微分積分学 小テスト

重川 一郎

平成22 年7 月19 日

$\boxed{1}$ 次の式を数学的に証明せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

[解答] 任意の ε に対し $N=\frac{1}{\varepsilon^2}$ とおくと $n>N$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon$$

と出来る. $\square$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log_{10}n}=0$

[解答] ε に対し $N=10^{1/\varepsilon}$ と取る $\square$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n}=0$

[解答] ε に対し $N=\log(1/\varepsilon)$ と取る $\square$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\beta\neq0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ を証明せよ.

$\boxed{3}$ 次の極限の式を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^2}{n-1}-\frac{(n-1)^2}{n+1}\right\}=6$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$

$\boxed{4}$ 次の極限の式を示せ.($c>1$).

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{c^n}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!}=0$

$\boxed{5}$ $\displaystyle a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)$ のとき

(1) $a_n^2>2$ となることを帰納法で示せ.

(2) $\{a_n\}$ は単調減少であることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$ を証明せよ.

$\boxed{6}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ となることを証明せよ.

$\boxed{7}$ 次の等式を示せ． $(|c|<1)$

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc^{n-1} = \frac{1}{(1-c)^2}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$

[解答]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4}$$

□

$\boxed{8}$ $\displaystyle\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ $(n \geq 2)$ を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束することを示せ．

$\boxed{9}$ 次の式を証明せよ．

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\cosh(x+y) = \cosh x \cos hy + \sinh x \sinh y$

(3) $\sinh(x+y) = \sinh x \cos hy + \cosh x \sinh y$

$\boxed{10}$ 次の式を証明せよ．

(1) $y = \sinh x \Longleftrightarrow x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$

(2) $y = \cosh x,\ x \geq 0 \Longleftrightarrow x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$

(3) $y = \tanh x \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$

$\boxed{11}$ 次の極限の式を示せ $(a, b > 0)$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (Hint: 分母分子に $1+\cos x$ をかけて $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を使う)

$\boxed{12}$ $f(x)$ が $x = a$ で連続，$g(y)$ が $y = f(a)$ で連続ならば，合成関数 $h(x) = g(f(x))$ は $x = a$ で連続であることを示せ．

$\boxed{13}$ $\log x$ は e^x の逆関数であることを使って次を示せ．

(1) $\log(xy) = \log x + \log y$ (Hint: $e^{x+y} = e^x e^y$ を使う．)

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ (Hint: $x = e^t - 1$ とせよ．)

$\boxed{14}$ 次で定義される $[0,1]$ 上の関数 f は連続であることを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

$\boxed{15}$ 次の集合 A の上限を求めよ．

(1) $A = \{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$

(2) 1 より小さい無理数の全体からなる集合 A.

$\boxed{16}$ tan の加法定理を使って次の式を証明せよ: $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{17}$ 定義に従って次の公式を示せ．

(1) $(\cos x)' = -\sin x$

(2) $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$
(3) $(a^x)' = a^x \log a, \quad (a > 0)$

$\boxed{18}$ 次の公式を示せ.
(1) $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
(2) $\left(\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
(3) $\left(x\sqrt{1+x^2} + \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)' = 2\sqrt{1+x^2}$
(4) $\left(\log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|\right)' = \dfrac{1}{\sin x}$

$\boxed{19}$ 次の等式を示せ.
(1) $\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)' = -\dfrac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$
(2) $\left(\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}\right)' = \dfrac{2}{1+x^2}$
(3) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{a}\right)' = \sqrt{a^2-x^2} \quad (a > 0)$

$\boxed{20}$ 次を示せ.
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3} = -\frac{1}{3}$
(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3} = \frac{1}{3}$
(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}$

[解答]

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin x}{x^2\sin^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin x)(x-\sin x)}{xx\sin^2 x} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x} \quad (\text{ロピタルの定理}) \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(\sin^2 x + 2x\sin x\cos x)(1+\cos x)} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{(\sin^2 x + 2x\sin x\cos x)(1+\cos x)} \\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\frac{\sin x}{\sin x + 2x\cos x} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

□

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

[解答] 対数を取って $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2}$ を調べる.

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x} \quad (\text{ロピタルの定理})
$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$\square$

$\boxed{21}$ 次を示せ.

(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'' = (1+2x^2)(1-x^2)^{-5/2}$

(2) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'' = \dfrac{(2-x^2)\sin x - 2x\cos x}{x^3}$

(3) $\left(\sqrt{1-x^2}\right)''' = -3x(1-x^2)^{-5/2}$

$\boxed{22}$ 次を示せ.

