t_n,t_n+h]$ が成り立つ．

さて，この結果を ζ ではなく ζ' に対して適用する．$\zeta'=\zeta'*F$ だからやはり同じ性質を満たしているので適用可能である．$q=\sup\zeta'$ とおく．$q>0$ であれば任意の長さ h の区間 $[t,t+h]$ 上で $\zeta'>\frac{1}{2}q$ となる t が存在する．x について積分すれば

$$\zeta(t+h)-\zeta(t)=\int_t^{t+h}\zeta'(x)dx>\frac{1}{2}qh$$

ところで明らかに $|\zeta(t+h)-\zeta(t)|\le 2\|\zeta\|$ である．h はいくらでも大きくできるからこれは矛盾よって $q=0$ である．同じ論法を $-\zeta'$ に適用して，結局 $\zeta'=0$ を得る．これから ζ が定数であることが分かった． □

定理 10.2 の証明　$z(t)=1-F(t)$ とおくと，z は単調減少である．(10.4) から

$$\begin{aligned}
1&=z(t)+\int_{[0,t]}z(t-s)\,dU(s)\\
&\ge\int_{(t-\alpha,t]}z(t-s)\,dU(s)\\
&\ge\int_{(t-\alpha,t]}z(t-t+\alpha)\,dU(s)\\
&=z(\alpha)\int_{(t-\alpha,t]}dU(s)\\
&=z(\alpha)U(t-\alpha,t].
\end{aligned}$$

α が十分小さければ $z(\alpha)>0$ となるから

$$U(t-\alpha,t]\le\frac{1}{z(\alpha)}$$

これを繰り返せば

$$U(t, t+k\alpha] \le \frac{1}{kz(\alpha)}.$$

ここで

$$G_t(x) = U(x+t) - U(t), \quad x \in \mathbb{R}$$

とすれば，$G_t(x)$ は右連続非減少関数で，x に関する有界区間で $t \ge 0$ に関して一様に有界である．Helly の選出定理からある右連続非減少関数 V と，列 t_k が存在して $G_{t_k}(x)$ は $V(x)$ に V の連続点で収束している．

ここで φ を有限区間 $[0, a]$ に台を持つ C^∞ 関数で Z を

$$Z(x) = \int_{(0,x]} \varphi(x-y)dU(y)$$

とすると

$$\begin{aligned} Z(t_k + x) &= \int_{[0,x]} \varphi(t_k + x - y)dU(y) = \int_{[0,x]} \varphi(x-y)U(t_k + dy) \\ &= \int_{[0,x]} \varphi(x-y)dG_{t_k}(y) \end{aligned}$$

ここで $k \to \infty$ とすると右辺は収束するので $Z(t_k + x)$ の収束が分かり極限を ζ とすると

$$\zeta(x) = \int_{[0,x]} \varphi(x-y)dV(y). \tag{10.11}$$

Z は更新方程式を満たすので

$$Z(x) = \varphi(x) + \int_{[0,x]} Z(x-y)dF(y)$$

である．従って

$$Z(t_k + x) = \varphi(t_k + x) + \int_{[0,t_k+x]} Z(t_k + x - y)dF(y)$$

ここで $k \to \infty$ とすると $Z(t_k + x)$ が ζ に収束するから

$$\zeta(x) = \int_{[0,\infty)} \zeta(x-y)dF(y).$$

F は非算術的と仮定しているので，これから ζ が定数となる．(10.11) を微分して

$$\int_{[0,x]} \varphi'(x-y)dV(y) = 0 \tag{10.12}$$

で φ は任意だから dV は $[0,\infty)$ で Lebesgue 測度の定数倍である．この定数を α とすると任意の $h>0$ に対し

$$U(t_k) - U(t_k - h) \to \alpha h \tag{10.13}$$

が証明できた．これは Blackwell の定理が t_k という列に沿って証明できたことになる．z が直接的積分可能のときは前の議論から

$$Z(x) = \int_{[0,x]} z(x-y)dU(y)$$

と定めると

$$Z(t_k) \to \alpha \int_0^\infty z(x)dx$$

が成立する．ところで $z = 1 - F(x)$ のときは $Z(x) = 1$ であったから

$$\alpha \int_0^\infty (1 - F(x))dx = 1$$

である．F の平均 $\mu < \infty$ のときは，これから $\alpha = \frac{1}{\mu}$ が分かる．$\mu = \infty$ のときは Z の有界性から $\alpha = 0$ となる．従って α は t_k に無関係になる．これから，部分列を取らなくても収束することが分かる． □

11.　更新方程式の応用

更新方程式

$$Z = z + Z * F \tag{11.1}$$

をみたす例をいくつか挙げよう．一般の更新列 $T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ を考える．F は W_1 の分布関数とし，$E[W_1] = \frac{1}{\lambda}$ とする．さたに時刻 t までの更新回数を N_t とし

$$U(t) = E[N_t] \tag{11.2}$$

と定義する．

例 10.1 で $z = 1 - F$, $Z = 1$ が解であることを示した．またそこで $z = F$, $Z = U$ も解になっていることを示した．方程式の線形性から $z = 1$, $Z = U + 1$ も解になることが分かる．他の例を見てみよう．

使用期間 $B_t = t - T_{N_t}$ および残余寿命 $F_t = T_{N_t+1} - t$ は重要な対象であった．その分布関数 $P(B_t \le x)$, $P(F_t \le x)$ を考えたい．但し $x \ge 0$ である．これらに関係した更新方程式が立てられる．W_1 の分布関数 F は，非算術的であるとする．

例 11.1. $Z_t = P(B_t \le x)$ で $z(t) = (1 - F(t))1_{[0,x]}(t)$.

これが (11.1) の解であることを見よう．$B_t \le t$ であるから $x \ge t$ のとき $P(B_t \le x) = 1$ である．以下 $0 \le x < t$ とする．

$$P(B_t \le x) = P(B_t \le x, T_1 \le t) + P(B_t \le x, T_1 > t)$$

である．$T_1 > t$ のときは時刻 t 以前にはジャンプはないから $N_t = 0$ であり，$B_t = t$ である．よって

$$P(B_t \le x, T_1 > t) = (1 - F(t))1_{[0,x]}(t). \tag{11.3}$$

次に $T_1 \le t$ のとき

$$P(B_t \le x, T_1 \le t) = \int_0^t P(B_{t-y} \le x) dF(y) \tag{11.4}$$

を示そう．これは $T_1 \le t$ のときは B は T_1 から新たに始まることを意味している．

$$\begin{aligned} P(B_t \le x, T_1 \le t) &= P(t - T_{N_t} \le x, N_t \ge 1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(t - T_{N_t} \le x, N_t = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(t - T_n \le x, T_n \le t < T_{n+1}). \end{aligned}$$

ここで $y \le t$ として $T_1 = y$ で条件付けて

$$\begin{aligned} &P(t - T_n \le x, T_n \le t < T_{n+1} | T_1 = y) \\ &\quad = P\left(t - \left[y + \sum_{k=2}^{n} W_i\right] \le x, y + \sum_{k=2}^{n} W_i \le t < y + \sum_{k=2}^{n+1} W_k\right) \\ &\quad = P(t - y - T_{n-1} \le x, T_{n-1} \le t - y < T_n) \\ &\quad = P(t - y - T_{N_{t-y}} \le x, N_{t-y} = n - 1). \end{aligned}$$

よって加え合わせて

$$\begin{aligned} P(B_t \le x | T_1 = y) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(t - y - T_{N_{t-y}} \le x, N_{t-y} = n - 1) \\ &= P(t - y - T_{N_{t-y}} \le x) \\ &= P(B_{t-y} \le x). \end{aligned}$$

従って

$$P(B_t \le x, T_1 \le t) = \int_0^t P(B_t \le x | T_1 = y)\, dF(y) = \int_0^t P(B_{t-y} \le x)\, dF(y).$$

これで (11.4) が示せた．今までのことから

$$P(B_t \le x) = (1 - F(t))1_{[0,x]}(t) + \int_0^t P(B_{t-y} \le x)dF(y).$$

これが求める更新方程式である．解の公式から

$$P(B_t \le x) = (1 - F(t))1_{[0,x]}(t) + \int_0^t (1 - F(t-y))1_{[0,x]}(t-y)\,dU(y) \tag{11.5}$$

が成り立つ．

$Z(t) = P(B_t \le x)$, $z(t) = (1 - F(t))1_{[0,x]}(t)$ として定理 10.3 を適用すると $t \to \infty$ の極限が求まって

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P(B_t \le x) &= \int_0^\infty (1 - F(t))1_{[0,x]}(t)\lambda\,dt \\
&= \int_0^x \int_{(t,\infty)} dF(y)\lambda\,dt \\
&= \lambda \int_{[0,\infty)} dF(y) \int_0^{x\wedge y} dt \\
&= \lambda \int_{[0,\infty)} (x \wedge y)dF(y) \\
&= \lambda \int_{[0,x]} y\,dF(y) + \lambda \int_{(x,\infty)} x\,dF(y) \\
&= \lambda \int_{[0,x]} y\,dF(y) + \lambda x(1 - F(x)) \\
&= \lambda(x - \int_0^x F(y)\,dy) \\
&= \lambda \int_0^x (1 - F(y))\,dy.
\end{aligned}$$

あるいは $\dfrac{E[x \wedge W_1]}{E[W_1]}$ が分布関数といってもよい．

特に Poisson 過程のときは $U(t) = \lambda t$, $1 - F(x) = e^{-\lambda x}$ だから $x < t$ のときは

$$\begin{aligned}
P(B_t \le x) &= \int_0^t e^{-\lambda(t-y)}1_{[0,x]}(t-y)\lambda\,dy \\
&= \int_{t-x}^t e^{-\lambda(t-y)}\lambda\,dy \\
&= [e^{-\lambda(t-y)}]_{t-x}^t \\
&= 1 - e^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

$x \geq t$ のときは

$$\begin{aligned} P(B_t \leq x) &= 1 - F(t) + \int_0^t (1 - F(t-y))\lambda\, dy \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-y)} \lambda\, dy \\ &= e^{-\lambda t} + [e^{-\lambda(t-y)}]_0^t \\ &= e^{-\lambda t} + 1 - e^{-\lambda t} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって

$$P(B_t \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{if } x < t, \\ 1 & \text{if } x \geq t \end{cases} \tag{11.6}$$

となり命題 7.4 と同じ結論がもう一度確かめられた． □

例 11.2. $Z_t = P(F_t > x)$ で $z(t) = 1 - F(t + x)$.

これが (11.1) の解であることを見よう．

$$P(F_t > x) = P(F_t > x, T_1 \leq t) + P(F_t > x, T_1 > t)$$

である．まず

$$P(F_t > x, T_1 > t) = P(T_1 - t > x, T_1 > t) = P(T_1 > t + x) = 1 - F(t + x)$$

である．さらに

$$\begin{aligned} P(F_t > x,\, T_1 \leq t) &= P(T_{N_t+1} - t > x,\, N_t \geq 1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(T_{N_t+1} - t > x,\, N_t = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(T_{k+1} > x + t,\, T_k \leq t < T_{k+1}). \end{aligned}$$

$y \leq t$ として $T_1 = y$ で条件付けると

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} P(T_{k+1} > x + t,\, T_k \leq t < T_{k+1} | T_1 = y) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} P\biggl(y + \sum_{j=2}^{k+1} W_j > x + t,\, y + \sum_{j=2}^{k} W_j \leq t < y + \sum_{j=2}^{k+1} W_j \biggm| T_1 = y\biggr) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(y+T_k > x+t,\, y+T_{k-1} \le t < y+T_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(T_k > x+t-y,\, T_{k-1} \le t-y < T_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(T_{N_{t-y}+1} > x+t-y,\, N_{t-y} = k-1) \\
&= P(T_{N_{t-y}+1} > x+t-y) \\
&= P(T_{N_{t-y}+1} - (t-y) > x) \\
&= P(F_{t-y} > x)
\end{aligned}
$$

従って

$$
P(F_t > x,\, T_1 \le t) = \int_0^t P(F_t > x | T_1 = y)\, dF(y) = \int_0^t P(F_{t-y} > x)\, dF(y).
$$

以上を合わせて

$$
P(F_t > x) = 1 - F(t+x) + \int_0^t P(F_{t-y} > x)\, dF(y).
$$

これで，(11.1) の解であることが示せた．解の公式から

$$
P(F_t > x) = 1 - F(t+x) + \int_0^t (1 - F(t-y+x))\, dU(y) \tag{11.7}
$$

が成り立つ．

$Z(t) = P(F_t > x)$, $z(t) = 1 - F(t+x)$ として定理 10.3 を適用すると $t \to \infty$ の極限が求まって

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} P(F_t > x) &= \int_0^{\infty} (1 - F(t+x))\lambda\, dt \\
&= \int_0^{\infty} \int_{(t+x,\infty)} dF(y)\lambda\, dt \\
&= \lambda \int_{[x,\infty)} dF(y) \int_0^{y-x} dt \\
&= \lambda \int_{[x,\infty)} (y-x) dF(y) \\
&= \frac{E[(W_1 - x)_+]}{E[W_1]}.
\end{aligned}
$$

分布関数で言えば

$$
1 - \frac{E[(W_1 - x)_+]}{E[W_1]} = \frac{E[W_1] - E[(W_1 - x)_+]}{E[W_1]}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{E[W_1 - (W_1 - x)_+]}{E[W_1]} \\
&= \frac{E[W_1 \wedge x]}{E[W_1]}
\end{aligned}
$$

であるので，B_t の場合と同じ極限が得られている．つまり $t \to \infty$ の場合は同じ分布になって，時間に対する対称性が確認できたことになる． □

特に Poisson 過程のときは $U(t) = \lambda t$, $1 - F(x) = e^{-\lambda x}$ だから

$$
\begin{aligned}
P(F_t > x) &= 1 - F(t + x) + \int_0^t (1 - F(t - y + x))\, dU(y) \\
&= e^{-\lambda(t+x)} + \int_0^t e^{-\lambda(t-y+x)} \lambda\, dt \\
&= e^{-\lambda(t+x)} + [e^{-\lambda(t-y+x)}]_0^t \\
&= e^{-\lambda(t+x)} + e^{-\lambda x} - e^{-\lambda(t+x)} \\
&= e^{-\lambda x}
\end{aligned}
$$

となり，指数分布であることが分かる． □

さらに例を続けよう．

$$
G * U(t) + G(t) = \lambda t, \quad t \geq 0 \tag{11.8}
$$

となる G を構成したい．これは (10.6) を使えば解は

$$
\begin{aligned}
G &= \lambda t - (\lambda t) * F \\
&= \lambda t - \int_{[0,t]} \lambda(t - y)\, dF(y) \\
&= \lambda t + \int_{[0,t]} \lambda(t - y)\, d(1 - F(y)) \\
&= \lambda t + \lambda[(t - y)(1 - F(y))]_{0-}^t + \int_0^t \lambda(1 - F(y))\, dy \\
&= \lambda t - \lambda t + \int_0^\infty \lambda(1 - F(y))\, dy - \int_0^\infty \lambda(1 - F(y))\, dy + \int_{[0,t]} \lambda(1 - F(y))\, dy \\
&= \lambda\mu - \lambda \int_t^\infty (1 - F(y))\, dy \\
&= 1 - \lambda \int_t^\infty (1 - F(y))\, dy.
\end{aligned}
$$

これは，例 11.1 で見た使用期間 B_t の $t \to \infty$ での極限分布であった．$z = G$, $Z = \lambda t$ が更新方程式の解であることも分かる．むしろ解が $Z = \lambda t$ となるような z を求めたの

である．

$$G(t) = 1 - \lambda \int_t^{\infty} (1 - F(y))\, dy. \tag{11.9}$$

は後でも出てくるので，記号を固定しておく．

同じ考え方で

$$H * U(t) + H(t) = \lambda^2 t^2, \quad t \geq 0 \tag{11.10}$$

となる H を構成することもできる．$(1-F)$ との合成積を取ることなので，次のようにすればよい．

$$\begin{aligned}
H &= \lambda^2 t^2 - \int_{[0,t]} \lambda^2 (t-y)^2 \, dF(y) \\
&= \lambda^2 t^2 + \int_{[0,t]} \lambda^2 (t-y)^2 \, d(1-F(y)) \\
&= \lambda^2 t^2 + [\lambda^2 (t-y)^2 (1-F(y))]_{0-}^{t} + \int_0^t 2\lambda^2 (t-y)(1-F(y))\, dy \\
&= \lambda^2 t^2 - \lambda^2 t^2 + 2\lambda^2 t \int_0^t (1-F(y))\, dy + 2\lambda^2 \int_0^t y(1-F(y))\, dy \\
&= 2\lambda^2 t \left\{ \int_0^{\infty} (1-F(y))\, dy - \int_t^{\infty} (1-F(y))\, dy \right\} \\
&\quad - 2\lambda^2 \left\{ \int_0^{\infty} y(1-F(y))\, dy - \int_t^{\infty} y(1-F(y))\, dy \right\} \\
&= 2\lambda^2 t\mu - 2\lambda^2 \int_t^{\infty} t(1-F(y))\, dy - 2\lambda^2 \frac{1}{2} E[W_1^2] + 2\lambda^2 \int_t^{\infty} y(1-F(y))\, dy \\
&= 2\lambda t - \lambda^2 E[W_1^2] + 2\lambda^2 \int_t^{\infty} (y-t)(1-F(y))\, dy \\
&= 2\lambda t - \lambda^2 (V(W_1) + \mu^2) + 2\lambda^2 \int_t^{\infty} (y-t)(1-F(y))\, dy \\
&= 2\lambda t - \lambda^2 V(W_1) - 1 + 2\lambda^2 \int_t^{\infty} (y-t)(1-F(y))\, dy.
\end{aligned}$$

