2010年度後期 解析学II 演習問題

重川 一郎

平成23 年2 月8 日

$\boxed{1}$ V を，ノルム $\|\cdot\|$ を持つ $\mathbb{C}$ 上のノルム空間とする．

(1) $x, y \in V$ に対して，不等式 $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ が成り立つことを示せ．

(2) V の元の列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in V$ に（V のノルムから定まる位相に関して）収束するとき，実数列 $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ は $\|x\|$ に収束することを示せ．

$\boxed{2}$ $(V, \| \|_V)$, $(W, \| \|_W)$ をノルム空間とする．線型写像 $T\colon V \to W$ に対して，次の条件は同値であることを示せ．

(i) T は V 上連続．

(ii) T は原点で連続．

(iii) T は有界．すなわちある $c > 0$ が存在して，すべての $x \in V$ に対し $\|Tx\|_W \leq c\|x\|_V$.

$\boxed{3}$ V をノルム空間とするとき，V^* はノルム $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)|; \|x\| \leq 1\}$ で Banach 空間になることを示せ．

$\boxed{4}$ (1) $p,\, q > 1,\, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする．任意の $a,\, b \geq 0$ に対し

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

を示せ．また等号はいつ成り立つか．(Hint: $x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q}$ を示し $x = ab^{-q/p}$ とおけ)

(2) n は自然数で，$p_1, p_2, \ldots, p_n, q \in [1, \infty]$ は $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{q}$ をみたしている．（ここで $1/\infty$ は 0 と定義する.）このとき，$f_i \in L^{p_i}(X, \mu)$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して $f_1 f_2 \cdots f_n \in L^q(X, \mu)$ であり，次の不等式が成り立つことを示せ（Hölder の不等式を使って帰納的に示す）．

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_q \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}.$$

$\boxed{5}$ $\mu(X) < \infty$ とする．二つの $\mathbb{C}$-値可測関数 $f,\, g$ に対し

$$\rho(f, g) = \int_X \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}\, d\mu$$

と定める．ρ は距離となり，ρ で収束することと，測度収束は同値になることを示せ．

$\boxed{6}$ $\mu(X) < \infty$ とする．$f \in L^\infty(\mu)$ に対して

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p$$

を示せ．

$\boxed{7}$ $\{f_n\} \subseteq L^p(\mu)$ が $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p < \infty$ を満たしているとする．また $G_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_{k+1} - f_k|$ とおく．このとき次を示せ．

(1) $\|G_n\|_p \le \sum_{k=1}^n \|f_{k+1} - f_k\|_p$.

(2) G_n はある $G \in L^p(\mu)$ に概収束する．

(3) f_n はある $f \in L^p(\mu)$ に概収束する．

$\boxed{8}$ $L^\infty(\mathbb{R}, dx)$ は可分ではないことを示せ．

$\boxed{9}$ Hilbert 空間において次を示せ．

(1) $x \perp y$ ならば $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(2) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

$\boxed{10}$ C が凸であることを $x, y \in C$, $0 \le t \le 1$ のとき $tx + (1-t)y \in C$ が成り立つことと定義する．C を Hilbert 空間 H の閉凸集合，x を C 外の点とする．C 内に x に最も近い点がただ一つ存在することを示せ．

$\boxed{11}$ $L^p(\mathbb{R})$ で $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度に関する L^p 空間を表す．このとき，次の命題はともに偽である．それぞれについて，反例を挙げよ．

(1) $L^1(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$.

(2) $L^2(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$.

$\boxed{12}$ $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $L^2(X,\mu)$ の元の列で，ある $f \in L^2(X,\mu)$ に L^2-収束している．このとき，$\{|f_n|^2\}_{n=1}^\infty$ は $|f|^2$ に L^1-収束していることを示せ．

$\boxed{13}$ $f_n, f \in L^1(\mu)$, $f_n \ge 0$, $f_n \to f$ a.e., $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$ とする．このとき次を示せ．

(1) $(f - f_n)_+ \le |f|$ を示し，さらに $\int (f-f_n)_+\,d\mu \to 0$ を示せ．但し $x_+ = x \vee 0 = \max\{x, 0\}$.

