確率解析
—ブラウン運動を使った解析

重川 一郎

2004 年 12 月 11 日 (土)

COE シンポジウム

目次

1. ランダム・ウォーク
2. Brown 運動
3. 確率積分と伊藤の公式
4. 偏微分方程式との関連

1. ランダム・ウォーク

ランダム・ウォークとは ？

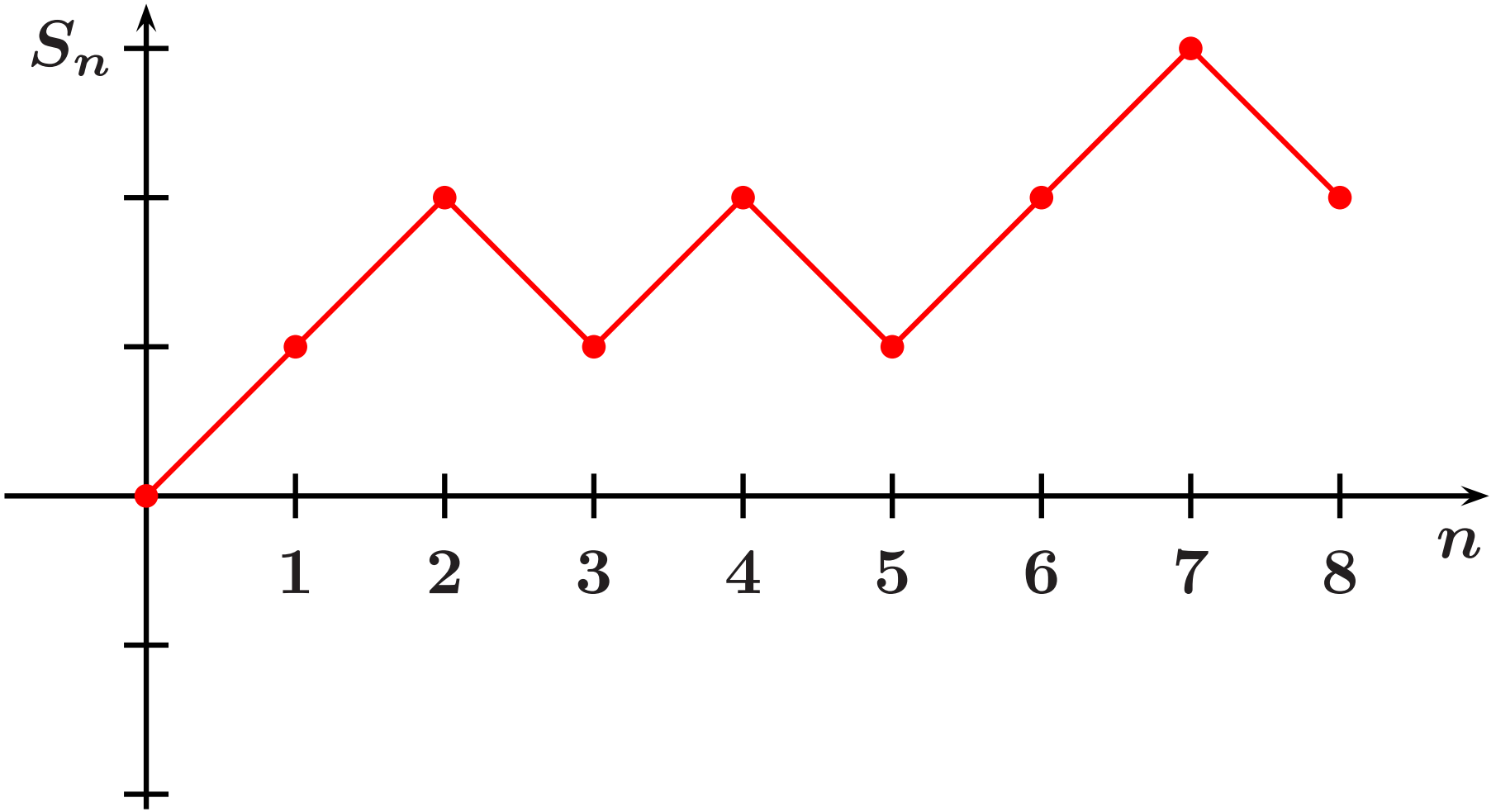
X_n で硬貨投げを表わしたとき、その和 S_n をランダム・ウォークという。即ち