μ は F の平均であり，途中で

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} y(1-F(y))\, dy &= \int_0^{\infty} y\, dy \int_{(y,\infty)} dF(u) = \int_{[0,\infty)} dF(u) \int_0^u y\, dy \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{1}{2} u^2 \, dF(u) = \frac{1}{2} E[W_1^2]
\end{aligned}$$

を使った．また $z = H$, $Z = \lambda^2 t^2$ が更新方程式の解であることも分かる．大雑把に言って z は Z より次数が一つ下がる感覚である．

これを利用して，$U(t)$ のより精密な漸近挙動が分かる．

定理 11.1. W_1 の分散 $V(W_1) < \infty$ を仮定する．このとき

(11.11) $$U(t) = \lambda t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda^2 V(W_1) + o(1) \quad \text{as } t \to \infty$$

が成り立つ．また N_t の分散 $V(N_t)$ に対して

(11.12) $$V(N_t) = \lambda^3 V(W_1)t + o(t) \quad \text{as } t \to \infty$$

が成り立つ．

証明　$z = 1$, $Z = U + 1$ が更新方程式の解であった．また上で示したように $z = 1 - \lambda\int_t^\infty (1 - F(y))\,dy$, $Z = \lambda t$ が更新方程式の解であった．二つを合わせて $z = \lambda\int_t^\infty (1 - F(y))\,dy$, $Z = U + 1 - \lambda t$ が更新方程式の解になる．更に次の計算から分かるようにこの z が $V(W_1) < \infty$ の仮定から可積分であるので定理 10.3 から

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}(U(t) + 1 - \lambda t) &= \lambda^2\int_0^\infty dt\lambda\int_{[(t,\infty)}(1 - F(y))\,dy \\
&= \lambda^2\int_0^\infty (1 - F(y))\,dy\int_0^y dt \\
&= \lambda^2\int_0^\infty y(1 - F(y))\,dy \\
&= \lambda^2\int_0^\infty ydy\int_{[y,\infty)} dF(u) \\
&= \lambda^2\int_{[0,\infty)} dF(u)\int_0^u y\,dy \\
&= \lambda^2\int_{[0,\infty)} \frac{1}{2}u^2\,dF(u) \\
&= \frac{1}{2}\lambda^2 E[W_1^2] \\
&= \frac{1}{2}\lambda^2\left(V(W_1) + \frac{1}{\lambda^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\lambda^2 V(W_1) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

これが示すべきことであった．

N_t の分散を調べる前に $E[N_t^2]$ の計算をする．

(11.13) $$E[N_t^2] = \lambda^2 t^2 + (2\lambda^2 V(W_1) - 1)\lambda t + o(t)$$

を示していこう．そのために

$$K(t) = \sum_{n=1}^\infty nP(T_n \le t)$$

とおく．すると

$$
\begin{aligned}
K(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(T_n \leq t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP(N_t \geq n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{k=n}^{\infty} P(N_t = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_t = k) \sum_{n=1}^{k} n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_t = k) \frac{1}{2} n(n+1) \\
&= \frac{1}{2} E[N_t(N_t+1)] \\
&= \frac{1}{2} E[N_t^2] + \frac{1}{2} U(t)
\end{aligned}
$$

即ち

$$
E[N_t^2] = 2K(t) - U(t) \tag{11.14}
$$

が成り立つ．一方 K の定義から

$$
K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(T_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} nF^{n*}(t)
$$

なので

$$
\begin{aligned}
K * F(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n+1)*}(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) F^{(n+1)*}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n+1)*}(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nF^{n*}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \\
&= K(t) - U(t)
\end{aligned}
$$

即ち

$$
(1 - F) * K = U
$$

が成り立つ．これで，更新方程式を満たすものがいろいろできた．z と Z の組を纏めると，

z	Z
$1+o(1)$	λt
$2\lambda t-\lambda^2V(W_1)-1+o(1)$	λ^2t^2
$U(t)=\lambda t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda^2V(W_1)+o(1)$	$K(t)=\frac{1}{2}E[N_t^2]+\frac{1}{2}U(t)$
1	$U(t)+1$

これから表の上 3 つを使って

$$Z=K(t)-\frac{1}{2}\lambda^2t^2-\lambda^2V(W_1)\lambda t$$

を考えると対応する z は

$$\begin{aligned}z&=\left\{\lambda t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda^2V(W_1)\right\}-\frac{1}{2}(2\lambda t-\lambda^2V(W_1)-1)-\lambda^2V(W_1)+o(1)\\&=o(1)\end{aligned}$$

となる．ここで定理 10.3 を使うと $Z=o(t)$ が従う．従って

$$K(t)=\frac{1}{2}\lambda^2t^2+\lambda^2V(W_1)\lambda t+o(t)$$

が分かる．よって (11.14) を用いて

$$\begin{aligned}E[N_t^2]&=2K(t)-U(t)\\&=\lambda^2t^2+2\lambda^2V(W_1)\lambda t-\lambda t+o(t)\\&=\lambda^2t^2+(2\lambda^2V(W_1)-1)\lambda t+o(t)\end{aligned}$$

となり (11.13) が示せた．

$V(N_t)$ の計算は今までの計算を組み合わせるだけである．

$$\begin{aligned}V(N_t)&=E[N_t^2]-U(t)^2\\&=\lambda^2t^2+(2\lambda^2V(W_1)-1)\lambda t-(\lambda t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda^2V(W_1)+o(1))^2+o(t)\\&=\lambda^2t^2+(2\lambda^2V(W_1)-1)\lambda t-(\lambda^2t^2-2(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda^2V(W_1))\lambda t)+o(t)\\&=(2\lambda^2V(W_1)-1+1-\lambda^2V(W_1))\lambda t+o(t)\\&=\lambda^2V(W_1)\lambda t+o(t)\end{aligned}$$

となり (11.12) が示せた． □

12.　中心極限定理

$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ の形の定理は大数の法則に相当する．次の自然なステップは中心極限定理であり，それは次の形の定理である．

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t - \lambda t}{\sqrt{V(N_t)}} \overset{d}{=} N(0,1). \tag{12.1}$$

ここで収束は法則収束で $N(0,1)$ は標準正規分布を表す．分散 $V(N_t)$ の漸近挙動は

$$V(N_t) = \lambda^3 V(W_1)t + o(t) \quad \text{as } t \to \infty \tag{12.2}$$

で与えられるからそれで置き換えることもできる．中心極限定理は，独立確率変数の和の場合はよく知られている．すなわち法則収束 $\frac{T_n - E[T_n]}{\sqrt{V(T_n)}} \to N(0,1)$ が成り立つ．基本的にこの場合に帰着させればよい．

準備のために，少し一般的な設定で議論を進める．$\{X_k\}$ を平均 0 で分散 $\sigma^2 > 0$ の i.i.d. とする．そしてその部分和を

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{12.3}$$

とする．まず次の Kolmogorov の最大不等式を準備する．

定理 12.1. 次の不等式が成立する．

$$P\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge x\right) \le x^{-2}V(S_n) = nx^{-2}V(X_1). \tag{12.4}$$

証明　集合 A_k を

$$A_k = \{|S_1| < x, |S_2| < x, \ldots, |S_{k-1}| < x, |S_k| \ge x\}$$

とおく．A_k は互いに素であり $(S_n - S_k)^2 \ge 0$ であるから

$$\begin{aligned}
E[S_n^2] &\ge \sum_{k=1}^n \int_{A_k} S_n^2 dP \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2 dP \\
&\ge \sum_{k=1}^n \int_{A_k} S_k^2 dP + \sum_{k=1}^n \int 2S_k 1_{A_k}(S_n - S_k) dP \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{A_k} S_k^2 dP + \sum_{k=1}^n E[2S_k 1_{A_k}]E[S_n - S_k]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} S_k^2 dP \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} x^2 P(A_k) \\
&= x^2 P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x\right).
\end{aligned}
$$

但し，4 行目で $S_k 1_{A_k}$ と $S_n - S_k$ が独立であることを使った． □

次に Anscombe の定理について述べる．

定理 12.2. (N_t) を正整数値を取る確率変数で

$$
\frac{N_t}{t} \xrightarrow{P} \theta \quad \text{as } t \to \infty \tag{12.5}
$$

が成り立っているとする．但し $\theta \in (0, \infty)$ である．このとき次が成り立つ．

$$
\frac{S_{N_t}}{\sigma\sqrt{N_t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{as } t \to \infty, \tag{12.6}
$$

$$
\frac{S_{N_t}}{\sigma\sqrt{t\theta}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{as } t \to \infty. \tag{12.7}
$$

証明　$\sigma^2 = 1$ として証明する．$n_0 = [\theta t]$ とおく．すると

$$
\frac{S_{N_t}}{\sqrt{N_t}} = \left(\frac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} + \frac{S_{N_t} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}\right) \cdot \sqrt{\frac{n_0}{N_t}}.
$$

$\dfrac{S_{n_0}}{\sqrt{n_0}}$ は正規分布に収束し，$\sqrt{\dfrac{n_0}{N_t}}$ は 1 に確率収束する．よって命題 2.5 から

$$
\frac{S_{N_t} - S_{n_0}}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{as } t \to \infty \tag{12.8}
$$

を示せばよい．そのために $\varepsilon > 0$ を小さくとり，$n_1 = [n_0(1-\varepsilon^2)]+1$, $n_2 = [n_0(1+\varepsilon^2)]$ とおく．すると

$$
\begin{aligned}
P(|S_{N_t} - S_{n_0}| > \sqrt{n_0 \varepsilon}) &= P(|S_{N_t} - S_{n_0}| > \sqrt{n_0 \varepsilon},\ N_t \in [n_1, n_2]) \\
&\quad + P(|S_{N_t} - S_{n_0}| > \sqrt{n_0 \varepsilon},\ N_t \notin [n_1, n_2]) \\
&\leq P\left(\max_{n_1 \leq n \leq n_0} |S_n - S_{n_0}| > \sqrt{n_0 \varepsilon}\right) \\
&\quad + P\left(\max_{n_0 \leq n \leq n_2} |S_n - S_{n_0}| > \sqrt{n_0 \varepsilon}\right) + P(N_t \notin [n_1, n_2]).
\end{aligned}
$$

$N_t < n_1$ は

$$
N_t < n_1 = [n_0(1-\varepsilon^2)] + 1 \leq n_0(1-\varepsilon^2) + 1
$$

であり，$N_t > n_2$ は

$$N_t > n_2 = [n_0(1+\varepsilon^2)] \geq n_0(1+\varepsilon^2) - 1$$

だから $t \to \infty$ のとき $P(N_t \notin [n_1, n_2]) \to 0$ となる．また $n_1 \leq n < n_0$ となる n の個数は

$$n_0 - n_1 = n_0 - [n_0(1-\varepsilon^2)] - 1 \leq n_0 - n_0(1-\varepsilon^2) + 1 - 1 = n_0\varepsilon^2$$

であり，$n_0 < n \leq n_2$ となる n の個数は

$$n_2 - n_0 = [n_0(1+\varepsilon^2)] - n_0 \leq n_0(1+\varepsilon^2) - n_0 = n_0\varepsilon^2$$

なので，Kolmogorov の不等式，定理 12.1 から

$$P\left(\max_{n_1 \leq n \leq n_0} |S_n - S_{n_0}| > \sqrt{n_0 \varepsilon}\right) \leq n_0\varepsilon^2 \frac{1}{n_0\varepsilon} = \varepsilon$$

および

$$P\left(\max_{n_0 \leq n \leq n_2} |S_n - S_{n_0}| > \sqrt{n_0 \varepsilon}\right) \leq \varepsilon$$

が成り立つ．よって t が十分大きければ

$$P(|S_{N_t} - S_{n_0}| > \sqrt{n_0\varepsilon}) < 3\varepsilon$$

が成立するので (12.8) が示せた．

(12.7) は (12.6) と命題 2.5 を使えばよい． □

さて，ここで更新過程の場合に戻る．もう一度設定を復習すると $\{W_k\}$ を正値 i.i.d. で，その部分和を

$$T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \tag{12.9}$$

で定める．W_k の平均を $\mu = \frac{1}{\lambda}$ とし

$$X_k = W_k - \mu \tag{12.10}$$

とおくと X_k は平均 0 分散 $V(X_k) = V(W_k) = \sigma^2$ である．X_k の部分和 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ は

$$S_n = T_n - n\mu \tag{12.11}$$

とあらわされる．

定理 12.3. 次が成立する．

$$\frac{N_t - \lambda t}{\sigma\sqrt{\lambda^3 t}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad \text{as } t \to \infty. \tag{12.12}$$

証明　Anscombe の定理から

$$\frac{S_{N_t}}{\sigma\sqrt{N_t}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

ここで定理 9.1 を使えば

$$\frac{S_{N_t}}{\sigma\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

でもある．N_t を $N_t + 1$ にしても同様であるから

$$\frac{S_{N_t+1}}{\sigma\sqrt{\lambda t}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

さてここで (9.5) から

$$T_{N_t} \le t < T_{N_t+1} \tag{12.13}$$

が成り立つから

$$\frac{T_{N_t} - N_t\mu}{\sigma\sqrt{\lambda t}} \le \frac{t - N_t\mu}{\sigma\sqrt{\lambda t}} < \frac{T_{N_t+1} - N_t\mu}{\sigma\sqrt{\lambda t}}.$$

よって

$$\frac{S_{N_t}}{\sigma\sqrt{\lambda t}} \le \frac{t - N_t\mu}{\sigma\sqrt{\lambda t}} < \frac{S_{N_t+1} + \mu}{\sigma\sqrt{\lambda t}} = \frac{S_{N_t+1}}{\sigma\sqrt{\lambda t}} + \frac{\mu}{\sigma\sqrt{\lambda t}} = \frac{S_{N_t+1}}{\sigma\sqrt{\lambda t}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{\lambda^3 t}}.$$

左辺と右辺は $N(0,1)$ に法則収束するから命題 2.6 を使って

$$\frac{t - N_t\mu}{\sigma\sqrt{\lambda t}} = \frac{\lambda t - N_t}{\sigma\sqrt{\lambda^3 t}}$$

も $N(0,1)$ に法則収束することが分かる．対称性から符号を変えても良いので，求める結果を得る．　□

第 5 章

請求総額過程

前章では事故が起こる時点を更新過程としてモデル化した．ここではさらに保険金の支払いの問題を論じる．

13. 請求総額過程の漸近挙動

$\{W_k\}$ を正値 (i.e., $W_k > 0$ a.s.) の i.i.d. 確率変数列とし，その部分和を

$$T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \tag{13.1}$$

とする．これは事故が起こった時点を表す．そして N_t を t までの更新回数とする．(N_t) を更新過程と呼んだ．保険では保険金の請求回数である．以上が今まで考察してきた枠組みであるが，これに，保険金請求額 X_1, X_2, X_3,... を付加して考える．時刻 T_n で保険金 X_n が請求されるというモデルである．X_n の部分和を $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ と表す．時刻 t までの請求総額 (the total claim amount) は

$$S_{N_t} = \sum_{k=1}^{N_t} X_k, \quad t \geq 0 \tag{13.2}$$

で与えられる．(S_{N_t}) は請求額であるから，これが時間とともにどういう挙動をするかを知ることは保険の基本的な問題である．(N_t) が Poisson 過程の場合を Cramér-Lundberg モデルと呼ぶ．(N_t) が更新過程の場合は，更新モデル，あるいは Sparre-Anderson モデルという．

<u>更新モデルの平均と分散</u>

Wald の等式 (定理 9.3) を使えば

$$E[S_{N_t}] = E[N_t]E[X_1] \tag{13.3}$$

である．$E[W_1] = \frac{1}{\lambda}$ とすると，定理 9.4 から

$$\frac{E[N_t]}{t} \to \lambda$$

であるから $t \to \infty$ のとき

$$E[S_{N_t}] = \lambda t E[X_1](1 + o(1))$$

が成り立つ．N_t が Poisson 過程の場合は $E[N_t] = \lambda t$ だから等号で

$$E[S_{N_t}] = \lambda t E[X_1]$$

が成り立つ．

分散を計算すると N_t と (X_k) の独立性から

$$V\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k \;\middle|\; N_t\right) = \sum_{k=1}^{N_t} V(X_k|N_t) = \sum_{k=1}^{N_t} V(X_1) = N_t V(X_1)$$

から

$$E\left[V\left(\sum_{k=1}^{N_t} X_k \;\middle|\; N_t\right)\right] = E[N_t]V(X_1).$$

また

$$E\left[\sum_{k=1}^{N_t} X_k \;\middle|\; N_t\right] = \sum_{k=1}^{N_t} E[X_k|N_t] = N_t E[X_1]$$

なので

$$V\left(E\left[\sum_{k=1}^{N_t} X_k \;\middle|\; N_t\right]\right) = V(N_t E[X_1]) = E[X_1]^2 V(N_t).$$

よって命題 3.1 から両者を加えて

$$\begin{aligned} V(S_{N_t}) &= E[N_t]V(X_1) + E[X_1]^2 V(N_t) \\ &= (\lambda t + o(t))V(X_1) + E[X_1]^2(\lambda^3 t V(W_1) + o(t)) \\ &= \lambda t[V(X_1) + \lambda^2 E[X_1]^2 V(W_1)] + o(t) \end{aligned}$$

が成り立つ．Cramér-Lundberg モデルの場合は (N_t) は Poisson 過程だから $E[N_t] = V(N_t) = \lambda t$ だから

$$V(S_{N_t}) = E[N_t]V(X_1) + E[X_1]^2 V(N_t) = \lambda t(V(X_1) + E[X_1]^2) = \lambda t E[X_1^2]$$

が成り立つ．以上を纏めると次を得る．

定理 13.1. 次が成立する.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[S_{N_t}]}{t}=\lambda E[X_1], \tag{13.4}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{V(S_{N_t})}{t}=\lambda[V(X_1)+\lambda^2E[X_1]^2V(W_1)]. \tag{13.5}$$

特に Cramér-Lundberg モデルの場合は

$$E[S_{N_t}]=\lambda tE[X_1], \tag{13.6}$$

$$V(S_{N_t})=\lambda tE[X_1^2] \tag{13.7}$$

が成り立つ.