(2) $\int |f - f_n|\,d\mu \to 0$ を示せ．

$\boxed{14}$ 次の条件を満たす非負関数列 $\{f_n\}$ を $[0,1]$ に構成せよ．$0 < a < b < \infty$ を任意に与えて，$f_n \to f$ a.e., $\int f_n\,dx \to b$, $\int f\,dx = a$.

$\boxed{15}$ μ, ν を σ-有限な測度で $\nu \prec \mu$ が成り立っているとする．このとき $f \in L^1(\nu)$ ならば $f\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ で

$$\int f\,d\nu = \int f\frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu$$

が成立することを示せ．

$\boxed{16}$ μ, ν, ξ を σ-有限な測度で $\xi \prec \nu$, $\nu \prec \mu$ が成り立っているとする．このとき

$$\frac{d\xi}{d\mu} = \frac{d\xi}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}$$

が成立することを示せ．

$\boxed{17}$ $\mathbb{R}$ において，μ を counting measure (集合の個数を表す．無限集合に対しては ∞)，λ を Lebesgue 測度とする．λ は μ に対して絶対連続であるが，Radon-Nikodym の定理に相当することは成立しないことを示せ．

$\boxed{18}$ 位相空間 X の上の Borel 測度 μ に対し，$\mu(X \setminus F) = 0$ を満たす最小の閉集合を μ の台 (support) という．一般に台が必ず存在するとは限らないが，可分な距離空間の有限測度 μ に対しては台が存在することを示せ．

$\boxed{19}$ $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p \in [1, \infty))$ に対して

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx = 0$$

が成り立つことを次の手順で示せ．
(1) $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ のとき成立することを示す．
(2) $C_0(\mathbb{R}^n)$ が $L^p(\mathbb{R}^n)$ で稠密であることを使って一般の場合を示す．

$\boxed{20}$ $[0,1]$ に含まれる有理数全体に番号付けをして $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする．$[0,1]$ 上の関数 f を

$$f(x) = \sum_{n:\, x_n \le x} \frac{1}{2^n}$$

で定める．但し，上の和は $x_n \le x$ を満たす n についてだけとるものとする．f は無理点で連続な狭義単調増大関数であることを示せ．

$\boxed{21}$ $\mathrm{Var}(f : [a,b])$ で区間 $[a,b]$ における関数 f の全変動量を表すものとする．f が $[a,b]$ で有界変動であるとき，次を示せ．
(1) $\mathrm{Var}(f : [a,x])$, $\mathrm{Var}(f : [a,x]) - f(x)$ は x の関数として単調増大である．
(2) f は単調増大関数の差で表される．

$\boxed{22}$ 区間 $[a,b]$ 上の有界変動関数の不連続点は高々可算であることを示せ．（まず f が単調増大関数のとき $f(x+) - f(x) \ge \frac{1}{n}$ となる x は有限個であることを示す）

$\boxed{23}$ $[0,1]$ の点を 3 進展開したとき，1 が決して現れないように展開できる数の全体 C を Cantor 集合という．(展開に関しては有限で展開が終わる $0.\cdots 2$ はこのまま，$0.\cdots 1$ の場合は $0.\cdots 0222\cdots$ のようにするわけである．) C の点を $x = 0.x_1x_2\cdots$ と 1 が現れないように表現したとき

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$$

と定めると，φ は C 上で定義された単調増大関数になることを示せ．またこの関数は $[0,1]$ に単調増大で連続な関数に一意的に拡張できることを示せ．さらにこの拡張した関数は Lebesgue 測度に対して a.e. で微分が 0 であることを示せ（C の補集合で微分が 0 となることをいう）．

$\boxed{24}$ 関数 f, g が区間 $[a,b]$ で絶対連続であるならば，これらの積 fg も絶対連続であることを示せ．またこのとき次の部分積分の公式が成立することを示せ．

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

$\boxed{25}$ 区間 $[a,b]$ で絶対連続な関数は連続かつ有界変動であることを示せ．(問題 $\boxed{23}$ の関数 φ は有界変動かつ連続であるが，絶対連続ではない)