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{確率 } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{確率 } \frac{1}{2} \end{cases}$$

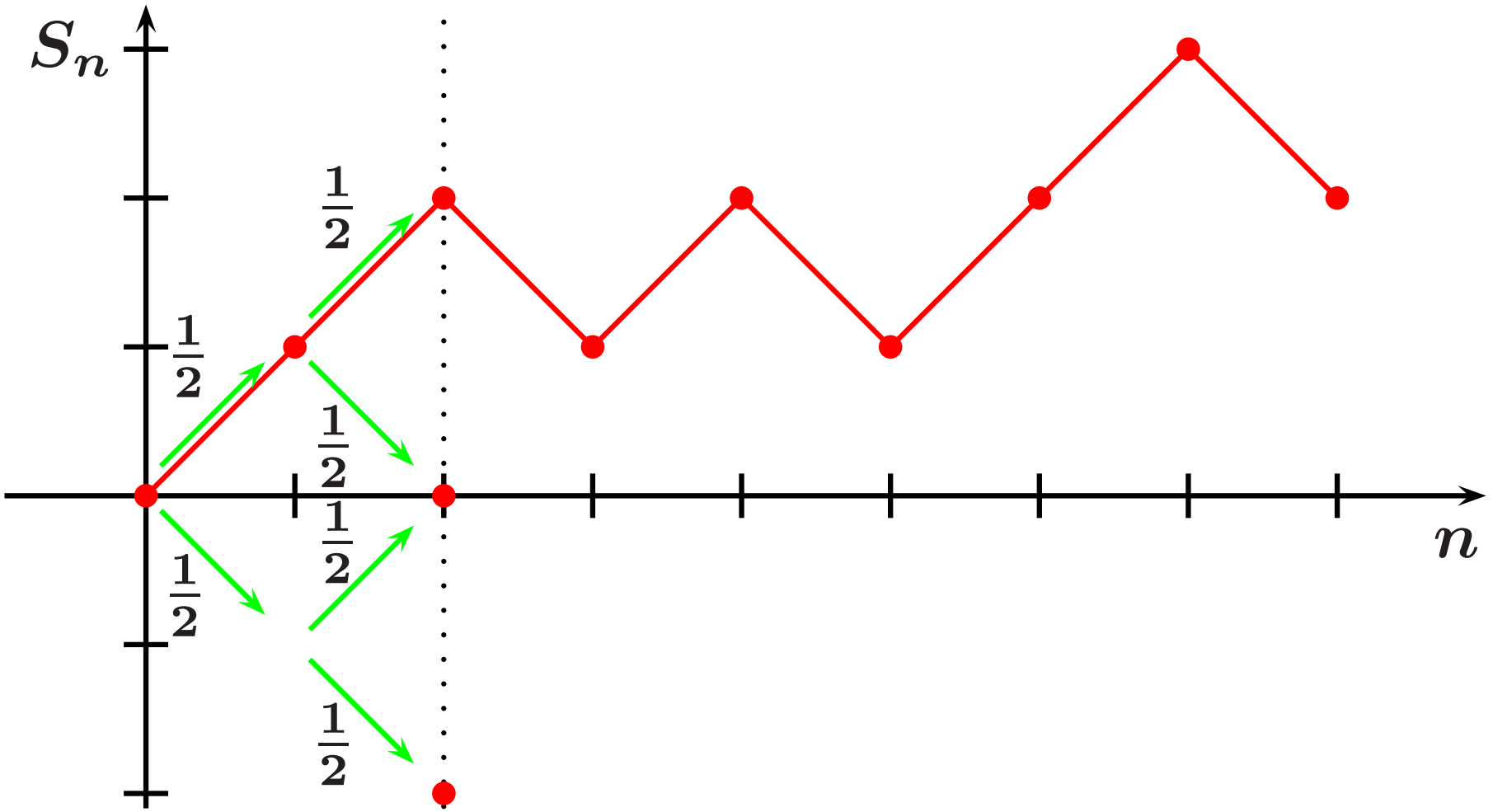
$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