今までは平均を取った形であるが，pathwise の漸近挙動も調べることができて，次が成り立つ.

定理 13.2. $t\to\infty$ のとき次が成立する.

$$\frac{S_{N_t}}{t}\to\lambda E[X_1],\qquad \text{a.s.}, \tag{13.8}$$

$$\frac{S_{N_t}-\lambda tE[X_1]}{\sqrt{\lambda t\{V(X_1)+\lambda^2E[X_1]^2V(W_1)\}}}\xrightarrow{d}N(0,1). \tag{13.9}$$

証明　(13.8) は

$$\frac{S_{N_t}}{t}=\frac{S_{N_t}}{N_t}\frac{N_t}{t}$$

と書いて $\frac{S_n}{n}\to E[X_1]$ と $\frac{N_t}{t}\to\lambda$ が概収束の意味で成立することに注意すればよい.

(13.9) を示そう.

$$\begin{aligned}S_{N_t}-\lambda tE[X_1]&=S_{N_t}-\lambda T_{N_t}E[X_1]+\lambda E[X_1](T_{N_t}-t)\\&=\sum_{k=1}^{N_t}(X_k-\lambda E[X_1]W_k)+\lambda E[X_1](T_{N_t}-t).\end{aligned}$$

ここで

$$Y_k=X_k-\lambda E[X_1]W_k$$

とおくと，これは i.i.d. で平均は 0, 分散は独立性から

$$V(Y_k)=V(X_k)+\lambda^2E[X_1]^2V(W_k)$$

となる.（この形が (13.5) の S_{N_t} の分散の形に反映している訳である.）ここで Anscombe の定理定理 12.2 を用いると $t\to\infty$ のとき

$$\frac{S_{N_t}-\lambda T_{N_t}E[X_1]}{\sqrt{\lambda t(V(X_k)+\lambda^2E[X_1]^2V(W_k))}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

が成り立つ．$S_{N_t} - \lambda t E[X_1]$ との差 $\lambda E[X_1](T_{N_t} - t)$ があるが，これは $T_{N_t} - t$ が何かに法則収束するという事実があるので $\sqrt{\lambda t(V(X_k) + \lambda^2 E[X_1]^2 V(W_k))}$ で割ると，0 に確率収束する．従って

$$\frac{S_{N_t} - \lambda t E[X_1]}{\sqrt{(V(X_k) + \lambda^2 E[X_1]^2 V(W_k))N_t}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

が従う． □

<u>保険金計算</u>

S_{N_t} の期待値は

$$E[S_{N_t}] = \lambda E[X_1]t + o(t)$$

であった．保険料収入を $p(t)$ とすると

$$p(t) = E[S_{N_t}] \quad \text{or} \quad p(t) = \lambda E[X_1]t$$

とするのが自然である．これはゲーム論的には公平というわけだが，この場合は保険会社は必ず破産する．実際はこれに上乗せ ρ を加えて

$$p(t) = (1+\rho)E[S_{N_t}] \quad \text{or} \quad p(t) = (1+\rho)\lambda E[X_1]t$$

と設定する．このような考え方にはいくつかの手法があり，次のようなものがよく使われる．

純 (公平) 原理	$p_{\mathrm{Net}}(t) = E[S_{N_t}]$
平均原理	$p_{\mathrm{EV}}(t) = (1+\rho)E[S_{N_t}]$
分散原理	$p_{\mathrm{Var}}(t) = E[S_{N_t}] + \alpha V(S_{N_t})$
標準偏差原理	$p_{\mathrm{SD}}(t) = E[S_{N_t}] + \alpha\sqrt{V(S_{N_t})}$

14.　請求総額の分布

<u>裾の厚さ</u>

末尾確率について復習しよう．X を確率変数とするとき

$$P(X > x) = 1 - F(x), \quad x > 0 \tag{14.1}$$

を末尾確率と呼ぶ．$x > 0$ に限ったのは非負確率変数だけ扱うからである．$\overline{F} = 1 - F$ という記法を使う．この末尾確率の重さを指数関数との比較で表す．

定義 14.1. 末尾確率に関し

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty \quad \text{for some } \lambda > 0 \tag{14.2}$$

のとき裾が軽いといい，

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} > 0 \quad \text{for all } \lambda > 0 \tag{14.3}$$

のとき裾が重いという．

例 14.1. 指数分布やガンマ分布は裾の軽い分布である．

一方裾の重い分布の典型が次の Pareto 分布である．

$$\overline{F}(x) = \frac{\kappa^\alpha}{(\kappa + x)^\alpha}. \tag{14.4}$$

統計解析：超過平均

超過平均関数の概念を導入する．

定義 14.2. 確率変数 X の分布関数を F とし $x_l = \inf\{x; F(x) > 0\}$, $x_r = \sup\{x; F(x) < 1\}$ と定める．このとき**超過平均関数** e_F を

$$e_F(u) = E[Y - u | Y > u], \quad u \in (x_l, x_r) \tag{14.5}$$

で定める．$e_F(u)$ は閾値 u を超える超過平均という．

$e_F(u)$ は F を用いて次のようにあらわされる．

$$e_F(u) = \frac{1}{\overline{F}(u)} \int_u^\infty \overline{F}(y)\, dy, \quad u \in [0, x_r). \tag{14.6}$$

このとき

$$\frac{1}{e_F(u)} = \frac{\overline{F}(u)}{\displaystyle\int_u^\infty \overline{F}(y)\, dy} = -\left(\log \int_u^\infty \overline{F}(y)\, dy\right)'$$

となるので，両辺を積分して

$$\int_0^x \frac{1}{e_F(u)}\, du = -\left[\log \int_u^\infty \overline{F}(y)\, dy\right]_0^x = -\log \int_x^\infty \overline{F}(y)\, dy + \log \int_0^\infty \overline{F}(y)\, dy.$$

よって

$$\exp\left\{-\int_0^x \frac{1}{e_F(u)}\, du\right\} = \frac{\int_x^\infty \overline{F}(y)\, dy}{\int_0^\infty \overline{F}(y)\, dy} = \frac{e_F(x)\overline{F}(x)}{e_F(0)\overline{F}(0)} = \frac{e_F(x)\overline{F}(x)}{e_F(0)}.$$

整理して

$$\overline{F}(x) = \frac{e_F(0)}{e_F(x)} \exp\left\{ - \int_0^x \frac{1}{e_F(u)}\, du \right\}$$

が成り立つことが分かる．

15.　正則変動関数

正則変動関数

Pareto 分布や対数ガンマ分布などの裾野関数は次のような形である

$$\overline{F}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}, \quad x > 0.$$

ここで $\alpha > 0$ で L は $(0, \infty)$ 上の非負関数で任意の $x > 0$ に対し

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1 \tag{15.1}$$

を満たす．そこで次のような定義を与える．

定義 15.1. $(0, \infty)$ で定義された非負関数 L が任意の $x > 0$ に対して (15.2) を満たすとき**緩変動関数**という．但し，L は有界区間では有界であることを仮定する．

また $(0, \infty)$ で定義された非負関数 Z が，ある緩変動関数 L と $\rho \in \mathbb{R}$ が存在して

$$Z(x) = x^\rho L(x) \tag{15.2}$$

と表されるとき**正則変動関数**といい，ρ を指数という．.

また非負確率変数 X および分布関数 F が指数 $\alpha \geq 0$ の正則変動であることを，ある緩変動関数 L が存在して

$$\overline{F}(x) = P(X > x) = L(x) x^{-\alpha} \tag{15.3}$$

を満たすことと定義する．

この節で，緩変動関数，正則変動関数について後で必要になることをまとめておく．x^p の積分は $\frac{1}{p+1} x^{p+1}$ で次数が 1 増える．正則変動関数についても同様のことが成り立つ．つまり指数 p の正則変動関数を積分すると，指数 $p+1$ の正則変動関数になる．このことをまず示そう．但し証明はそれほど簡単ではない．Z を $(0, \infty)$ で定義された非負関数とする．このとき次のような記法を導入する．実数 p に対し

$$Z_p(x) = \int_0^x y^p Z(y)\, dy, \tag{15.4}$$

(15.5)
$$Z_p^*(x) = \int_x^\infty y^p Z(y)\,dy.$$

Z の無限大の近傍の挙動だけを問題にするので，x が大きなところだけで考えればよい．すると $Z_p(x)$, $Z_p^*(x)$, は値が ∞ になることも含めてすべての p に対して定義される．このとき次を得る．

命題 15.2. $Z \geq 0$ は緩変動するものとする．このとき Z_p は $t = \infty$ で $p < -1$ に対して収束し，$p > -1$ に対して発散する．また (15.5) の積分は $p < -1$ に対して収束し，$p > -1$ に対して発散する．

$p \geq -1$ ならば Z_p は指数 $p+1$ で正則変動する．$p < -1$ ならば Z_p^* は指数 $p+1$ で正則変動し，もし Z_{-1}^* が存在すれば $p+1=0$ に対しても成り立つ．

証明　$\xi > 1$ を固定しておく．$0 < s < t$ に対し

$$\begin{aligned}
Z_p(t\xi) &= \int_0^{t\xi} y^p Z(y)\,dy \\
&= \int_0^{s\xi} y^p Z(y)\,dy + \int_{s\xi}^{t\xi} y^p Z(y)\,dy \quad (y = \xi u, dy = \xi\,du) \\
&= Z_p(s\xi) + \int_s^t u^p \xi^p Z(\xi u)\xi\,du \\
&= Z_p(s\xi) + \xi^{p+1}\int_s^t u^p Z(\xi u)\,du
\end{aligned}$$

であるから

(15.6)
$$Z_p(t\xi) - Z_p(s\xi) = \xi^{p+1}\int_s^t u^p Z(\xi u)\,du$$

が成り立つ．

$p+1 > 0$ のとき $\xi^{p+1} > 1$ だから $\varepsilon > 0$ を $\xi^{p+1}(1-\varepsilon) > 1$ となるようにとることができる．この $\varepsilon > 0$ に対し，緩変動の条件から η を大きくとると，$x \geq \eta$ のとき

$$(1-\varepsilon)Z(x) < Z(x\xi) < (1+\varepsilon)Z(x)$$

と出来る．よって $t > s > \eta$ のとき

$$\begin{aligned}
Z_p(t\xi) - Z_p(s\xi) &= \xi^{p+1}\int_s^t u^p Z(\xi u)\,du \\
&\geq \xi^{p+1}(1-\varepsilon)\int_s^t u^p Z(u)\,du = \xi^{p+1}(1-\varepsilon)(Z_p(t) - Z_p(s))
\end{aligned}$$

が成立する．よって t の代わりに $t\xi^{n-1}$, s の代わりに $t\xi^{n-2}$ として

$$Z_p(t\xi^n) - Z_p(t\xi^{n-1}) \geq \xi^{p+1}(1-\varepsilon)(Z_p(t\xi^{n-1}) - Z_p(t\xi^{n-2})).$$

これで次数が一つ下がったから帰納的に

$$Z_p(t\xi^n) - Z_p(t\xi^{n-1}) \geq \xi^{(p+1)(n-1)}(1-\varepsilon)^{n-1}(Z_p(t\xi) - Z_p(t)).$$

n について加えると

$$Z_p(t\xi^n) - Z_p(t) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{(p+1)(n-1)}(1-\varepsilon)^k (Z_p(t\xi) - Z_p(t)).$$

ここで $n \to \infty$ とすれば Z_p が発散することが分かる．

次に $p+1<0$ のとき，$\xi^{p+1} < 1$ だから $\varepsilon > 0$ を $\xi^{p+1}(1+\varepsilon) < 1$ となるようにとることができる．この ε に対し，緩変動の条件から η を大きくとると，$x \geq \eta$ のとき

$$(1-\varepsilon)Z(x) < Z(x\xi) < (1+\varepsilon)Z(x)$$

と出来る．よって $t > s > \eta$ のとき

$$\begin{aligned} Z_p(t\xi) - Z_p(s\xi) &= \xi^{p+1} \int_s^t u^p Z(\xi u)\, du \\ &\leq \xi^{p+1}(1+\varepsilon) \int_s^t u^p Z(u)\, du = \xi^{p+1}(1+\varepsilon)(Z_p(t) - Z_p(s)). \end{aligned}$$

よって t の代わりに $t\xi^{n-1}$, s の代わりに $t\xi^{n-2}$ として

$$Z_p(t\xi^n) - Z_p(t\xi^{n-1}) \leq \xi^{p+1}(1+\varepsilon)(Z_p(t\xi^{n-1}) - Z_p(t\xi^{n-2})).$$

これで次数が一つ下がった形だから帰納的に

$$Z_p(t\xi^n) - Z_p(t\xi^{n-1}) \leq \xi^{(p+1)(n-1)}(1+\varepsilon)^{n-1}(Z_p(t\xi) - Z_p(t)).$$

n について加えると

$$\begin{aligned} Z_p(t\xi^n) - Z_p(t) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{(p+1)(n-1)}(1+\varepsilon)^k (Z_p(t\xi) - Z_p(t)) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{(p+1)(n-1)}(1+\varepsilon)^k (Z_p(t\xi) - Z_p(t)). \end{aligned}$$

これで $n \to \infty$ として，Z_p が有界であることが分かる．

$p+1 \geq 0$ の場合を考えよう．Z_p が収束すれば緩変動は明らかであるから証明する必要はない．$Z_p(\infty) = \infty$ の場合を考える．$x > 0$ を固定しておく．さて，$0 < \eta < t$ に対して，(15.6) から

$$Z_p(t\xi) - Z_p(s\xi) = Z_p(s\xi) + \xi^{p+1} \int_\eta^t u^p Z(\xi u)\, du$$

である．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，Z は緩変動するから η を十分大きくとれば $u > \eta$ に対し

$$(1-\varepsilon)Z(u) < Z(xu) < (1+\varepsilon)Z(u)$$

と出来る．従って

$$\begin{aligned}
Z_p(\eta x) + (1-\varepsilon)x^{p+1}\int_\eta^t u^p Z(u)\,du &\le Z_p(\eta x) + x^{p+1}\int_\eta^t u^p Z(xu)\,du \\
&= Z_p(tx) \\
&\le Z_p(\eta x) + (1+\varepsilon)x^{p+1}\int_\eta^t u^p Z(u)\,du \\
&\le Z_p(\eta x) + (1+\varepsilon)x^{p+1}\int_0^t u^p Z(u)\,du \\
&\le Z_p(\eta x) + (1+\varepsilon)x^{p+1} Z_p(t).
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
&Z_p(\eta x) + (1-\varepsilon)x^{p+1}\int_\eta^t u^p Z(u)\,du \\
&\qquad = Z_p(\eta x) + (1-\varepsilon)x^{p+1}\left(\int_0^t u^p Z(u)\,du - \int_0^\eta u^p Z(u)\,du\right) \\
&\qquad \ge (1-\varepsilon)x^{p+1}(Z_p(t) - Z_p(\eta)).
\end{aligned}$$

二つ合わせて

$$(1-\varepsilon)x^{p+1}(Z_p(t) - Z_p(\eta)) \le Z_p(tx) \le Z_p(\eta x) + (1+\varepsilon)x^{p+1} Z_p(t) \tag{15.7}$$

が示せる．両辺を $Z_p(t)$ で割って

$$(1-\varepsilon)x^{p+1}\frac{Z_p(t) - Z_p(\eta)}{Z_p(t)} \le \frac{Z_p(tx)}{Z_p(t)} \le \frac{Z_p(\eta x)}{Z_p(t)} + (1+\varepsilon)x^{p+1}.$$

ここで $t \to \infty$ とすれば

$$(1-\varepsilon)x^{p+1} \le \varliminf_{t\to\infty} \frac{Z_p(tx)}{Z_p(t)} \le \varlimsup_{t\to\infty} \frac{Z_p(tx)}{Z_p(t)} \le (1+\varepsilon)x^{p+1}.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Z_p(tx)}{Z_p(t)} = x^{p+1}$$

となり Z_p は指数 $p+1$ の正則変動関数であることが分かる． □

これを利用すると次の緩変動関数の表現が得られる．

命題 15.3. $Z \geq 0$ は緩変動するものとする．Z は次の表現を持つ．

$$Z(x) = a(x) \exp\left(\int_1^x \frac{\varepsilon(y)}{y}\, dy\right). \tag{15.8}$$

但し $x \to \infty$ のとき $\varepsilon(x) \to 0$, $a(x) \to c \in (0, \infty)$ である．

証明　この形をしている関数が緩変動であることは明らかだろう．

逆を示すために，命題 15.2 で使った関数 Z_p の $p = 0$ の場合を使う．Z_0 は指数 1 の正則変動関数であることを命題 15.2 で示した．その上で

$$\frac{Z(y)}{Z_0(y)} = \frac{\eta(y)}{y} \tag{15.9}$$

とおけば η は緩変動関数になる．$Z_0'(y) = Z(y)$ に注意すれば（意味は絶対連続関数としての微分である），

$$(\log Z_0(y))' = \frac{\eta(y)}{y} \tag{15.10}$$

であるから t から tx まで積分して

$$\begin{aligned}
\log \frac{Z_0(tx)}{Z_0(t)} &= \int_t^{tx} \frac{\eta(y)}{y}\, dy \quad (y = tu, dy = tdu) \\
&= \int_1^x \frac{\eta(tu)}{tu} t\, du \\
&= \int_1^x \frac{\eta(tu)}{u}\, du \\
&= \eta(t) \int_1^x \frac{\eta(tu)}{\eta(t)} \frac{du}{u}
\end{aligned}$$