$\boxed{26}$ μ を Lebesgue 測度 λ に対して絶対連続な有限 Borel 測度とする．任意の Borel 可測集合 A に対して $x \mapsto \mu(A+x)$ は連続関数になることを示せ．ここで $A+x = \{y+x;\, y \in A\}$ である．($\frac{d\mu}{d\lambda}$ に問題 $\boxed{19}$ の結果を使え)

$\boxed{27}$ $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ の右辺が一様収束すれば $\hat{f}(n) = c_n$ であることを示せ．

$\boxed{28}$ f が偶関数ならば $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\, dx$ で $f(x) \sim \hat{f}(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)\cos nx$. f が奇関数ならば $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\pi f(x)\sin nx\, dx$ で $f(x) \sim 2i\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)\sin nx$ となることを示せ．

$\boxed{29}$ $f(x) = |x|$, $-\pi \le x < \pi$ の Fourier 係数が $\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\hat{f}(n) = -\dfrac{2}{\pi n^2}$ (n: odd), $= 0$ (n: even) であることを示せ．従って

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

[解答] まず $n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}[x\frac{1}{n}\sin nx]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{n}\sin nx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{1}{n^2}\cos nx]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1) \\
&= \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2}, & n\text{: odd} \\ 0, & n\text{: even} \end{cases}
\end{aligned}$$

$n = 0$ のときは

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

よって $\hat{f}(0) = \frac{\pi}{2}$, $\hat{f}(n) = -\frac{2}{\pi n^2}$ (n: odd), $= 0$ (n: even) である。 $\square$

$\boxed{30}$ $f(x) = x$, $-\pi \le x < \pi$ の Fourier 係数が $\hat{f}(n) = -\dfrac{(-1)^n}{ni}$ であることを示せ．従って

$$x \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n}\sin nx$$

[解答]

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\, dx = -\frac{1}{\pi}[x\frac{1}{n}\cos nx]_0^\pi + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{n}\cos nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos n\pi + [\frac{1}{n^2}\sin nx]_0^\pi = -\frac{(-1)^n}{n}.$$

よって

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\, dx = -i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\, dx = -i\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\, dx = -\frac{(-1)^n}{ni}.$$

$\square$

$\boxed{31}$ $f \in C^m(T)$ とすれば，$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k \hat{f}(n),\ 0 \le k \le m$ となることを示せ．

$\boxed{32}$ $f \in L^1(T)$ で $\hat{f}(0) = 0$ のとき $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)\,dy$ と定めると，$\hat{F}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}(n),\ n \neq 0$ であることを示せ．

$\boxed{33}$ $D_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$ とおくとき，

$$D_N(x) = e^{-iNx}\frac{1-e^{i(2N+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{\cos Nx - \cos(N+1)x}{1-\cos x} = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

を示せ．また $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x)\,dx = 1$ を示せ．

$\boxed{34}$ $\sigma_N(x) = \displaystyle\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x)$ とおくとき

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1}\frac{1-\cos(N+1)x}{1-\cos x} = \frac{1}{N+1}\left\{\frac{\sin\frac{(N+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right\}^2$$

を示せ．また $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_N(x)\,dx = 1$ を示せ．

$\boxed{35}$ $\{u_n\}$ を Hilbert 空間の正規直行系とし，$c_n = (f, u_n)$ と定める．このとき次が成り立つことを示せ．

(1) 任意の $d_1, \ldots, d_N$ に対し $\|f - \sum_{n=1}^N c_n u_n\|^2 \le \|f - \sum_{n=1}^N d_n u_n\|^2$.
(2) $\|f\|^2 = \|f - \sum_{n=1}^N c_n u_n\|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n|^2$.
(3) $\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 \le \|f\|^2$.
(4) $\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{n=1}^N c_n u_n\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|f\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2$

$\boxed{36}$ $n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i k \frac{j}{n}} = \begin{cases} n, & k = nl,\ l \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

であることを利用して $g \in L^q(T)$ $(q \in (1,\infty])$ のとき次を示せ (g は周期 2π で $\mathbb{R}$ 全体で定義されていると思え):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx} g(nx)\,dx = \begin{cases} \hat{g}(0), & k = 0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

さらに $f \in L^p(T)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1\ )$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sigma_n f = f$ in $L^p(T)$ であることを用いて次を示せ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) g(nx)\,dx = \hat{f}(0)\hat{g}(0)$$

$\boxed{37}$ Riemann-Lebesgue の定理を用いて $f \in C(T)$ が絶対連続のとき

$$\lim_{|n|\to\infty} n\hat{f}(n) = 0$$

を示せ.