(1) $\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{2}\left\{\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\}$

(2) $n \geq 3$ のとき $\left(\dfrac{x^3}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ (Hint: $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$)

(3) $(e^x \sin x)^{(n)} = \sqrt{2}^{\,n} e^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$

$\boxed{23}$ $x \geq 0$ のとき次の不等式を示せ.

(1) $\left|\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}\right| \leq \dfrac{x^5}{120}$

(2) $\left|\log(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right| \leq \dfrac{x^3}{3}$

$\boxed{24}$ テイラーの定理を用いて次の近似計算をせよ.

(1) $\sin 10^\circ \fallingdotseq 0.174$

(2) $\log\dfrac{3}{2} \fallingdotseq 0.405$ (Hint: $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ にテイラーの定理を使う)

$\boxed{25}$ 次の整級数の収束半径 r はカッコ内で与えたものになることを示せ.

(1) $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots \quad (r=1)$

(2) $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots \quad (r=\infty)$

(3) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^4}{2^2} + \dfrac{x^9}{2^3} + \dfrac{x^{16}}{2^4} + \cdots \quad (r=1)$

$\boxed{26}$ 次の関数に対し，あとの問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0\,\text{のとき}) \\ 0 & (x \leq 0\,\text{のとき}) \end{cases}$$

(1) $x > 0$ のとき

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x} \quad (P_n(x)\ \text{は多項式})$$

を示せ.

(2) すべての自然数 n に対して $f^{(n)}(0) = 0$ であることを示せ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ において解析的でないことを示せ.

$\boxed{27}$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $(0,1]$ において連続であるが，一様連続ではないことを示せ.

$\boxed{28}$ 次の定積分の等式を示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx = 4$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin x\,dx = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{6}$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2} - 2$

$\boxed{29}$ 次の等式を定積分を用いて示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right\} = \frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right\} = 2\sqrt{2} - 2$

$\boxed{30}$ 次の積分の公式を示せ（置換積分と部分積分を用いること）．

(1) $\displaystyle\int x^2 e^{-x} = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \log(1+e^x) + C$

(4) $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x + C$

$\boxed{31}$ $I_n = \displaystyle\int \tan^n x\,dx$ とするとき，漸化式 $I_n = \dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}$ を示せ．これを用いて $\displaystyle\int \tan^4 x\,dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$ を示せ．

[解答]

$$\begin{aligned} I_n &= \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \tan^{n-2} x\,\sec^2 x\,dx - \int \tan^{n-2} x\,dx \\ &= \int \tan^{n-2} x(\tan x)'\,dx - I_{n-2} = \frac{1}{n-2}\tan^{n-1} x - I_{n-2}. \end{aligned}$$

これから $I_4 = \frac{1}{3}\tan^3 x - I_2 = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + I_0 = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$ □

$\boxed{32}$ $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^n}$ とする．$n \geq 2$ のとき漸化式 $I_n = -\dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} - \dfrac{x}{2n-2}\dfrac{1}{(x^2-1)^{n-1}}$ を示せ．これを用いて $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^3} = \frac{3}{16}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{3x}{8(x^2-1)} - \frac{x}{4(x^2-1)^2} + C$ を示せ．

[解答]

$$\begin{aligned} I_n &= -\int \frac{x^2-1}{(x^2-1)^n}dx + \int \frac{x^2}{(x^2-1)^n}dx \\ &= -I_{n-1} + \int \frac{x}{2}\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^n}dx \\ &= -I_{n-1} - \frac{x}{2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x^2-1)^{n-1}} + \int \frac{1}{2n-2}\frac{1}{(x^2-1)^{n-1}}dx \\ &= (-1 + \frac{1}{2n-2})I_{n-1} - \frac{x}{2n-2}\frac{1}{(x^2-1)^{n-1}} \\ &= -\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} - \frac{x}{2n-2}\frac{1}{(x^2-1)^{n-1}}. \end{aligned}$$

これから

$$
\begin{aligned}
I_3 &= -\frac{3}{4}I_2 - \frac{x}{4}\frac{1}{(x^2-1)^2} \\
&= -\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}I_1 - \frac{x}{2}\frac{1}{x^2-1}\right) - \frac{x}{4}\frac{1}{(x^2-1)^2} \\
&= -\frac{3}{8}I_1 + \frac{3x}{8}\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{4}\frac{1}{(x^2-1)^2} \\
&= -\frac{3}{8}\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{3x}{8}\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{4}\frac{1}{(x^2-1)^2}
\end{aligned}
$$

□

$\boxed{33}$ $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ を利用して

$$
\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}
$$

を示せ．これから

$$
\int\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\{\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\}+C
$$

を示せ．