Z_0 は指数 1 の正則変動関数だから 左辺は $\log x$ に収束する．$t \to \infty$ のときの次の積分の収束を考える．

$$\int_1^x \frac{\eta(tu)}{\eta(t)} \frac{du}{u}$$

非負であるから，列 $\{t_n\}$ を取ってこの積分が極限 $c \in [0, \infty]$ に収束するようにできる．η は緩変動関数だから Fatou の定理から

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^x \frac{\eta(t_n u)}{\eta(t_n)} \frac{du}{u} \geq \int_1^x \lim_{n\to\infty} \frac{\eta(t_n u)}{\eta(t_n)} \frac{du}{u} = \int_1^x \frac{du}{u} = \log x$$

より，$c \geq \log x$ となる．それゆえ $\eta(t_n)$ は収束し，その極限を a とすると $ac = \log x$ で $c \geq \log x$ であったから $a \leq 1$ でなければならない．$\{t_n\}$ は任意の数列の部分列にできる

ので，このことは η が $t=\infty$ で有界であることを示している．ところで $\eta(t_n)\to a$ であったから，任意の u で $\eta(t_n u)\to a$ である．有界収束定理から

$$\int_1^x \frac{\eta(t_n u)}{u}\,du \to \int_1^x a\frac{1}{u}\,du = a\log x.$$

ところでこれが $\log x$ に等しいのだから $a=1$ でなければならない．任意の数列から収束する部分列 t_n がとれ，$\eta(t_n)$ の極限は，必ず 1 なので，これは $\lim_{t\to\infty}\eta(t)=1$ を意味する．

先ほどの議論を $t=1$ の場合に使うと

$$\log\frac{Z_0(x)}{Z_0(1)} = \int_1^x \frac{\eta(y)}{y}\,dy$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{Z_0(x)}{Z_0(1)} &= \exp\left\{\int_1^x \frac{\eta(y)}{y}\,dy\right\} = \exp\left\{\int_1^x \frac{\eta(y)-1}{y}\,dy + \int_1^x \frac{dy}{y}\right\}\\ &= \exp\left\{\int_1^x \frac{\eta(y)-1}{y}\,dy + \log x\right\} = x\exp\left\{\int_1^x \frac{\eta(y)-1}{y}\,dy\right\}.\end{aligned}$$

ここで (15.9) から

$$\begin{aligned}Z(x) &= \frac{\eta(x)}{x}Z_0(x) = \frac{\eta(x)}{x}Z_0(1)x\exp\left\{\int_1^x \frac{\eta(y)-1}{y}\,dy\right\}\\ &= Z_0(1)\eta(x)\exp\left\{\int_1^x \frac{\eta(y)-1}{y}\,dy\right\}\end{aligned}$$

の表示を得る．$a(x)=Z_0(1)\eta(x)$, $\varepsilon(x)=\eta(x)-1$ が求める関数になる． □

命題 15.3 の表示を使うと緩変動関数 L は，次を満たすことが容易に確かめられる．任意の $\delta>0$ に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(x)}{x^\delta}=0, \quad \text{and} \quad \lim_{x\to\infty} x^\delta L(x)=\infty. \tag{15.11}$$

裾野の条件はモーメントの存在と次のような関係にある．X が指数 α の正則変動であるとすると

$$E[X^\delta]\begin{cases} =\infty & \text{for } \delta>\alpha,\\ <\infty & \text{for } \delta<\alpha.\end{cases} \tag{15.12}$$

実際

$$E[X^\delta] = \int_0^\infty x^\delta dF(x) = \int_0^\infty dF(x)\int_0^x \delta u^{\delta-1}\,du = \int_0^\infty \delta u^{\delta-1}\,du\int_{(u,\infty)} dF(x)$$

$$= \int_0^\infty \delta \overline{F}(u) u^{\delta-1}\, du = \int_0^\infty \delta L(x) u^{-\alpha} u^{\delta-1}\, du = \int_0^\infty \delta L(x) u^{\delta-\alpha-1}\, du.$$

$L(x)$ はどんな x^ε より小さいから (15.12) が得られる．

請求総額過程 S_{N_t} の分布を知ることは重要であるが，より簡単な問題である部分和

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \geq 1$$

の分布について考えよう．

補題 15.4. X_1, X_2 を独立で，指数 α の正則変動非負確率変数とする:

$$\overline{F}_i(x) = P(X_i > x) = \frac{L_i(x)}{x^\alpha}. \tag{15.13}$$

L_i は緩変動関数であるとする．すると，$X_1 + X_2$ は同じ指数 α の正則変動である．より正確に言うと

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 > x) &= [P(X_1 > x) + P(X_2 > x)](1 + o(1)) \\ &= x^{-\alpha}[L_1(x) + L_2(x)](1 + o(1)). \end{aligned} \tag{15.14}$$

証明　$X_1 + X_2$ の分布関数を G とする．$\{X_1 + X_2 > x\} \supset \{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\}$ だから

$$\begin{aligned} \overline{G}(x) &\geq P(\{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\}) \\ &= P(X_1 > x) + P(X_2 > x) - P(\{X_1 > x\}) \cap \{X_2 > x\}) \\ &= \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x) - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \\ &= \overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x) - \overline{F}_1(x)\overline{F}_2(x). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \varliminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} &\geq \varliminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x) - \overline{F}_1(x)\overline{F}_2(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \\ &= 1 - \varlimsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_1(x)\overline{F}_2(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

また $0 < \delta < \frac{1}{2}$ に対し

$$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1-\delta)\} \cup \{X_2 > (1-\delta)\} \cup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\}$$

が成り立つので

$$\overline{G}(x) \leq \overline{F}_1((1-\delta)x) + \overline{F}_2((1-\delta)x) + \overline{F}_1(\delta x)\overline{F}_2(\delta x)$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\delta)^{-\alpha}x^{-\alpha}L_1((1-\delta)x) + (1-\delta)^{-\alpha}x^{-\alpha}L_2((1-\delta)x) \\
&\quad + \delta^{-\alpha}x^{-\alpha}L_1(\delta x)\delta^{-\alpha}x^{-\alpha}L_2(\delta x) \\
&= (1-\delta)^{-\alpha}x^{-\alpha}(L_1((1-\delta)x) + L_2((1-\delta)x)) + \delta^{-2\alpha}x^{-2\alpha}L_1(\delta x)L_2(\delta x)
\end{aligned}
$$

最後の 2 つの項をそれぞれ

$$\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x) = x^{-\alpha}L_1(x) + x^{-\alpha}L_2(x) = x^{-\alpha}(L_1(x) + L_2(x))$$

との比を取って $x \to \infty$ の極限を取る．最初の項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-\delta)^{-\alpha}x^{-\alpha}(L_1((1-\delta)x) + L_2((1-\delta)x))}{x^{-\alpha}(L_1(x) + L_2(x))} \\
&\qquad = (1-\delta)^{-\alpha}\frac{L_1((1-\delta)x) + L_2((1-\delta)x))}{L_1(x) + L_2(x)} \\
&\qquad = (1-\delta)^{-\alpha}\frac{L_1(x)(1+o(1)) + L_2(x)(1+o(1))}{L_1(x) + L_2(x)} \\
&\qquad = (1-\delta)^{-\alpha}\left(1 + \frac{L_1(x)o(1) + L_2(x)o(1)}{L_1(x) + L_2(x)}\right) \\
&\qquad \to (1-\delta)^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

2 番目の項は

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^{-2\alpha}x^{-2\alpha}L_1(\delta x)L_2(\delta x)}{x^{-\alpha}(L_1(x) + L_2(x))} &= \delta^{-2\alpha}x^{-\alpha}\frac{L_1(\delta x)L_2(\delta x)}{(L_1(x) + L_2(x))} \\
&= \delta^{-2\alpha}x^{-\alpha}\frac{L_1(x)(1+o(1))L_2(x)(1+o(1))}{(L_1(x) + L_2(x))} \\
&= \delta^{-2\alpha}x^{-\alpha}L_1(x)(1+o(1))\frac{L_2(x)(1+o(1))}{(L_1(x) + L_2(x))} \\
&\le \delta^{-2\alpha}x^{-\alpha}L_1(x)(1+o(1))(1+o(1)) \to 0.
\end{aligned}
$$

ここで 緩変動関数はどんなべきよりも発散が遅いことを使った．以上の計算で

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \le (1-\delta)^{-\alpha}$$

が分かった．$\delta > 0$ は任意だから

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \le 1$$

となり下からの評価と合わせて結論を得る． □

L_1, L_2 が緩変動ならば，$L_1 + L_2$, $L_1 \cdot L_2$ も緩変動になる．これは定義から容易に確かめられる．例えば $L_1 + L_2$ についてみてみよう．

$$\left|\frac{L_1(tx) + L_2(tx)}{L_1(x) + L_2(x)} - 1\right| = \left|\frac{L_1(tx) - L_1(x) + L_2(tx) - L_2(x)}{L_1(x) + L_2(x)}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left|\frac{L_1(tx)-L_1(x)}{L_1(x)+L_2(x)}\right| + \left|\frac{L_2(tx)-L_2(x)}{L_1(x)+L_2(x)}\right| \\
&\le \left|\frac{L_1(tx)-L_1(x)}{L_1(x)}\right| + \left|\frac{L_2(tx)-L_2(x)}{L_2(x)}\right| \\
&\le \left|\frac{L_1(tx)}{L_1(x)}-1\right| + \left|\frac{L_2(tx)}{L_2(x)}-1\right| \to 0
\end{aligned}
$$

(15.14) の表現に $1+o(1)$ が出てくるが，これは極限が定数なので緩変動である．よって $[L_1(x)+L_2(x)](1+o(1))$ は緩変動関数になる．従って X_1+X_2 は指数 α で緩変動になることが分かるのである．

さて，上の補題を繰り返すと次の結果が得られる．

系 15.5. X_1, X_2,…, X_n を非負の i.i.d. で指数 α で正則変動をする確率変数列とする．部分和 S_n に対し次が成立する．

(15.15)
$$P(S_n > x) = n\overline{F}(x)(1+o(1)), \quad \text{as } x \to \infty.$$

ところで最大値 M_n を

(15.16)
$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

で定めると

$$
\begin{aligned}
P(M_n > x) &= 1 - P(M_n \le x) \\
&= 1 - P(X_1 \le x, \dots, X_n \le x) \\
&= 1 - F(x)^n \\
&= (1-F(x))\sum_{k=0}^{n-1} F(x)^k \\
&= (1-F(x))\sum_{k=0}^{n-1} (1+o(1)) \\
&= n\overline{F}(x)(1+o(1)).
\end{aligned}
$$

つまり $P(M_n > x) = \overline{F^n}(x)$ だから

(15.17)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^n}(x)}{\overline{F}(x)} = n$$

が成立する．これと系 15.5 の結果を合わせると，

(15.18)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(S_n > x)}{P(M_n > x)} = 1$$

が得られ，正則変動の確率変数の末尾に関して，和 S_n は最大値 M_n の影響が支配的であることを示している．

劣指数的分布

正則変動の場合は $P(S_n > x) = P(M_n > x)(1 + o(1))$ as $x \to \infty$ が成り立った．分布 F の言葉で言えば

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n$$

そこで次のような定義を与える．

定義 15.6. X の分布 F が劣指数的であることを，$n \geq 2$ となるすべての自然数に対し

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n \tag{15.19}$$

が成立することと定義する．このクラスを $\mathscr{S}$ と表す．

末尾関数が正則変動の場合はこの関係式が成り立つので $\mathscr{S}$ はより広いクラスである．ところで $\overline{F^{n*}}(x) = P(S_n > x) \geq P(M_n > x) = \overline{F^n}(x)$ だから (15.19) に注意して

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{n}}(x)}{\overline{F}(x)} = n \tag{15.20}$$

は常に成立する．劣指数的は，これが等号で成立することを意味している．

上の定義 15.6 のすべての $n \geq 2$ は，$n = 2$ のときだけでよい．そこで $n = 2$ のときを仮定して成り立つことをまず挙げる．その前に一般に次の等式が成立することに注意しておく．

$$\frac{\overline{G * F}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{\overline{G} * F(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_{[0,x]} \frac{\overline{G}(x-t)}{\overline{F}(x)}\, dF(x). \tag{15.21}$$

実際

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{G * F}(x)}{\overline{F}(x)} &= \frac{1 - G * F(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{\overline{F}(x) + F(x) - G * F(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \frac{(1-G) * F(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{\overline{G} * F(x)}{\overline{F}(x)}
\end{aligned}$$

から分かる．以下この式を何度か使う．

補題 15.7. 次が成り立つ．

(1) (15.19) が $n = 2$ のとき成立しているとする．すると次の収束が y の有界な集合上で一様収束の意味で成り立つ．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1 \tag{15.22}$$

(2) (15.22) が y の有界集合上で一様に収束するとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して

(15.23)
$$\lim_{x\to\infty} e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) = \infty, \qquad \text{as } x \to \infty.$$

証明 (1) $0 < y \le x$ に対し

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_{[0,x]} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\, dF(t) \quad (\because\ (15.21)) \\
&= 1 + \int_{[0,y]} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\, dF(t) + \int_{(y,x]} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\, dF(t) \\
&\ge 1 + \int_{[0,y]} dF(t) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \int_{(y,x]} dF(t) \\
&= 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)).
\end{aligned}$$

整理して

$$\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y) \ge \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}(F(x) - F(y)).$$

x を十分大きくとって $F(x) - F(y) \neq 0$ として両辺を $F(x) - F(y)$ で割ると

$$1 \le \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \le \frac{1}{F(x) - F(y)}\left(\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 - F(y)\right).$$

ここで $x \to \infty$ とすると仮定から右辺は

$$\frac{1}{1-F(y)}(2 - 1 - F(y)) = 1$$

に収束する．これで (15.22) の各点収束が分かるが，一様収束性は単調関数であることから分かる．

(2) は (1) の結果から $\overline{F}(\log x)$ が緩変動であることが分かるから (15.11) の結果から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $x^{\varepsilon}\overline{F}(\log x) \to \infty$ が従う．ここで x の代わりに e^x を代入して $e^{\varepsilon x}\overline{F}(x) \to \infty$ が分かる． □

上の (2) が劣指数的の呼称を正当化している．これは裾野がどんな指数関数的減衰するものより大きいことを意味する．「劣」は減少のスピードが遅いという意味で，関数自体が指数関数より小さいという意味ではない．

以上の準備の下で (15.17) を $n = 2$ のときだけ仮定すればよいことを示そう．

補題 15.8. もし

(15.24)
$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \le 2$$

が成り立つならば $F \in \mathscr{S}$ である．

証明　仮定と，(15.20) から，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)}=2$ が成り立つ．そこで，帰納法で示していく．$x\geq y>0$ に対し

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1+\int_{[0,x]}\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \quad (\because\ (15.21)\ ) \\
&= 1+\int_{[0,x-y]}\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t)+\int_{(x-y,x]}\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&= 1+I_1(x)+I_2(x).
\end{aligned}
$$

まず $I_1(x)$ は

$$
\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_{[0,x-y]}\left(\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}-n+n\right)\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&= \int_{[0,x-y]}\left(\frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}-n\right)\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t)+n\int_{[0,x-y]}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t)
\end{aligned}
$$

ここで y を十分大きくとると $x-t\geq x-(x-y)=y$ だから，帰納法の仮定で $\dfrac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)}-n$ は小さくなるから

$$
\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_{[0,x-y]}(o(1)+n)\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&= (n+o(1))\int_{[0,x-y]}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t)
\end{aligned}
$$

となる．更に

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,x-y]}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) &= \int_{[0,x]}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t)-\int_{(x-y,x]}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&= \frac{(1-F)*F(x)}{\overline{F}(x)}-\int_{(x-y,x]}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&= \frac{F(x)-F^{*}(x)}{\overline{F}(x)}-\int_{(x-y,x]}\frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&= \frac{F(x)-1+(1-F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)}-J(x,y) \\
&= -1+\frac{\overline{F^{2*}}(x))}{\overline{F}(x)}-J(x,y) \\
&= -1+2+o(1)-J(x,y) \\
&= 1+o(1)-J(x,y).
\end{aligned}
$$

$J(x,y)$ については

$$
\begin{aligned}
J(x,y) &= \int_{(x-y,x]} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&\leq \int_{(x-y,x]} \frac{1}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&= \frac{F(x)-F(x-y)}{\overline{F}(x)} \\
&= \frac{\overline{F}(x-y)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} - 1 \to 0 \quad (\text{補題 } 15.7 \text{ の } (1))
\end{aligned}
$$

が成り立つ．以上で $I_1(x) \to n$ が示せた．

$I_2(x)$ については $x-y \leq t \leq x$ のとき $0 \leq x-t \leq y$ である．y を固定しておくと $\dfrac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}$ は有界であるから M で抑えて

$$
\begin{aligned}
I_2(x) &= \int_{(x-y,x]} \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&\leq M \int_{(x-y,x]} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \leq MJ(x,y) \to 0
\end{aligned}
$$

が分かる．以上で帰納法が完結した． □

命題 15.9. $F \in \mathscr{S}$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して正数 K が存在して

$$
\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1+\varepsilon)^n, \quad x \geq 0,\ n \geq 1 \tag{15.25}
$$

が成り立つ．

証明　$\alpha_n = \sup_{x\geq 0}\{\overline{F^{n*}}(x)/\overline{F}(x)\}$ とおく．(15.21) から

$$
\frac{\overline{F^{(n+1)*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \int_{[0,x]} \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t)
$$