$\boxed{38}$ 問題 $\boxed{29}$ の展開

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$$

が $-\pi \le x \le \pi$ で成立することを利用して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ を示せ.

$\boxed{39}$ 問題 $\boxed{30}$ で $f(x) = x$, $-\pi \le x < \pi$ の Fourier 係数が $\hat{f}(n) = -\dfrac{(-1)^n}{ni}$ であることを示した.

これに Parseval の定理を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を示せ.

$\boxed{40}$ Fourier 変換を $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$, シフトを $\tau_x f(y) = f(y-x)$, 合成積を $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$ で定める．また $e_\xi(x) = e^{i\xi x}$ とする．f, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とするとき，次が成り立つことを示せ.

(1) $(\tau_x f)^\wedge = e_{-x}\hat{f}$.

(2) $(e_x f)^\wedge = \tau_x \hat{f}$.

(3) $(f*g)^\wedge = (2\pi)^{n/2}\hat{f}\hat{g}$.

(4) $\lambda > 0$, $h(x) = f(x/\lambda) \Rightarrow \hat{h}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$

$\boxed{41}$ 次を示せ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\xi x}\,dx = \pi e^{-|\xi|}.$$

$\boxed{42}$ 次を示せ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\xi x}\,dx = \frac{2}{1+x^2}.$$

$\boxed{43}$ 複素線積分と $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = 1$ を用いて次を示せ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}e^{-i\xi x}\,dx = e^{-\xi^2/2}.$$

$\boxed{44}$ 次を示せ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}\,dx = \frac{2\sin\xi}{\xi\sqrt{2\pi}}.$$

この結果に Plancherel の定理を用いて次を示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\,d\xi = \pi.$$

$\boxed{45}$ $f = 1_{[-1,1]}$ とする．このとき $f * f(x) = (2 - |x|)_+$ を示せ．これを利用して $(2 - |x|)_+$ の Fourier 変換を求めよ．

$\boxed{46}$ $s > 0$ に対して $\gamma_s(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-x} 1_{[0,\infty)}(x)$ とおく．このとき次を示せ:

(1) $z > -1$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_s(x) e^{-zx}\, dx = (1+z)^{-s}. \tag{$*$}$$

(2) $(*)$ の両辺は $z \in \mathbb{C}$, $\Re z > -1$ で解析的である．

(3) 上の結果を使って次を示せ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_s(x) e^{-i\xi x}\, dx = (1 + i\xi)^{-s}.$$

$\boxed{47}$ (1) $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ は $\int_{\mathbb{R}} u(x)\, dx = 1$ をみたすとする．任意の $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ に対して $c = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx$ とおき

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \{\phi(y) - cu(y)\}\, dy$$

と定めると $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ なることを示せ．

(2) $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ が $T' = 0$ をみたすならば，T は定数関数であることを示せ．

$\boxed{48}$ (1) $u \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ は $u(0) = 1$ をみたすとする．任意の $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ に対して，ある $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ が存在して，

$$\phi(x) = x\psi(x) + \phi(0)u(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

と表せることを示せ．

（Hint: $f \in C^1(\mathbb{R})$ に対して，$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))\, dt$）

(2) $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ は $xT = 0$ をみたしているとする．このとき，ある $a \in \mathbb{C}$ が存在して $T = a\delta_0$，すなわち $\langle T, \phi \rangle = a\phi(0)$ $(\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}))$ であることを示せ．

$\boxed{49}$ $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ に対して，

$$S(\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$$
$$T(\phi) = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}\, dx$$

と定めるとき，$S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ であることを示せ．また二つの超関数は実は同じであることを示せ．