正確には $X_n = X_n(\omega)$ で ω は randomness を表す。

ランダム・ウォーク



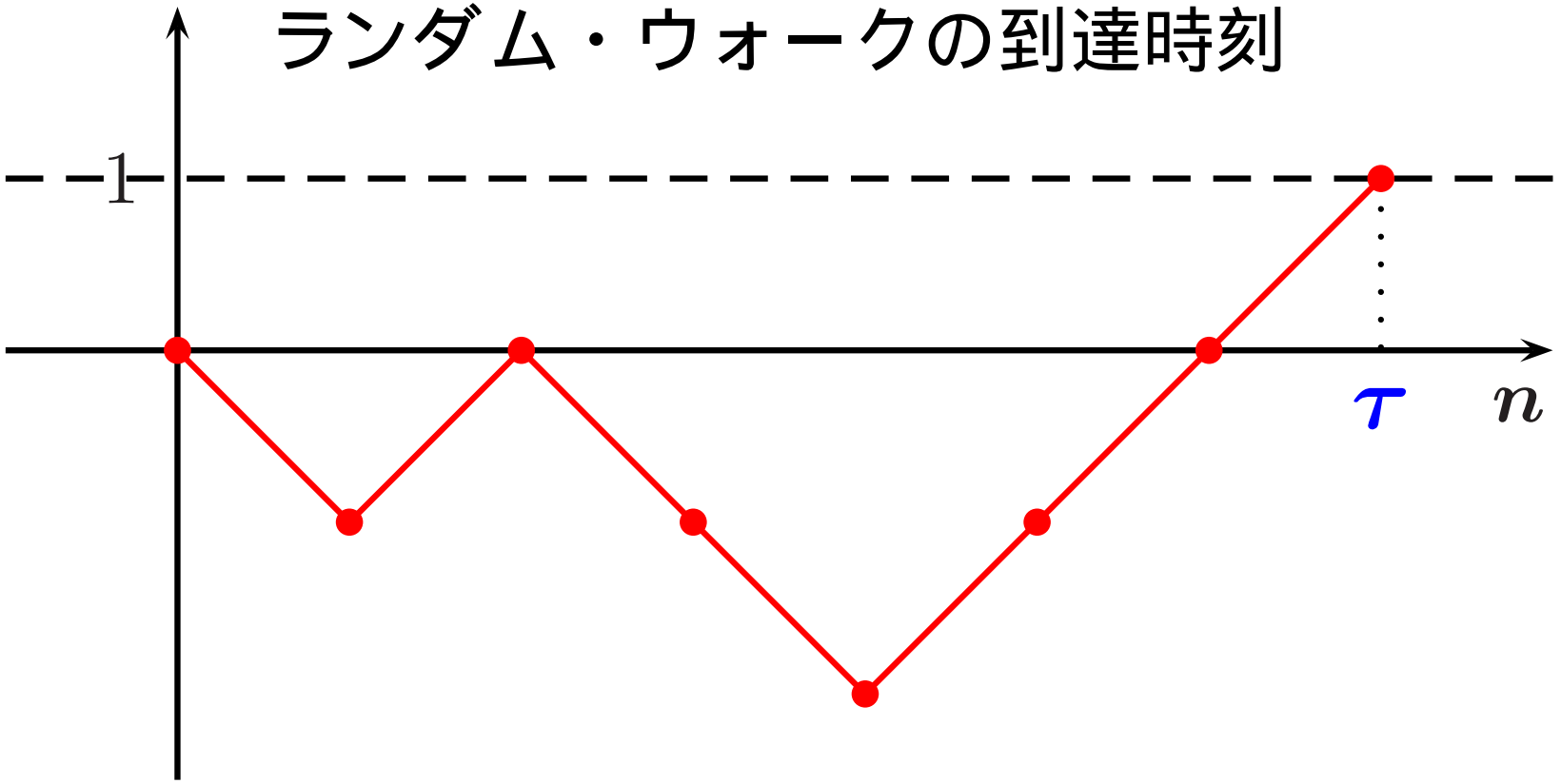
ランダム・ウォーク



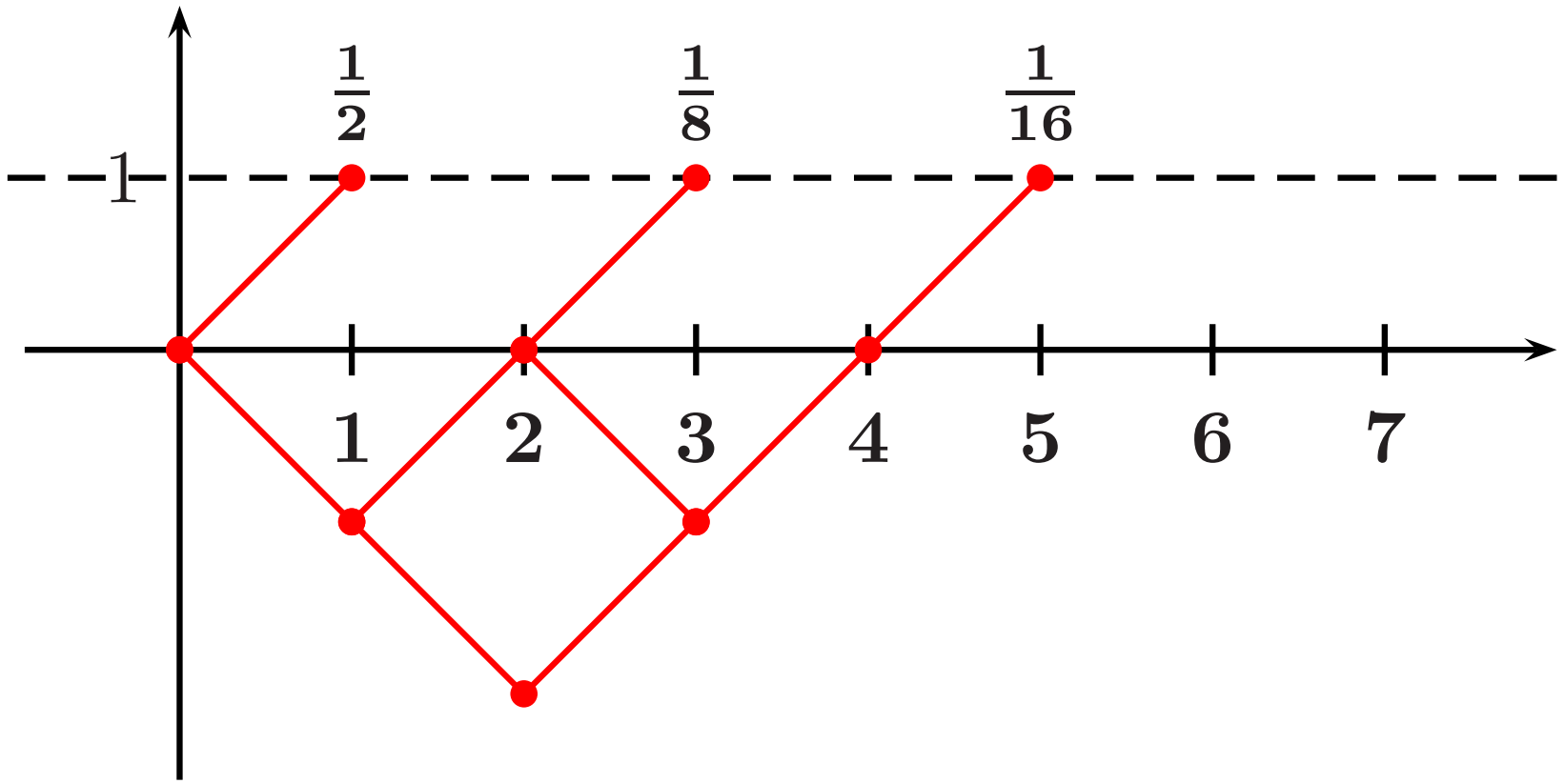
ランダム・ウォークの性質

- 時刻 n での分布は 2 項係数で与えられる。
- 各時刻で新たにランダム・ウォークが始まる。
- マルチンゲールの性質 $E[S_{n+1}|S_n = k] = k$ を持つ。
- 再帰的である (全ての点に到達可能)。

0 から出発して 1 に到達す るにはどれくらいかかるか?