であるから $T > 0$ に対し

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0\leq x\leq T} \int_{[0,x]} \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) + \sup_{x\geq T} \int_{[0,x]} \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-y)} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\,dF(t) \\
&\leq 1 + \sup_{0\leq x\leq T} \int_{[0,x]} \frac{1}{\overline{F}(x)}\,dF(t) + \sup_{x\geq T} \int_{[0,x]} \alpha_n \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\,dF(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le 1 + \sup_{0\le x\le T}\frac{1}{\overline{F}(x)} + \alpha_n \sup_{x\ge T}\frac{(1-F)*F}{\overline{F}(x)} \\
&\le 1 + \frac{1}{\overline{F}(T)} + \alpha_n \sup_{x\ge T}\frac{F(x)-F^{2*}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \frac{1}{\overline{F}(T)} + \alpha_n \sup_{x\ge T}\frac{\overline{F^{2*}}(x)-\overline{F}(x)}{\overline{F}(x)} \\
&= 1 + \frac{1}{\overline{F}(T)} + \alpha_n \sup_{x\ge T}(\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1).
\end{aligned}
$$

$x\to\infty$ のとき $\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} \to 2$ だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し十分 T を大きくとれば $x \ge T$ のとき $\frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} - 1 \le 1+\varepsilon$ とできるから $A_T = \frac{1}{\overline{F}(T)}$ とおけば

$$
\alpha_{n+1} \le 1 + A_T + \alpha_n(1+\varepsilon)
$$

が成り立つ．従って $\beta_n = \alpha_n/(1+A_T)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
\beta_{n+1} &\le 1+\beta_n(1+\varepsilon) \le 1 + (1+\beta_{n-2}(1+\varepsilon))(1+\varepsilon) \\
&= 1 + (1+\varepsilon) + (1+\varepsilon)^2\beta_{n-2}\cdots \\
&= 1 + (1+\varepsilon) + (1+\varepsilon)^2 + \cdots + (1+\varepsilon)^{n-1}\beta_1 \\
&\le 1 + (1+\varepsilon) + (1+\varepsilon)^2 + \cdots + (1+\varepsilon)^{n-1} \\
&= \frac{(1+\varepsilon)^n - 1}{1+\varepsilon-1} \le \varepsilon^{-1}(1+\varepsilon)^n
\end{aligned}
$$

となる．従って

$$
\alpha_n \le (1+A_T)\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon)^{n-1}
$$

なので $K = (1+A_T)\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon)^{-1}$ とおけばよい． □

16. 複合ポアソン過程の時空分解

混合分布

以下でも確率変数は非負のもののみ考える．確率変数 S に対して，特性関数 (characteristic function) ϕ_S は

(16.1) $$\phi_S(\xi) = E[e^{i\xi S}], \quad \xi\in\mathbb{R}$$

で定義した．これは任意の確率変数に対して定義できる．それに対し積率母関数 (moment generating function) m_S は

(16.2) $$m_S(h) = E[e^{hS}], \quad h\in(-h_0,h_0)$$

で定義する．これは可積分条件が必要なので，積分が有限なところだけで意味を持つ．そのために定義域が制限されている．原点の近傍で有限であるための必要十分条件は，ある $\gamma > 0$, $c > 0$ が存在して

$$P(S > x) \le ce^{-\gamma x}, \quad x > 0,$$

が満たされることである．

非負確率変数列 (X_k) と非負整数値確率変数 N に対し，ランダムな部分和 $S_N = \sum_{j=1}^N X_j$ を考える．(X_j) と N が独立ならば，特性関数は

$$\phi_{S_N}(\xi) = m_N(\log \phi_{X_1}(\xi)) \tag{16.3}$$

となる．実際

$$\begin{aligned}\phi_{S_N}(\xi) &= E[E[e^{i\xi S_N}|N]] = E[E[e^{i\xi X_1}]^N] = E[\phi_{X_1}(\xi)^N] \\ &= E[e^{N\log \phi_{X_1}(\xi)}] = m_N(\log \phi_{X_1}(\xi))\end{aligned}$$

であるから．

例 16.1. (複合 Poisson 和) N が $\mathrm{Pois}(\lambda)$ のとき $h \in \mathbb{R}$ に対し

$$m_N(h) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{kh} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^h)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^h} = e^{-\lambda(1-e^h)}.$$

よって (16.3) から

$$\phi_{S_N}(\xi) = e^{-\lambda(1-\exp\log\phi_{X_1}(\xi))} = e^{-\lambda(1-\phi_{X_1}(\xi))}. \tag{16.4}$$

例 16.2. (複合幾何分布和) N がパラメーター p の幾何分布を持つとする:

$$P(N = k) = pq^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \text{ where } q = 1-p,\ 0 < p < 1.$$

さらに X_j は指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ を持つとする．

$$\begin{aligned}\phi_{X_j}(\xi) = E[e^{i\xi X_j}] &= \int_0^\infty e^{i\xi x}\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lambda\left[\frac{1}{i\xi-\lambda}e^{(i\xi-\lambda)x}\right]_0^\infty \\ &= -\lambda\frac{1}{i\xi-\lambda} \\ &= \lambda\frac{1}{\lambda-i\xi}.\end{aligned}$$

また

$$m_N(h) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kh} P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kh} pq^k = \frac{p}{1-e^h q}.$$

ただし $|h| < -\log q$. そこで $\log \phi_{X_1}(\xi)$ を代入して

$$\begin{aligned}\phi_{S_N}(\xi) &= \frac{p}{1-\frac{\lambda}{\lambda - i\xi} q} \\ &= \frac{p(\lambda - i\xi)}{(\lambda - i\xi) - \lambda q} \\ &= p\frac{(\lambda - i\xi) - \lambda q + \lambda q}{(\lambda - i\xi) - \lambda q} \\ &= p + \frac{\lambda pq}{\lambda p - i\xi}.\end{aligned}$$

この分布のもう少し具体的な表示を与えよう．J を二つの値を確率 p, q でとる確率変数とする．例えば

$$P(J=1) = p, \quad P(J=2) = q$$

とする．さらに Y を J と独立で指数分布 Exp(λp) を持つとする．そして

$$T = 1_{\{J=1\}} 0 + 1_{\{J=2\}} Y$$

と定めると，T は S_N と同じ分布を持つ．そこで T の特性関数を計算してみよう．

$$E[e^{i\xi T}] = P(J=1)E[e^{i\xi 0}] + P(J=2)E[e^{i\xi Y}] = p + q\frac{\lambda p}{\lambda p - i\xi}$$

となり，S_N と同じであることが分かる．T の分布関数は

$$F_T(x) = pF_0(x) + qF_Y(x)$$

となる．このような分布は混合分布と呼ばれる． □

定義 16.1. $p_1, \ldots, p_n$ を和が 1 となる正数とする．また $F_1, \ldots, F_n$ を分布関数とする．このとき次の分布関数

$$G(x) = p_1 F_1(x) + \cdots + p_n F_n(x) \tag{16.5}$$

から定まる分布を $F_1, \ldots, F_n$ の**混合分布**という．

　確率変数で表すこともできる．J を $P(J=k) = p_k$ となる確率変数，X_k を分布関数が F_k の確率変数で，J とは独立であるとする．このとき

$$Z = 1_{\{J=1\}} Y_1 + \cdots + 1_{\{J=n\}} Y_n$$

の分布が混合分布となる．特性関数は

$$\phi_Z(\xi) = p_1\phi_{Y_1}(\xi) + \cdots + p_n\phi_{Y_n}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{16.6}$$

で与えられる．

さて次に独立な複合 Poisson 過程の和は，再び複合 Poisson 過程になることを示そう．

命題 16.2. 独立な複合 Poisson 和

$$S_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_j^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{16.7}$$

が与えられているとする．ここで N_i は分布 $\mathrm{Pois}(\lambda_i)$ $\lambda_i > 0$ を持ち，各 i に対し，$(X_j^{(i)})_{j=1,\ldots}$ は i.i.d である．このとき和

$$\tilde{S} = S_1 + \cdots + S_n \tag{16.8}$$

は再び複合 Poisson 和で

$$\tilde{S} \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{N_\lambda} Y_k, \quad N_\lambda \sim \mathrm{Pois}(\lambda), \quad \lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \tag{16.9}$$

と表され，Y_k は i.i.d で混合分布

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad F_i = F_{X_1^{(i)}} \tag{16.10}$$

を持つ．

証明　S_i の特性関数は

$$\phi_{S_i}(\xi) = \exp\{-\lambda_i(1 - \phi_{X_1^{(i)}}(\xi))\}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

S_i の独立性から

$$\begin{aligned}
\phi_{\tilde{S}}(\xi) &= \prod_{i=1}^{n} \exp\{-\lambda_i(1 - \phi_{X_1^{(i)}}(\xi))\} \\
&= \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \lambda p_i(1 - \phi_{X_1^{(i)}}(\xi))\right\} \\
&= \exp\left\{-\lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i\phi_{X_1^{(i)}}(\xi)\right)\right\} \\
&= \exp\{-\lambda(1 - \phi_{Y_1}(\xi))\}, \quad (\ (16.6)).
\end{aligned}$$

□

例 **16.3.** (複合 Poisson 性の応用)

(1) 各年度 i ごとに保険金の額が変わる場合を考えよう．これらの保険金は i 年度に $X_j^{(i)}$ で与えられる i.i.d. の列で定まり，年度が違うと独立であるとする．i 年度の保険金の総計は

$$S_i = \sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} X_j^{(i)}$$

である．(N_t) と $X_j^{(i)}$ は独立であるから

$$\left(\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i} X_j^{(i)} \right)_{i=1,\dots,n} \overset{d}{=} \left(\sum_{j=1}^{N(i-1,i]} X_j^{(i)} \right)_{i=1,\dots,n}$$

が成り立つ．直感的には明らかであるが，特性関数を計算して

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} i\xi_i \sum_{j_i=N_{i-1}+1}^{N_i} X_{j_i}^{(i)}\right\}\right] \\
&= \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} i\xi_i \sum_{j_i=N_{i-1}+1}^{N_i} X_{j_i}^{(i)}\right\}; N(1)=k_1, N(1,2]=k_2,\dots,N(n-1,n]=k_n\right] \\
&= \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} i\xi_i \sum_{j_i=l_{i-1}+1}^{l_i} X_j^{(i)}\right\}; N(1)=k_1, N(1,2]=k_2,\dots,N(n-1,n]=k_n\right] \\
&= \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} i\xi_i \sum_{j_i=1}^{k_i} X_{j_i}^{(i)}\right\}; N(1)=k_1, N(1,2]=k_2,\dots,N(n-1,n]=k_n\right] \\
&= \sum_{k_1,\dots,k_n=0}^{\infty} E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} i\xi_i \sum_{j_i=1}^{N(i-1,i]} X_{j_i}^{(i)}\right\}; N(1)=k_1, N(1,2]=k_2,\dots,N(n-1,n]=k_n\right] \\
&= E\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} i\xi_i \sum_{j_i=1}^{N(i-1,i]} X_{j_i}^{(i)}\right\}\right]
\end{aligned}$$

ここで $l_i = k_1 + \dots + k_i$ とした．これで，特性関数が等しいことが分かった．$N(i-1,i]$ は互いに独立で分布 $\mathrm{Pois}(\mu(i-1,i])$ を持つ．これで 命題 16.2 が使えることが分かり，

$$S_1 + \dots + S_n \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{N_\lambda} Y_k.$$

ここで N_λ は分布 $\mathrm{Pois}(\lambda)$ を持ち，$\lambda = \mu(0,1] + \mu(1,2] + \dots + \mu(n-1,n] = \mu(n)$, $p_i = \frac{\mu(i-1,i]}{\lambda}$ で Y_k は i.i.d. 列で分布関数は $\sum_{i=1}^n p_i F_{X_1^{(i)}}$ の混合分布を持つ．

(2) n 種の独立な保険の銘柄を考え，それぞれの総和を

$$S_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_j^{(i)}, \quad N_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda_i)$$

とする．それらを総合して

$$\tilde{S} = S_1 + \cdots + S_n$$

は再び Poisson 和になる．$N_1 + \cdots + N_n \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1 + \ldots \lambda_n$ 個の Y_k の和として表され， Y_k は混合分布を持つ．この Y_k は次のように作られる．

(a) $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ を確率 $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ で引く．
(b) 銘柄 i の保険の請求分布の実現値を定める．

複合 Poisson 過程の時空分解

複合 Poisson 過程

$$S_t = \sum_{k=1}^{N_t} X_k, \quad t \geq 0$$

の到着時刻を (T_k) とする．(T_k, X_k) は $E = [0, \infty)^2$ に値を取る．E の Borel σ-field を $\mathscr{E}$ とかく．このとき

$$M(A) = \sharp\{k \geq 1; (T_k, X_k) \in A\}, \quad A \in \mathscr{E}, \tag{16.11}$$

が平均測度 $\nu = \mu \times dF$ の Poisson 彷徨測度を与える．即ち，互いに素な集合 A_1, A_2,. . . , A_n に対し

$$M(A_1), M(A_2), \ldots, M(A_n)$$

は互いに独立で $M(A_j)$ は $\mathrm{Pois}(\nu(A_j))$ に従う．$\nu(A_j) = \infty$ のときは $M(A_j) = \infty$ である．これらのことを示していこう．

定理 16.3. N_t の平均関数 $\mu(t)$ は絶対連続で正の密度関数 $\lambda(t)$ を持つとする．A_j を互いに素な集合とするとき次が成り立つ．

(1) 任意の $t \geq 0$ に対し

$$S_t^{(j)} = \sum_{k=1}^{N_t} X_k 1_{A_j}(T_k, X_k), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{16.12}$$

は互いに独立である．

(2) $S_t^{(j)}$ は次の複合 Poisson 和としての表現を持つ．

$$S_t^{(j)} \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{N_t} X_k 1_{A_j}(Y_k, X_k), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{16.13}$$

ここで Y_k は密度 $\frac{\lambda(x)}{\mu(t)}$, $0 \le x \le t$ を持つ N と X_i に独立な確率変数である．

証明 (1) μ は連続な密度 λ を持つから 定理 8.2 の順序統計量の性質から

$$(T_1, \ldots, T_k | N_t = k) \stackrel{d}{=} (Y_{(1)}, \ldots, Y_{(k)}).$$

ここで $Y_{(1)} \le \cdots \le Y_{(k)}$ は分布 $\lambda(x)/\mu(t)$ $0 \le x \le t$ をもつ i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_k$ の順序統計量である．命題 8.3 から

$$\left((S_t^{(j)}) | N_t = k\right)_{j=1,\ldots,n} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{l=1}^{k} X_l 1_{A_j}(Y_{(l)}, X_l)\right)_{j=1,\ldots,n} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{l=1}^{k} X_l 1_{A_j}(Y_l, X_l)\right)_{j=1,\ldots,n}.$$

ここで，N，(Y_i)，(X_i) は独立である．右辺は i.i.d. の和である．そこで $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, \ldots, S_t^{(n)})$ の特性関数 ϕ を考えると

$$\begin{aligned}
\phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) &= E[e^{i\xi_1 S_t^{(1)} + i\xi_2 S_t^{(2)} + \cdots + i\xi_n S_t^{(n)}}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[e^{i\xi_1 S_t^{(1)} + i\xi_2 S_t^{(2)} + \cdots + i\xi_n S_t^{(n)}}; N_t = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E[e^{i\xi_1 S_t^{(1)} + i\xi_2 S_t^{(2)} + \cdots + i\xi_n S_t^{(n)}} | N_t = k] P(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\exp\left\{i \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \xi_j X_l 1_{A_j}(Y_l, X_l)\right\}\right] P(N_t = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\exp\left\{i \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \xi_j X_l 1_{A_j}(Y_l, X_l)\right\}; N_t = k\right] \\
&= E\left[\exp\left\{i \sum_{l=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{n} \xi_j X_l 1_{A_j}(Y_l, X_l)\right\}\right].
\end{aligned}$$

右辺は複合 Poisson 和の形である．つまり，$\sum_{j=1}^{n} \xi_j X_l 1_{A_j}(Y_l, X_l)$ $l = 1, 2, \ldots$ という確率変数列の N_t 個の和である．この複合 Poisson 和の特性関数は (16.4) から $\phi_{S_N}(\xi) = e^{-\lambda(1-\phi_{X_1}(\xi))}$ という形であったから，これを用いて，

$$\begin{aligned}
&\log \phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \\
&\quad = -\mu(t)\left(1 - E\left[\exp\left\{i \sum_{j=1}^{n} \xi_j X_1 1_{A_j}(Y_1, X_1)\right\}\right]\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mu(t)\Biggl(1 - \sum_{k=1}^{n} E\biggl[\exp\biggl\{i\sum_{j=1}^{n}\xi_j X_1 1_{A_j}(Y_1, X_1)\biggr\}; (Y_1, X_1) \in A_k\biggr] \\
&\qquad\qquad - E[1; (Y_1, X_1) \notin A_1 \cup \cdots \cup A_n]\Biggr) \\
&= -\mu(t)\Biggl(\cancel{1} - \sum_{k=1}^{n} E[\exp\{i\xi_k X_1\}; (Y_1, X_1) \in A_k] \\
&\qquad\qquad - \biggl\{\cancel{1} - \sum_{k=1}^{n} P((Y_1, X_1) \in A_k)\biggr\}\Biggr) \\
&= -\mu(t)\sum_{k=1}^{n}\bigl(P((Y_1, X_1) \in A_k) - E[\exp\{i\xi_k X_1\}; (Y_1, X_1) \in A_k]\bigr) \\
&= -\mu(t)\sum_{k=1}^{n}\bigl(1 - P((Y_1, X_1) \notin A_k) - E[\exp\{i\xi_k X_1\}; (Y_1, X_1) \in A_k]\bigr) \\
&= -\mu(t)\sum_{k=1}^{n}\bigl(1 - E[1; (Y_1, X_1) \notin A_k] \\
&\qquad\qquad - E[\exp\{i\xi_k X_1 1_{A_k}(Y_1, X_1)\}; (Y_1, X_1) \in A_k]\bigr) \\
&= -\mu(t)\sum_{k=1}^{n}\bigl(1 - E[\exp\{i\xi_k X_1 1_{A_k}(Y_1, X_1)\}]\bigr) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\log\phi_{S_t^{(k)}}(\xi_k).
\end{aligned}
$$