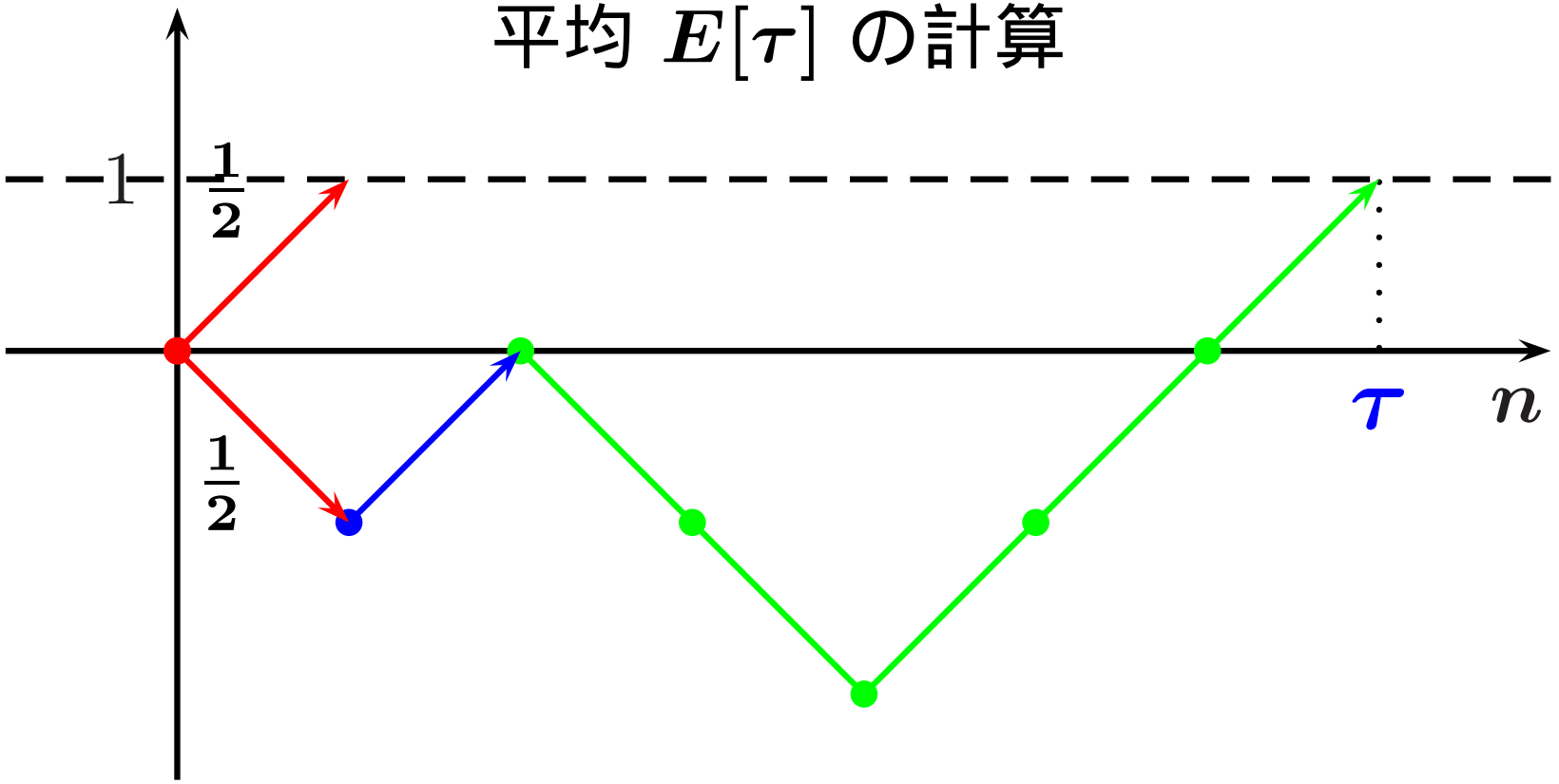


- $\tau = \min\{n; S_n = 1\}$ $\cdots$ 停止時刻 (未来の情報を使わない)
- τ の平均値 $E[\tau]$ を求めよう。