最右辺につなぐ等式は端折っているが，まずある ξ_k だけ残して他の ξ_j を 0 にすることにより

$$
\log\phi_{S_t^{(k)}}(\xi_k) = -\mu(t)\bigl(1 - E[\exp\{i\xi_k X_1 1_{A_k}(Y_1, X_1)\}]\bigr) \tag{16.14}
$$

が示せ，再び元に戻れば示せる．右辺は $\log\phi_{S_t^{(k)}}(\xi_k)$ の和である．これは指数関数の指数の部分だけを計算しているので，元の特性関数の形でかくと

$$
\phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \prod_{k=1}^{n}\phi_{S_t^{(k)}}(\xi_k)
$$

となり，特性関数の積の形でかけているから，独立性が示せた．　□

上の証明は

$$
S = \sum_{k=1}^{N_t} 1_A(T_k, X_k) \tag{16.15}
$$

という確率変数に対しても同様に示せる．A を互いに素な集合とすれば，独立性が示せる．また $A \subseteq [0,t] \times [0,\infty)$ とすれば，$S = M(A)$ である．これが Poisson 分布である

ことは，特性関数 (16.14) の形に注意して

$$\begin{aligned}
\log \phi_S(\xi) &= -\mu(t)\big(1 - E[\exp\{i\xi 1_A(Y_1, X_1)\}]\big) \\
&= -\mu(t)\big(1 - E[\exp\{i\xi 1_A(Y_1, X_1)\}; (Y_1, X_1) \in A] \\
&\qquad - E[\exp\{i\xi 1_A(Y_1, X_1)\}; (Y_1, X_1) \notin A]\big) \\
&= -\mu(t)\big(1 - e^{i\xi} P((Y_1, X_1) \in A) - P((Y_1, X_1) \notin A)\big) \\
&= -\mu(t)\big(\cancel{1} - e^{i\xi} P((Y_1, X_1) \in A) - \cancel{1} + P((Y_1, X_1) \in A)\big) \\
&= -\mu(t) P((Y_1, X_1) \in A)(1 - e^{i\xi}).
\end{aligned}$$

これは Poisson 分布の特性関数（の指数）である，平均は

$$\mu(t) P((Y_1, X_1) \in A) = \mu(t) \int_A \frac{\lambda(s)}{\mu(t)}\, ds\, dF(x) = \int_A \lambda(s)\, ds\, dF(x).$$

これから (16.11) で定まる Poisson 彷徨測度は平均測度が $d\mu \times dF$ で与えられることが分かる．

例 16.4. (Cramér-Lundberg model)

(1) 時間分割

時間列 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t$ に対し

$$\Delta_1 = [0, t_1], \quad \Delta_j = (t_{j-1}, t_j], \quad j = 2, \ldots, n, \quad \Delta_{n+1} = (t_n, \infty) \tag{16.16}$$

とおく．すると

$$A_j = \Delta_j \times [0, \infty), \quad j = 1, 2, \ldots, n+1,$$

は $E = [0, \infty)^2$ の互いに素な集合である．定理 16.3 から

$$\sum_{k=1}^{N_t} X_k 1_{A_j}(T_k, X_k) = \sum_{k=N_{t_{j-1}+1}}^{N_{t_j}} X_k, \quad j = 1, \ldots, n$$

は独立であることが分かる．これはよく知られた複合 Poisson 過程の独立増分性を意味している．(N_t) が時間的に一様なときは，定常増分であることも容易にわかるも (すなわち $S_t - S_s \stackrel{d}{=} S_{t-s}$ $s < t$)．また複合 Poisson 和であることも 定理 16.3 から分る．

(2) 保険金額分割

保険金の額による $[0, \infty)$ の分割 B_1, B_2,..., B_{n+1} を考えよう．例えば

$$B_1 = [0, d_1], \quad B_2 = (d_1, d_2], \ldots B_n = (d_{n-1}, d_n], \quad B_{n+1} = (d_n, \infty), \tag{16.17}$$

但し $0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_n < \infty$．これは保険金額の階層化であり，再保険のときに使われる．集合

$$A_j = [0, t] \times B_j, \quad A'_j = (t, \infty) \times B_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1,$$

は時空の互いに素な分割を与える．再び 定理 16.3 から

$$S_t^{(j)} = \sum_{k=1}^{N_t} X_k 1_{A_j}(T_k, X_k) = \sum_{k=1}^{N_t} X_k 1_{B_j}(X_k), \quad j = 1, \ldots, n+1$$

は t を固定して，独立な確率変数になる．これらが時間に関して独立増分性を持つことは容易に予想される．それは N_t の独立増分性に起因すると言ってよい．しかし j に関しての独立性は，空間方向の分解だから独立性は自明ではない．

さて，再び 定理 16.3 の設定に戻って次を得る．

系 16.4. 定理 16.3 の仮定の下で $(S_t^{(j)})_{j=1,\ldots,n}$ は互いに独立で独立増分である．

証明　まず $S_t^{(j)}$ の独立増分性を示す．しばらく j は固定して考える．時間列 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_l = t$ に対し (16.16) のように Δ_i を定める．そして

$$B_i = A_j \cap (\Delta_i \times [0, \infty)), \quad i = 1, 2, \ldots, l$$

とおく．定理 16.3 から

$$\sum_{k=1}^{N_{t_l}} X_k 1_{B_i}(T_k, X_k) = \sum_{k=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_k 1_{A_j}(T_k, X_k) = S^{(j)}(t_{i-1}, t_i]$$

は互いに独立である．これは $S^{(j)}$ の時間 t に関する独立増分性を示している．

$(S_t^{(j)})$, $j = 1, \ldots, n$ の確率過程としての独立性を示すには $(S_{t_k^{(j)}}^{(j)})_{k=1,\ldots,l^{(j)}}$ が $j = 1, \ldots, n$ について互いに独立であることを示す必要がある．時刻列 $0 < t_1^{(j)} < t_2^{(j)} < \cdots < t_{l^{(j)}}^{(j)}$ に対する区間を $\Delta_k^{(j)}$ と表し，

$$A_{j,k} = A_j \cap (\Delta_k^{(j)} \times [0, \infty)), \quad k = 1, 2, \ldots, l^{(j)}$$

と置くと，これらは互いに素で，上と同じ議論で

$$S^{(j)}(t_{k-1}^{(j)}, t_k^{(j)}], \quad j = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, l^{(j)}$$

は互いに独立である．よって

$$(S_{t_k^{(j)}}^{(j)})_{k=1,\ldots,l^{(j)}} = \sum_{i=1}^{k} S^{(j)}(t_{i-1}^{(j)}, t_i^{(j)}], \quad j = 1, \ldots, n$$

は独立である．　□

Panjer の漸化式

保険金総額分布が具体的に計算できる場合がある．i.i.d. の請求額 X_j に対して

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

とし，N を非負整数値の独立な確率変数とする．

$$S = S_N$$

の分布の具体的な表示を求める．必要な条件を次で与える．

(1) 請求額 X_i は非負整数値である．

(2) N の分布は次の形の漸化式を満たす: ある定数 $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して

$$q_k = P(N = k) = \Big(a + \frac{b}{k}\Big) q_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{16.18}$$

である．

条件 (2) は (a, b)-条件と呼ばれている．例を見てみよう．

(a) Poisson 分布 Pois(λ)．このとき $a = 0$, $b = \lambda$ である．実際

$$q_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\lambda}{k} = q_{k-1}\frac{\lambda}{k}$$

より従う．

(b) 二項分布 Bin(n, p)．このとき $a = -\frac{p}{1-p} < 0$, $b = -a(n+1)$ である．実際

$$\begin{aligned}
q_k &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1} \frac{n-k+1}{k} p(1-p)^{-1} \\
&= -p(1-p)^{-1}(1 - \frac{n+1}{k}) \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} \\
&= -p(1-p)^{-1}(1 - \frac{n+1}{k}) q_{k-1}
\end{aligned}$$

よりわかる．

(c) パラメーター (α, p) の負の二項分布．$\alpha > 0$ で $0 < p < 1$ である．このとき $0 < a = 1-p < 1$, $b = (1-p)(\alpha-1)$ である．実際

$$
\begin{aligned}
q_k &= \binom{\alpha+k-1}{\alpha-1} p^\alpha (1-p)^k \\
&= \frac{(\alpha+k-1)!}{(\alpha-1)!k!} p^\alpha (1-p)^k \\
&= \frac{(\alpha+k-2)!}{(\alpha-1)!(k-1)!} \frac{\alpha+k-1}{k} p^\alpha (1-p)^{k-1}(1-p) \\
&= q_{k-1} \frac{\alpha+k-1}{k} (1-p) \\
&= q_{k-1}(1-p)\Big(1 + \frac{\alpha-1}{k}\Big)
\end{aligned}
$$

より分かる．

さて，条件を満たす確率分布はこれで尽きていることも示せる．二つの場合に分けて考える．

(1) $q_k \neq 0$ となる k が有限個の場合．

この場合は (a, b) 条件から，ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $a + \frac{b}{n} = 0$ となる．$n = 1$ の場合は $a + b = 0$ となり，$q_1 = q_2 = \cdots = 0$ の自明な場合になるので，除外して考える．

$n \geq 2$ の場合は $a > 0$ だと $b < 0$ となり，

$$
0 = a + \frac{b}{n} > a + b
$$

となり，$q_1 < 0$ になってしまうので不適当．$a < 0$ の場合が 2 項分布の場合である．

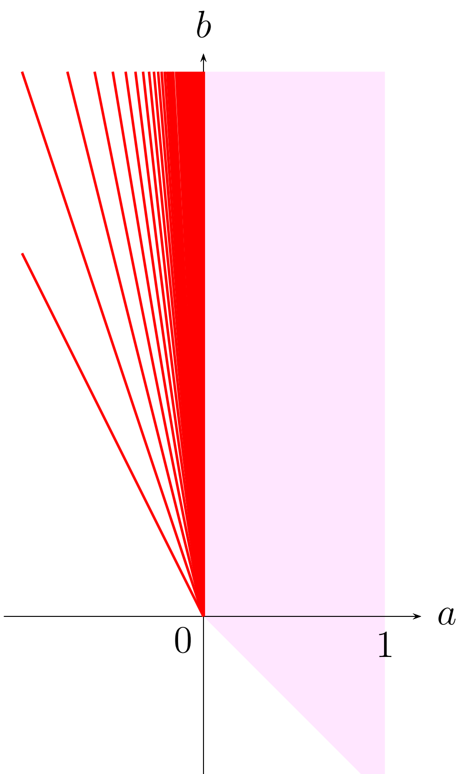
(2) $q_k \neq 0$ となる k が無限個の場合．

この場合はすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a + \frac{b}{n} \neq 0$ である．$a = 0$ のときは $b > 0$ となるのでこれが Poisson 分布の場合である．

$a < 0$ だとすると，n が大きいとき $a + \frac{b}{n} < 0$ となって，q_k の非負性に矛盾する．従って $a < 0$ は除外される．

$a > 1$ の場合は n が大きいとき $a + \frac{b}{n} > 1$ となって，それ以後 q_k は増加列になるので除外される．

$0 < a < 1$ のとき，$k = 1$ のときの条件から $a + b > 0$ が成り立つ．即ち $b > -a$ である．これが負の 2 項分布の場合である．



あと $a=1$ が除外されることだけ示す．そこで $a=1$ と固定して b だけ考える．$b\geq 0$ のときは $a+\frac{b}{n}\geq 1$ となり，q_k が非減少となって不適当．$-1<b<0$ のときだけ考える．$c=-b$ として，c で考えると

$$q_k=(1-\frac{c}{k})q_{k-1}$$

が成り立つ．$\sum q_k=\infty$ を示せば不適当であることが分かる．少し強い形で

$$r_k=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{k})$$

として $\sum r_k=\infty$ を示そう．

ここで $0<x\leq\frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}-\log(1-x)&=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\\&\leq x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}(1+x+x^2+\cdots)\\&=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\frac{1}{1-x}\\&\leq x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{3}\frac{1}{2}2\\&\leq x+x^2.\end{aligned}$$

これから

$$-\log r_n=-\sum_{k=2}^{n}\log(1-\frac{1}{k})\leq\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2})\leq\int_1^n\frac{dx}{x}+K\leq\log n+K.$$

よって

$$\log r_n\geq-\log n-K$$

より

$$r_n\geq e^{-\log n-K}=e^{-K}\frac{1}{n}.$$

これで $\sum r_n$ が発散することが分かった．

以上ですべての場合が尽くせた．

定理 16.5. X_j, N に対して，条件 (1), (2) を仮定する．このとき $p_n = P(S = n)$ は次の漸化式を満たす．

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \begin{cases} q_0 & \text{if } P(X_1 = 0) = 0, \\ E[P(X_1 = 0)^N] & \text{otherwise.} \end{cases} \\
p_n &= \frac{1}{1 - aP(X_1 = 0)} \sum_{j=1}^{n} \Big(a + \frac{bj}{n}\Big) P(X_1 = j) p_{n-j}
\end{aligned}
\tag{16.19}
$$

証明　まず

$$
p_0 = P(N = 0) + P(S = 0, N > 0).
$$

もし $P(X_1 = 0) = 0$ であれば，右辺は q_0 に等しい．$P(X_1 = 0) > 0$ のときは

$$
\begin{aligned}
p_0 &= q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} P(X_1 = 0, \ldots, X_j = 0) P(N = j) \\
&= q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} P(X_1 = 0)^j P(N = j) \\
&= E[(P(X_1 = 0)^N].
\end{aligned}
$$

次に p_n $n \geq 1$ のときを計算する．(a, b)-条件から

$$
p_n = \sum_{j=1}^{\infty} P(S_j = n) q_j = \sum_{j=1}^{\infty} P(S_j = n) \Big(a + \frac{b}{j}\Big) q_{j-1}
\tag{16.20}
$$

ところで

$$
E\left[a + \frac{bX_1}{n} \,\middle|\, S_j = n\right] = E\left[a + \frac{bX_1}{X_1 + \cdots + X_j} \,\middle|\, S_j = n\right] = a + \frac{b}{j}.
\tag{16.21}
$$

ここで次を使った．

$$
1 = E\left[\frac{S_j}{S_j} \,\middle|\, S_j\right] = \sum_{k=1}^{j} E\left[\frac{X_k}{S_j} \,\middle|\, S_j\right] = jE\left[\frac{X_1}{S_j} \,\middle|\, S_j\right].
$$

また

$$
\begin{aligned}
E\left[a + \frac{bX_1}{n} \,\middle|\, S_j = n\right] &= \sum_{k=0}^{n} \Big(a + \frac{bk}{n}\Big) P(X_1 = k | S_j = n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(a + \frac{bk}{n}\Big) \frac{P(X_1 = k, S_j - X_1 = n - k)}{P(S_j = n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(a + \frac{bk}{n}\Big) \frac{P(X_1 = k) P(S_{j-1} = n - k)}{P(S_j = n)}
\end{aligned}
$$

これを，(16.21) とともに (16.20) に代入すると

$$
\begin{aligned}
p_n &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)P(S_{j-1}=n-k)q_{j-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)\sum_{j=1}^{\infty}P(S_{j-1}=n-k)q_{j-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)P(S=n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)p_{n-k} \\
&= aP(X_1=0)p_n+\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)p_{n-k}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
(1-aP(X_1=0))p_n=\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{bk}{n}\right)P(X_1=k)p_{n-k}.
$$

となり，(16.19) が得られる. □

例 16.5. (停止損失再保険契約)

閾値 s の再保険を考える．即ち s を越えた負債 $(S-s)_+$ を補填することを考えるとその期待値

$$
p(s)=E[(S-s)_+]=\int_s^{\infty}P(S>x)\,dx
$$

を考える必要がある．S は整数値で $s\in\mathbb{Z}_+$ を仮定する．すると

$$
p(s)=\sum_{k=s}^{\infty}p(S>k)=p(s-1)-P(S>s-1).
$$

これで漸化式

$$
p(s)=p(s-1)-\{1-P(S\le s-1)\}
$$

が得られるが，$P(S\le s-1)=\sum_{j=0}^{s-1}p_j$ は Panjer の漸化式で原理的に計算できる．$p(0)=E[S]=E[N]E[X_1]$ であるから帰納的に $p(s)$ が計算可能であることが分かる．

第 6 章

破産問題

前章では保険金の請求額の挙動を調べた．この節では保険金の積み立てと組み合わせて破産の問題を扱う．

17.　リスク過程と破産確率

請求総額過程 S_t は

$$S_t = \sum_{j=1}^{N_t} X_j, \quad t \geq 0, \tag{17.1}$$

で与えられた．更新モデルなので N_t は次のように作られた．まず到着時間間隔 W_j から到着時刻列

$$T_0 = 0, \quad T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{17.2}$$

を作り，

$$N_t = \sharp\{n \geq 1; T_n \leq t\}, \quad t \geq 0 \tag{17.3}$$

で定めた．保険料収入を $p(t)$ とする．$p(t)$ は次の線型なものを考える．

$$p(t) = ct. \tag{17.4}$$

超過過程あるいはリスク過程 U_t を

$$U_t = u + p(t) - S_t \tag{17.5}$$

で定めると，この $U = (U_t)$ が保険者の収支資産となり，ここでの研究対象である．$U_0 = u$ を初期資産と呼び，十分大きなものであることを仮定する．責任準備金と呼ばれている．U が負になると，保険会社は破産する．出来るだけ破産しないようにすべきである．従って次の破産確率は重要な量となる．

定義 17.1. U がどこかの時点で負になる事象

$$\text{Ruin} = \{U_t < 0 \text{ for some } t > 0\} \tag{17.6}$$

を破産と呼ぶ.

破産の確率が小さいほど望ましい訳である. U が負になる最初の時刻

$$T = \inf\{t > 0; U_t < 0\} \tag{17.7}$$

を破産時刻と呼び，破産する確率は

$$\psi(u) = P(\text{Ruin}|U(0) = u) = P(T < \infty) \tag{17.8}$$

で与えられる.

破産が起こるのは $t = T_n$ のときなので，U_{T_n} を調べればよい:

$$\text{Ruin} = \{\inf_{t>0} U_t < 0\} = \{\inf_{n\geq 1} U_{T_n} < 0\} = \{\inf_{n\geq 1}\left[u + cT_n - \sum_{j=1}^{n} X_j\right] < 0\}. \tag{17.9}$$

$W_j > 0$ a.s. であるので，$N_{T_n} = n$ である. そこで次のように置く.

$$Z_n = X_n - cW_n, \quad Y_n = Z_1 + \cdots + Z_n, \quad n \geq 1, \quad Y_0 = 0. \tag{17.10}$$

すると破産確率 $\psi(u)$ は

$$\psi(u) = P\left(\inf_{n\geq 1}(-Y_n) < -u\right) = P\left(\sup_{n\geq 1} Y_n > u\right) \tag{17.11}$$

で与えられる. 大数の法則から

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} E[Z_1] \quad \text{as } n \to \infty$$

であるから，$E[Z_1]$ の符号に応じで $Y_n \overset{\text{a.s.}}{\to} +\infty$ or $-\infty$. 従って $E[Z_1] > 0$ のときは必ず破産することになる. また $E[Z_1] = 0$ のときは, 証明は自明ではないが $\liminf Y_n = -\infty$, $\limsup Y_n = +\infty$ となることが知られているので，必ず破産する. 命題として述べておく.

命題 17.2. $E[W_1]$, $E[X_1]$ は有限と仮定し

$$E[Z_1] = E[X_1] - cE[W_1] \geq 0 \tag{17.12}$$

を仮定する. このとき u をどんなに大きくとっても必ず破産する.

$E[Z_1] < 0$ の場合は，$Y_n \to -\infty$ だから $\psi(u)$ は 1 より小さい可能性がある. 特にこの場合は重要なので，名前を決めておこう.

定義 17.3. 更新モデルに対し純保険金利益条件 (net profit condition=NPC) が満たされることを

$$E[Z_1] = E[X_1] - cE[W_1] < 0 \tag{17.13}$$

と定義する.

例 17.1. (NPC と保険金算出原理)

簡単のために Cramér-Lundberg モデルについて述べる.

$$E[S_t] = E[N_t]E[X_1] = \lambda t E[X_1] = \frac{E[X_1]}{E[W_1]}t$$

である. $p(t) = ct$, $c = \frac{E[X_1]}{E[W_1]}$ と取ると, 純保険金原理になる. このとき $E[Z_1] = 0$ なので, 確実に破産することになる.

次に期待値原理に基づくと

$$p(t) = (1+\rho)E[S_t] = (1+\rho)\frac{E[X_1]}{E[W_1]}t.$$

これは割増し率として

$$c = (1+\rho)\frac{E[X_1]}{E[W_1]} \tag{17.14}$$

ととることになるので

$$E[Z_1] = E[X_1] - cE[W_1] = E[X_1] - (1+\rho)\frac{E[X_1]}{E[W_1]}E[W_1] = -\rho E[X_1] < 0$$

となり, NPC が満たされる. □

18. 破産確率の評価

X_j を請求額とし, 到着時間間隔を W_j とする. $Z_j = X_j - cW_j$ とし $E[Z_j] < 0$ を仮定する. 掛け金収入は $p(t) = ct$ とする. 請求額 X_1 に対して, **少額請求**の条件を, X_1 の積率母関数が原点の近傍で存在することと定める:

$$m_{X_1}(h) = E[e^{hX_1}] < \infty, \quad h \in (-h_0, h_0) \text{ for some } h_0 > 0. \tag{18.1}$$

このとき Chebyshev の不等式から

$$P(X_1 > x) \le e^{-hx} m_{X_1}(h) \tag{18.2}$$

なので, $P(X_1 > x)$ は指数的に減少する.

定義 18.1. $E[Z_1] < 0$ を仮定し Z_1 の積率母関数が原点の近傍 $(-h_0, h_0)$ で存在するとき

$$m_{Z_1}(h) = E[e^{hZ_1}] = 1 \tag{18.3}$$

の正の解 r を **Lundberg 係数**と呼ぶ.

$f(h) = m_{Z_1}(h)$ とおくと，$f'(0) = E[Z_1] < 0$ で $f''(h) = E[Z_1^2 e^{hZ_1}] > 0$ なので，凸性から $f(h) = 1$ となる $h > 0$ は一意的に定まることが分かる.

定理 18.2. $E[Z_1] < 0$ (NPC) を仮定し，Lundberg 係数の存在を仮定すると

$$\psi(u) \le e^{-ru}, \quad u > 0 \tag{18.4}$$

が成立する.

証明　まず

$$\psi_n(u) = P\left(\max_{1\le k\le n} Y_k > u\right) = P(Y_k > u \text{ for some } k = 1, 2, \ldots, n)$$

とおき

$$\psi_n(u) \le e^{-ru} \tag{18.5}$$

であることを帰納法で示す．ここで $Y_k = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k$ であった.

$n = 1$ のとき Chebyshev の不等式から

$$\psi_1(u) \le e^{-ru} m_{Z_1}(r) = e^{-ru}.$$

次に n のときに (18.5) を仮定して $n+1$ のときを示す．Z_1 の分布関数を F_{Z_1} とする.

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &= P\left(\max_{1\le k\le n+1} Y_k > u\right) \\
&= P(Z_1 > u) + P\left(\max_{2\le k\le n+1} \{Z_1 + Y_k - Z_1\} > u; Z_1 \le u\right) \\
&= \int_{(u,\infty)} dF_{Z_1}(x) + \int_{(-\infty,u]} P\left(\max_{1\le k\le n} \{x + Y_k\} > u\right) dF_{Z_1}(x) \\
&\quad (\because Y_k - Z_1 = Z_2 + \cdots + Z_k \text{ は } Z_1 \text{ と独立で，数が一つ減っている.}) \\
&= p_1 + p_2.
\end{aligned}$$

p_2 に関しては

$$p_2 = \int_{(-\infty,u]} P\left(\max_{1\le k\le n} Y_k > u - x\right) dF_{Z_1}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{(-\infty,u]} \psi_n(u-x)\,dF_{Z_1}(x) \\
&\le \int_{(-\infty,u]} e^{-r(u-x)}\,dF_{Z_1}(x) \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\
&= \int_{(-\infty,u]} e^{r(x-u)}\,dF_{Z_1}(x).
\end{aligned}
$$

一方また

$$
p_1 \le \int_{(u,\infty)} e^{r(x-u)}\,dF_{Z_1}(x).
$$

二つを合わせて

$$
\begin{aligned}
p_1 + p_2 &\le \int_{(-\infty,\infty)} e^{r(x-u)}\,dF_{Z_1}(x) = e^{-ru}\int_{(-\infty,\infty)} e^{rx}\,dF_{Z_1}(x) \\
&= e^{-ru} m_{Z_1}(r) = e^{-ru}.
\end{aligned}
$$

これで $n+1$ のときも示せた. □

例 18.1. (請求額が指数分布のときの Lundberg 不等式)

請求額 X_j が指数分布 Exp(γ), 請求時刻が強度 λ の Poisson 過程の場合を具体的に計算してみよう．W_j の分布は指数分布 Exp(λ) である．Exp(a) の積率母関数は

$$
m(h) = \int_0^\infty e^{hx} a e^{-ax} dx = \frac{a}{a-h}, \quad h < a
$$

である．従って $Z_1 = X_1 - cW_1$ の積率母関数は

$$
m_{Z_1}(h) = m_{X_1}(h) m_{cW_1}(-h) = \frac{\gamma}{\gamma - h}\frac{\lambda}{\lambda + ch}, \quad -\frac{\lambda}{c} < h < \gamma.
$$

Lundberg 係数は $\gamma = \frac{1}{E[X_1]}$ を使って

$$
1 + h\frac{c}{\lambda} = \frac{\gamma}{\gamma - h}
$$

これから

$$
\begin{aligned}
\gamma &= (\gamma - h)(1 + h\frac{c}{\lambda}) = \gamma + h\frac{\gamma c}{\lambda} - h - h^2\frac{c}{\lambda} \\
&= \gamma + h(\frac{\gamma c}{\lambda} - 1 - h\frac{c}{\lambda}) = \gamma + \frac{c}{\lambda}h(\gamma - \frac{\lambda}{c} - h)
\end{aligned}
$$

なので，0 でない解は

$$
h = \gamma - \frac{\lambda}{c}.
$$

ところで NPC 条件から $E[X_1]=\frac{1}{\gamma}$ に注意して

$$\frac{E[X_1]}{E[W_1]}=\frac{\lambda}{\gamma}<c.$$

よって Lundberg 係数 r は上の計算で

$$r=\gamma-\frac{\lambda}{c}>0$$

が成り立っている．

割増率 c を期待値原理で定めると

$$c=\frac{E[X_1]}{E[W_1]}(1+\rho)=\frac{\lambda}{\gamma}(1+\rho)$$

なので $\frac{\lambda}{c}=\frac{\gamma}{1+\rho}$ である．ρ は安全負荷であった．ρ で r を表すと

$$r=\gamma-\frac{\lambda}{c}=\gamma-\frac{\gamma}{1+\rho}=\gamma\frac{\rho}{1+\rho}. \tag{18.6}$$

以上で Lundberg 評価は

$$\psi(u)\le\exp\left\{-\gamma\frac{\rho}{\rho+1}u\right\},\quad u>0$$

は負荷 ρ が大きいほど $\psi(u)$ は小さくなり $E[X_1]$ が小さいほど $\gamma=\frac{1}{E[X_1]}$ は大きくなるので，$\psi(u)$ が小さくなる． □

19.　破産確率の漸近挙動

破産確率の評価を求めたが，正確な漸近挙動を Cramér-Lundberg モデルの場合に調べてみよう．このとき (N_t) は強度 λ の Poisson 過程であり，W_n は平均 $1/\lambda$ の指数分布を持つ．

定理 19.1. $E[Z_1]<0$ (NPC) を仮定し，Lundberg 係数の存在を仮定する．また X_1 の分布は連続であるとする．このとき

$$\lim_{u\to\infty}e^{ru}\psi(u)=\left\{\frac{r}{\rho E[X_1]}\int_0^\infty xe^{rx}\overline{F}_{X_1}\,dx\right\}^{-1} \tag{19.1}$$

が成立する．ここで ρ は (17.14) から

$$\rho=c\frac{E[W_1]}{E[X_1]}-1=\frac{c}{\lambda E[X_1]}-1 \tag{19.2}$$

である．

証明は長いので，順を追って示していく．まず $\varphi(u)=1-\psi(u)$ とおく．従って

$$\varphi(u)=P\left(\sup_{n\geq 1} Y_n\leq u\right)=P(Y_n\leq u \text{ for all } n\geq 1) \tag{19.3}$$

そこで次の補題を示す．

補題 19.2. 定理 19.1 の仮定の下で次の等式が成立する．

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{1}{(1+\rho)E[X_1]}\int_0^x \overline{F}_{X_1}(u)\varphi(x-u)\,du. \tag{19.4}$$

証明　φ の定義から

$$\begin{aligned}
\varphi(u)&=P(Z_1\leq u,\, Y_n-Z_1\leq u-Z_1 \text{ for all } n\geq 2)\\
&=E[1_{\{Z_1\leq u\}}P(Y_n-Z_1\leq u-Z_1 \text{ for all } n\geq 2|Z_1)]\\
&=\int 1_{\{z\leq u\}}P(Y_n\leq u-z \text{ for all } n\geq 1)dF_{Z_1}(z)\\
&\qquad (\because Y_n-Z_1=Z_2+\cdots+Z_n \text{ は } Z_1 \text{ と独立で，個数が 1 つ少ない})\\
&=\iint 1_{\{x-cw\leq u\}}P(Y_n\leq u-(x-cw) \text{ for all } n\geq 1)dF_{X_1}(x)dF_{W_1}(dw)\\
&=\iint 1_{\{x-cw\leq u\}}\varphi(u-x+cw)dF_{X_1}(x)\lambda e^{-\lambda w}\,dw\\
&=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda w}\,dw\int_{[0,u+cw]}\varphi(u-x+cw)\,dF_{X_1}(x)\quad (z=u+cw, dz=cdw)\\
&=\int_u^\infty \lambda e^{-\lambda(z-u)/c}\frac{dz}{c}\int_{[0,z]}\varphi(z-x)\,dF_{X_1}(x)\\
&=\frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}\int_u^\infty \lambda e^{-\lambda z/c}\,dz\int_{[0,z]}\varphi(z-x)\,dF_{X_1}(x).
\end{aligned}$$

F_{X_1} は連続であることを仮定しているから

$$g(z)=\int_{[0,z]}\varphi(z-x)\,dF_{X_1}(dx)$$

は連続である．実際右連続性は明らかだが，z に関して左極限を取ると

$$g(z-)=\int_{[0,z)}\varphi(z-x-)\,dF_{X_1}(dx)$$

となる．φ のジャンプは可算個なので，dF_{X_1} に関して測度 0 なので無視できる．これを代入して

$$\varphi(u)=\frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}\int_u^\infty e^{-\lambda z/c}g(z)\,dz$$

は微分可能で

$$\begin{aligned}\varphi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}\int_u^\infty e^{-\lambda z/c}g(z)\,dz - \frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}e^{-\lambda u/c}g(u)\\ &= \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^z \varphi(z-x)\,dF_{X_1}(dx).\end{aligned}$$

これを 0 から t まで積分して

$$\begin{aligned}&\varphi(t)-\varphi(0) - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(u)\,du\\ &\quad= -\frac{\lambda}{c}\int_0^t dz\int_0^z \varphi(z-x)\,dF_{X_1}(x)\\ &\quad= -\frac{\lambda}{c}\int_0^t dF_{X_1}(x)\int_x^t \varphi(z-x)\,dz\\ &\quad= -\frac{\lambda}{c}\int_0^t dF_{X_1}(x)\int_0^{t-x} \varphi(u)\,du \quad (u=z-x,\, du=dz)\\ &\quad= -\frac{\lambda}{c}\left[F_{X_1}(x)\int_0^{t-x}\varphi(u)\,du\right]_{x=0}^t - \frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\varphi(t-x)\,dx \quad (\text{部分積分公式})\\ &\quad= -\frac{\lambda}{c}\int_0^t F_{X_1}(x)\varphi(t-x)\,dx.\end{aligned}$$

移項して

$$\varphi(t)-\varphi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(u)\,du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(t-x)F_{X_1}(x)\,dx = \frac{\lambda}{c}\int_0^t \varphi(t-x)\overline{F}_{X_1}(x)\,dx.$$

ここで

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\rho+1}\frac{1}{E[X_1]} \tag{19.5}$$

であったことを思い出そう ((19.2) を見よ)．これで (19.4) が示せた． □

さて (19.4) を変形していこう．$\overline{F}_{X_1}$ を積分したものとして

$$F_{X_1,I}(x) = \frac{1}{E[X_1]}\int_0^x \overline{F}_{X_1}(u)\,du \tag{19.6}$$

を導入すると，$F_{X_1,I}$ は分布関数となる．実際非負単調増大は明らかだが

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} F_{X_1,I}(x) &= \frac{1}{E[X_1]}\lim_{x\to\infty}\int_0^x \overline{F}_{X_1}(u)\,du\\ &= \frac{1}{E[X_1]}\int_0^\infty \overline{F}_{X_1}(u)\,du = \frac{1}{E[X_1]}E[X_1] = 1\end{aligned}$$

となる．これを用いると (19.4) は次のように表される．

(19.7)
$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho}\int_0^x \varphi(x-u)\,dF_{X_1,I}(u).$$

ところで $\varphi(x) \to 1$ から $\varphi(0)$ の値が求まる．実際

$$\begin{aligned}
1 = \lim_{x\to\infty}\varphi(x) &= \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho}\lim_{x\to\infty}\int_0^x \varphi(x-u)\,dF_{X_1,I}(u) \\
&= \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho}\lim_{x\to\infty}\int_0^\infty 1_{\{u\le x\}}\varphi(x-u)\,dF_{X_1,I}(u) \\
&= \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho}\int_0^\infty dF_{X_1,I}(u) \\
&= \varphi(0) + \frac{1}{1+\rho}.
\end{aligned}$$

よって

$$\varphi(0) = 1 - \frac{1}{1+\rho} = \frac{\rho}{1+\rho}$$

結局

(19.8)
$$\varphi(x) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^x \varphi(x-u)\,dF_{X_1,I}(u).$$

ここで $q = \frac{1}{\rho+1}$ とおいて φ 表示から ψ 表示に変更すると

(19.9)
$$\psi(x) = q\overline{F}_{X_1,I}(x) + \int_0^x \psi(x-u)\,d(qF_{X_1,I})(u)$$

となって，更新方程式 (10.2) と同じ形である．但し，決定的な違いがあって，それは

$$\lim_{x\to\infty} qF_{X_1,I}(x) = q < 1$$

となって $qF_{X_1,I}$ は確率分布ではない．このことから (19.9) は不完全更新方程式 (a defective renewel equation) と呼ばれる．この方程式を通常の更新方程式に帰着させる方法を考えよう．新たな分布 $F^{(r)}$ を

(19.10)
$$F^{(r)}(x) = \int_0^x e^{ru}\,d(qF_{X_1,I})(u) = q\int_0^x e^{ru}dF_{X_1,I}(u) = \frac{q}{E[X_1]}\int_0^x e^{ru}\overline{F}_{X_1}(u)\,du.$$

$F^{(r)}$ を分布関数とする分布を Esscher 変換と呼ぶ．

$F^{(r)}$ が実際に分布になることを見るには，Lundberg 係数の定義に帰る必要がある．r を Lundberg 係数とするとき次が成り立つことを示そう．

(19.11)
$$m_{X_1}(r) = 1 + r(\rho+1)E[X_1].$$

実際 W_1 の分布は $\mathrm{Exp}(\lambda)$ であったから Z_1 の積率母関数の計算から

$$1 = m_{Z_1}(r) = m_{X_1}(r)m_{cW_1}(-r) = m_{X_1}(r)\frac{\lambda}{\lambda + cr}.$$

よって

$$m_{X_1}(r) = \frac{\lambda + cr}{\lambda} = 1 + r\frac{c}{\lambda} = 1 + r(\rho + 1)E[X_1]. \quad ((19.5))$$

これで (19.11) が示せた．これを使うと $F^{(r)}$ が分布になることが次で示せる．

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F^{(r)}(x) &= \frac{q}{E[X_1]}\int_0^\infty e^{ru}\overline{F}_{X_1}(u)\,du \\
&= \frac{q}{E[X_1]}\int_0^\infty e^{ru}\,du\int_u^\infty dF_{X_1}(v) \\
&= \frac{q}{E[X_1]}\int_0^\infty dF_{X_1}(v)\int_0^v e^{ru}\,du \\
&= \frac{q}{E[X_1]}\frac{1}{r}\int_0^\infty (e^{rv}-1)dF_{X_1}(v) \\
&= \frac{q}{E[X_1]}\frac{1}{r}(\int_0^\infty e^{rv}\,dF_{X_1}(v) - 1) \\
&= \frac{q}{E[X_1]}\frac{1}{r}(m_{X_1}(r) - 1) \\
&= \frac{q}{E[X_1]}\frac{1}{r}r(\rho+1)E[X_1] = 1
\end{aligned}$$

さて，(19.9) の両辺に e^{rx} を掛けると

$$\begin{aligned}
e^{rx}\psi(x) &= qe^{rx}\overline{F}_{X_1,I}(x) + \int_0^x e^{r(x-u)}\psi(x-u)e^{ru}\,d(qF_{X_1,I})(u) \\
&= qe^{rx}\overline{F}_{X_1,I}(x) + \int_0^x e^{r(x-u)}\psi(x-u)\,dF^{(r)}(u). \qquad (19.12)
\end{aligned}$$

これで $F^{(r)}$ は確率分布であるので，$Z(x) = e^{rx}\psi(x)$ を未知関数とする更新方程式に帰着できた．以上の準備の下で 定理 19.1 の証明ができる．

定理 19.1 の証明　$Z(x) = e^{rx}\psi(x)$ は更新方程式 (19.12) を満たす．従って更新定理の定理 10.1 から解は

$$e^{rx}\psi(x) = qe^{rx}\overline{F}_{X_1,I}(x) + q\int_{[0,x]} e^{r(x-u)}\overline{F}_{X_1,I}(x-u)dm^{(r)}(u) \qquad (19.13)$$

で与えられる．$m^{(r)}$ は到着時間間隔の分布が $F^{(r)}$ で与えられる更新関数である．ここで定理 10.3 を使えば，漸近挙動として

$$C = \lim_{x\to\infty} e^{rx}\psi(u) = \frac{1}{\mu}q\int_0^\infty e^{ru}\overline{F}_{X_1,I}(u)\,du \qquad (19.14)$$

が成り立つ．但し μ は $F^{(r)}$ の平均である．従って

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^\infty x dF^{(r)}(x) \\ &= \int_0^\infty x \frac{q}{E[X_1]} e^{rx} \overline{F}_{X_1}\, dx \quad (\ (19.10)) \\ &= \frac{q}{E[X_1]} \int_0^\infty x e^{rx} \overline{F}_{X_1}\, dx\end{aligned}$$

である．また C を計算するため

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{ru} \overline{F}_{X_1,I}(u)\, du &= \int_0^\infty e^{ru} \int_u^\infty \frac{1}{E[X_1]} \overline{F}_{X_1}(v)\, dv \\ &= \frac{1}{E[X_1]} \int_0^\infty \overline{F}_{X_1}(v)\, dv \int_0^v e^{ru}\, du \\ &= \frac{1}{rE[X_1]} \int_0^\infty \overline{F}_{X_1}(v)\, dv (e^{rv} - 1)\, du \\ &= \frac{1}{rE[X_1]} \left\{ \int_0^\infty e^{rv} \overline{F}_{X_1}(v)\, dv - \int_0^\infty \overline{F}_{X_1}(v)\, dv \right\} \\ &= \frac{1}{rE[X_1]} \left\{ \frac{E[X_1]}{q} - E[X_1] \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{q} - 1 \right\} \quad (\text{上の } \lim_{x\to\infty} F^{(r)}(x) \text{ の計算のところで示した}) \\ &= \frac{1}{r}(1 + \rho - 1) \\ &= \frac{\rho}{r}.\end{aligned}$$

これらを合わせて (19.14) から

$$C^{-1} = \frac{\mu}{q} \frac{r}{\rho} = \frac{q}{E[X_1]} \int_0^\infty x e^{rx} \overline{F}_{X_1}\, dx \frac{r}{q\rho} = \frac{r}{\rho E[X_1]} \int_0^\infty x e^{rx} \overline{F}_{X_1}\, dx$$

となる．

ところで, (19.14) を示すのに定理 10.3 を使ったが, そのためには関数 $x \mapsto e^{rx}\overline{F}_{X_1,I}(x)$ が直接的 Riemann 積分可能であることが必要である．そのことを最後に確かめておこう．X_1 の積率母関数 $m_{X_1}(h)$ が区間 $[-h_0, h_0]$ で存在し，Lundberg 係数 r はその内部にあるとする．すると (18.2) から

$$\overline{F}_{X_1} = P(X_1 > x) \le m_{X_1}(h_0) e^{-h_0 x}$$

が成り立つ．また，

$$\overline{F}_{X_1,I}(x) = 1 - F_{X_1,I}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{E[X_1]} \int_0^x \overline{F}_{X_1}(u)\,du \\
&= \frac{1}{E[X_1]} \left\{ E[X_1] - \int_0^x \overline{F}_{X_1}(u)\,du \right\} \\
&= \frac{1}{E[X_1]} \left\{ \int_0^\infty \overline{F}_{X_1}(u)\,du - \int_0^x \overline{F}_{X_1}(u)\,du \right\} \\
&= \frac{1}{E[X_1]} \int_x^\infty \overline{F}_{X_1}(u)\,du \\
&\le \frac{1}{E[X_1]} \int_x^\infty m_{X_1}(h_0) e^{-h_0 u}\,du \\
&\le \frac{m_{X_1}(h_0)}{h_0 E[X_1]} e^{-h_0 x}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
e^{rx}\overline{F}_{X_1,I}(x) \le \frac{m_{X_1}(h_0)}{h_0 E[X_1]} e^{-(h_0-r)x}
$$

となり，$h_0 - r > 0$ だから指数関数的に減少することが分かる．命題 10.5 で直接的 Riemann 積分可能の条件が $I^h < \infty$ だったので，上から抑える関数が直接的 Riemann 積分可能であれば，元の関数が直接的 Riemann 積分可能であることが従う．このことから $e^{rx}\overline{F}_{X_1,I}(x)$ が直接的 Riemann 積分可能であることが分かる．

これで定理の証明が終わった． □

例 19.1. 更新方程式 (19.12) の解の具体的な表示を求めることは一般には難しいが，X_j の分布が指数分布 $\mathrm{Exp}(\gamma)$ のときは具体的な計算が可能である．Lundberg 係数 r は (18.6) から

$$
r = \gamma - \frac{\lambda}{c}
$$

であった．さらに $F^{(r)}$ は (19.10) から

$$
\begin{aligned}
F^{(r)}(x) &= \frac{q}{E[X_1]} \int_0^x e^{ru}\overline{F}_{X_1}(u)\,du = \gamma q \int_0^x e^{ru} e^{-\gamma u}\,du \\
&= -\gamma q \frac{1}{\gamma - r}(e^{-(\gamma-r)x} - 1) = 1 - e^{-(\gamma-r)x}
\end{aligned}
$$

なので分布が $\mathrm{Exp}(\gamma - r)$ であることが分かる．ここで

$$
\gamma - r = \frac{\gamma}{1+\rho} = \gamma q \tag{19.15}
$$

を使った．さらに $F^{(r)}$ に対応する更新過程 $N_t^{(r)}$ は強度 γq の Poisson 過程となるので

$$
m^{(r)}(t) = E[N_t^{(r)}] = \gamma q t \tag{19.16}
$$

これから更新方程式の解は

$$
\begin{aligned}
e^{rt}\psi(t) &= qe^{rt}e^{-\gamma t} + \gamma q^2 \int_0^t e^{r(t-u)}e^{-\gamma(t-u)}du \\
&= qe^{-(\gamma-r)t} + \gamma q^2 \frac{1}{\gamma - r}(1 - e^{-(\gamma-r)t}) = q.
\end{aligned}
$$

従って $\psi(t) = qe^{-rt}$ と具体的に計算できた. □

<u>複合幾何過程の破産確率</u>

Cramér-Lundberg モデルの破産確率は次の方程式を満たした ((19.8) 参照).

$$
\varphi(x) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho}\int_0^x \varphi(x-u)\,dF_{X_1,I}(u). \tag{19.17}
$$

ここで $\varphi = 1 - \psi$ は破産しない方の確率である.

さて，幾何分布を使って解の表現を与えることを考える．M が幾何分布を持つとは

$$
p_n = P(M = n) = pq^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad p = 1 - q \in (0, 1) \tag{19.18}
$$

が満たされることである．これを用いて

$$
S_M = \sum_{j=1}^{M} X_j \tag{19.19}
$$

は複合幾何分布を持つ．S_M の分布関数は次で計算できる.

$$
\begin{aligned}
P(S_M \le x) &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n P(X_1 + \cdots + X_n \le x) \\
&= p + p\sum_{n=1}^{\infty} q^n P(X_1 + \cdots + X_n \le x).
\end{aligned}
$$

さて，命題を述べる前に次のクラスを導入しておく.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{G} = \{G\colon \mathbb{R} \to (0,\infty) :\ & G \text{ is non-decreasing, bounded, right-continuous} \\
& \text{wituh } G(x) = 0 \text{ for } x < 0\}
\end{aligned} \tag{19.20}
$$

$G \in \mathscr{G}$ は適当な非負確率変数の分布関数で $G = cF$ と書ける.

命題 19.3. (Y_j) を i.i.d. で 分布関数 $F_{X_1,I}$ を持つものとする．このとき次で定義される関数 φ は (19.17) を満たす.

$$
\varphi(x) = \frac{\rho}{1+\rho}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}P(Y_1 + \cdots + Y_n \le x)\right\}, \quad x > 0. \tag{19.21}
$$

逆に (19.21) で定義される関数はクラス $\mathscr{G}$ の中で (19.17) を満たすただ一つのものである．

証明　$q=(1+\rho)^{-1}$, $p=1-q=\rho(1+\rho)^{-1}$ とおく．φ が (19.21) で定義されるとき

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= p+pq+\left\{F_{X_1,I}(x)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x P(u+Y_2+\cdots+Y_n\le x)\,dF_{X_1,I}(u)\right\}\\ &= p+q\int_0^x +p\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}q^nP(Y_1+\cdots+Y_n\le x-u)\right\}dF_{X_1,I}(u)\\ &= p+q\int_0^x \varphi(x-u)\,dF_{X_1,I}(u).\end{aligned}$$

逆は Laplace 変換を使う．φ が (19.17) を満たしていると，Laplace 変換を行って

$$\hat{\varphi}(t)=\int_{[0,\infty)}e^{-tx}d\varphi(x)=\frac{\rho}{(1+\rho)}+\frac{1}{1+\rho}\hat{\varphi}(t)E[e^{-tY_1}]$$

従って

$$\hat{\varphi}(t)=\frac{\rho}{(1+\rho)}\left\{1-\frac{1}{1+\rho}E[e^{-tY_1}]\right\}^{-1}$$

Laplace 変換の一意性から φ は一意に決まる． □

例 19.2. もう一度 Cramér-Lundberg モデルで，指数分布の場合を考えてみよう．φ は (19.21) で与えられる．このままではなく，微分形で考えよう．$Y_1+\cdots+Y_n$ の分布はパラメーター (n,γ) のガンマ分布だから

$$d\varphi(x)=\frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\frac{\gamma^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\gamma x}=\frac{\rho}{1+\rho}\frac{\gamma}{1+\rho}\exp\left\{-\gamma\frac{\rho}{1+\rho}x\right\}.$$

よって積分して

$$\varphi(x)-\frac{\rho}{1+\rho}=\frac{\rho}{1+\rho}\frac{\gamma}{1+\rho}\int_0^x\exp\left\{-\gamma\frac{\rho}{1+\rho}u\right\}du=\frac{1}{1+\rho}\left(1-\exp\left\{-\gamma\frac{\rho}{1+\rho}x\right\}\right)$$

これから

$$\begin{aligned}\psi(x)=1-\varphi(x) &= 1-\frac{\rho}{1+\rho}-\frac{1}{1+\rho}\left(1-\exp\left\{-\gamma\frac{\rho}{1+\rho}x\right\}\right)\\ &= \frac{1}{1+\rho}\exp\left\{-\gamma\frac{\rho}{1+\rho}x\right\}.\end{aligned}$$

これで例 19.1 と同じ結論が得られた．((18.6) から $r=\gamma\frac{\rho}{1+\rho}$ であった．) □

請求額の末尾確率が大きい場合

X_1 の分布が劣指数的の場合を考えよう．

定理 19.4. Cramér-Lundberg モデルで $E[X_1] < \infty$ と NPC 条件を仮定する．更に $F_{X_1,I}$ の分布が劣指数的であることを仮定する．このとき次が成立する．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\overline{F}_{X_1,I}(x)} = \rho^{-1}. \tag{19.22}$$

証明

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n} = \frac{1}{1-(1+\rho)^{-1}} = \frac{1+\rho}{1+\rho-1} = \frac{1+\rho}{\rho}$$

から

$$1 = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n}$$

である．これから (19.21) の辺々引いて

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= 1-\varphi(x) \\
&= \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=0}^{\infty}(1+\rho)^{-n} - \frac{\rho}{1+\rho}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}P(Y_1+\cdots+Y_n\le x)\right. \\
&= \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}(1-P(Y_1+\cdots+Y_n\le x)) \\
&= \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}P(Y_1+\cdots+Y_n> x).
\end{aligned}$$

両辺を $\overline{F}_{X_1,I}(x)$ で割って

$$\frac{\psi(x)}{\overline{F}_{X_1,I}(x)} = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}\frac{P(Y_1+\cdots+Y_n>x)}{\overline{F}_{X_1,I}(x)}.$$

ところで，劣指数的の仮定から定義 15.6 により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(Y_1+\cdots+Y_n\le x)}{\overline{F}_{X_1,I}(x)} = n, \quad n\ge 1.$$

従って極限の順番を交換して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\overline{F}_{X_1,I}(x)} = \frac{\rho}{1+\rho}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}n = \rho^{-1}. \tag{19.23}$$

これが求める結果である．ここで

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

を微分して

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}.$$

両辺に x を掛けて

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

ここで $x = (1+\rho)^{-1}$ を代入し，$1-(1+\rho)^{-1} = \frac{1+\rho-1}{1+\rho} = \frac{\rho}{1+\rho}$ に注意して

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(1+\rho)^{-n} = (1+\rho)^{-1}\frac{(1+\rho)^2}{\rho^2} = \frac{1+\rho}{\rho^2}$$

となることを使った．

ところで (19.23) の計算で，極限の交換を使ったので，それを正当化する必要がある．劣指数的な分布に関しては命題 15.9 から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $K > 0$ が存在して

$$\frac{P(Y_1+\cdots+Y_n \leq x)}{\overline{F}_{X_1,I}(x)} \leq K(1+\varepsilon)^n$$

が成り立つ．ここで $\varepsilon < \rho$ と取ると

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\rho)^{-n}K(1+\varepsilon)^n = K\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\rho}\right)^n < \infty$$

より，Lebesgue の優収束定理から極限操作の交換が合理化される．

以上で，証明が完結した． □

参考文献

[1] R. J. Elliott and P. E. Kopp, “*Mathematics of financial markets*,” Springer-Verlag, New York, 1999.
[2] P. Embrechts, C. Klüppelberg and T. Mikosch, “*Modelling extremal events. For insurance and finance*,” Applications of Mathematics (New York), 33., Springer-Verlag, Berlin, 1997.
[3] G. Grimmett and D. Welsh, “*Probability : An Introduction*,” 2nd ed., Oxford University Press, 2014.
[4] 井上 明彦, 中野 張, 福田 敬, ファイナンスと保険の数理, 岩波書店, 2014.
[5] I. Karatzas and S. E. Shreve, “*Brownian motion and stochastic calculus*,” Second edition, Springer-Verlag, New York, 1991.
[6] I. Karatzas and S. E. Shreve, “*Methods of mathematical finance*,” Applications of Mathematics, 39, Springer-Verlag, New York, 1998.
[7] D. Lamberton and B. Lapeyre, “*Introduction to stochastic calculus applied to finance,*” Second edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.
[8] T. Mikosch, “*Non-life insurance mathematics. An introduction with the Poisson process*,” Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
[9] S.I. Resnick,“*Extreme values, regular variation, and point processes*,” Applied Probability, A Series of the Applied Probability Trust 4, Springer-Verlag, New York, 1987.
[10] D. Revuz and M. Yor, “*Continuous martingales and Brownian motion*,” Third edition, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1999.
[11] 清水 泰隆, 保険数理の統計的方法, 共立出版, 東京, 2018.
[12] D. W. Stroock, “*An introduction to Markov processes*,” Second edition, Springer, Heidelberg, 2014.
[13] R. J. Williams, “*Introduction to the mathematics of finance*,” Graduate Studies in Mathematics, 72, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.