$E[\tau]$ はそう大きくないように思えるが・・・

平均 $E[\tau]$ の計算



$$
\begin{aligned}
E[\tau] &= E[\tau; S_1 = 1] + E[\tau; S_1 = -1] \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\{1 + E[\tau] + E[\tau]\} \\
&= 1 + E[\tau]
\end{aligned}
$$

$$E[\tau] = \infty.$$

$M = \min\{S_n; n \leq \tau\}$（$S_n = 1$ となるまでに必要な借金）とおくと、

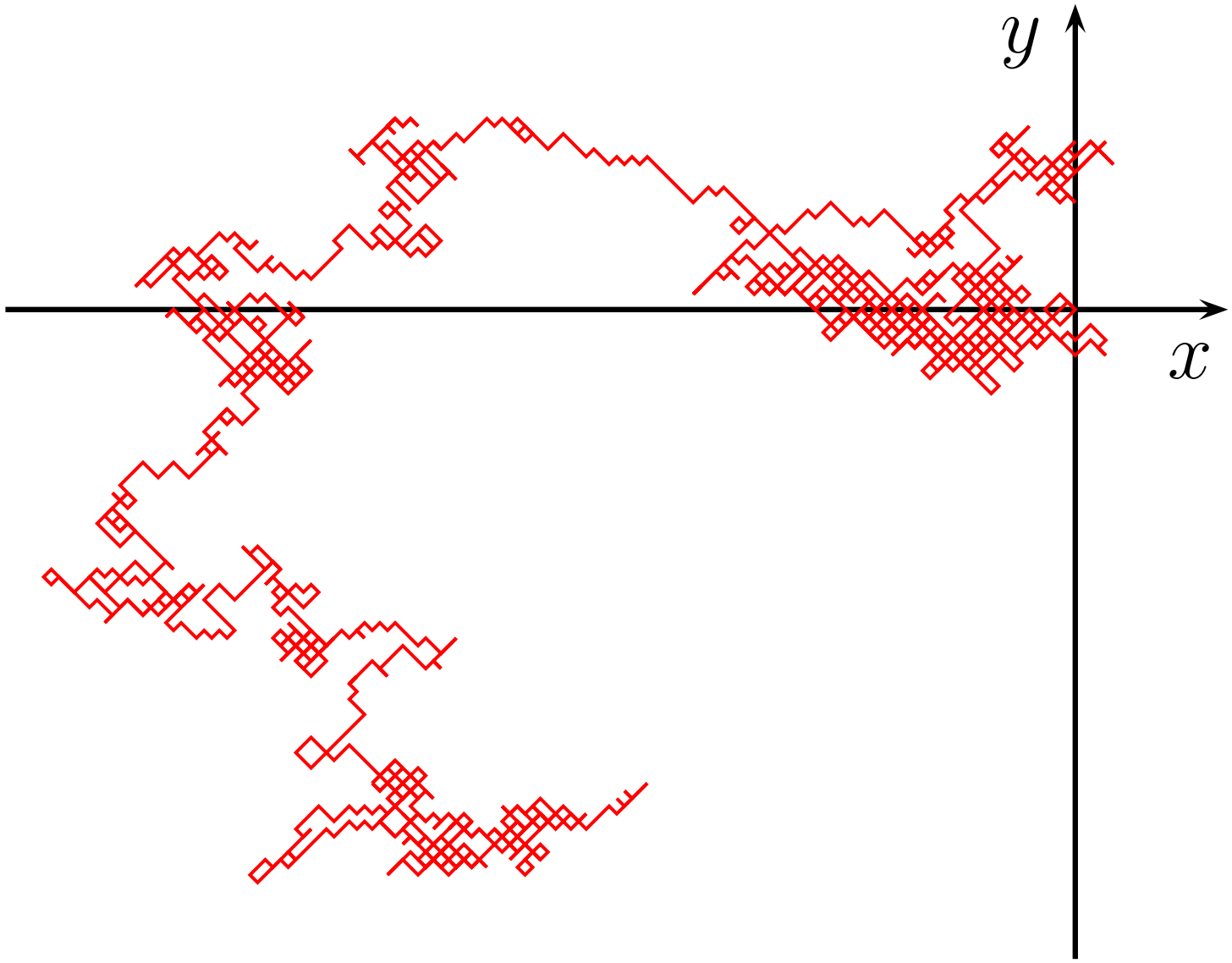
$$E[M] = -\infty.$$

利得 1 を確実に得るためには、無限の時間と無限の資産が必要！

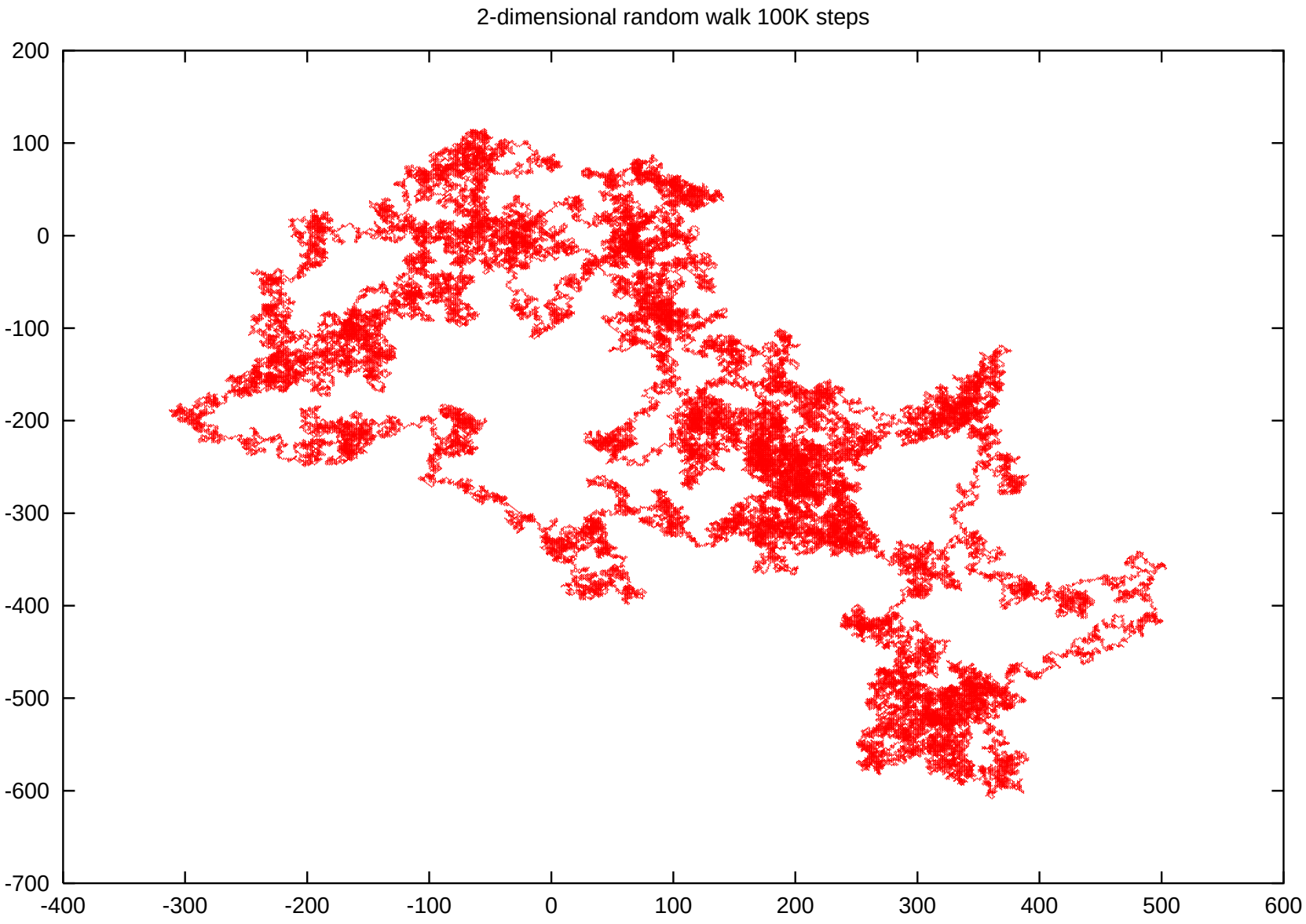
適当に借金の下限 N を設定し $\zeta = \min\{n; S_n = -N\}$ とおくと、どんな停止時刻 $\tau \leq \zeta$ をとっても

$$E[S_\tau] \leq 0.$$

2 次元ランダム・ウォーク 1000 ステップ

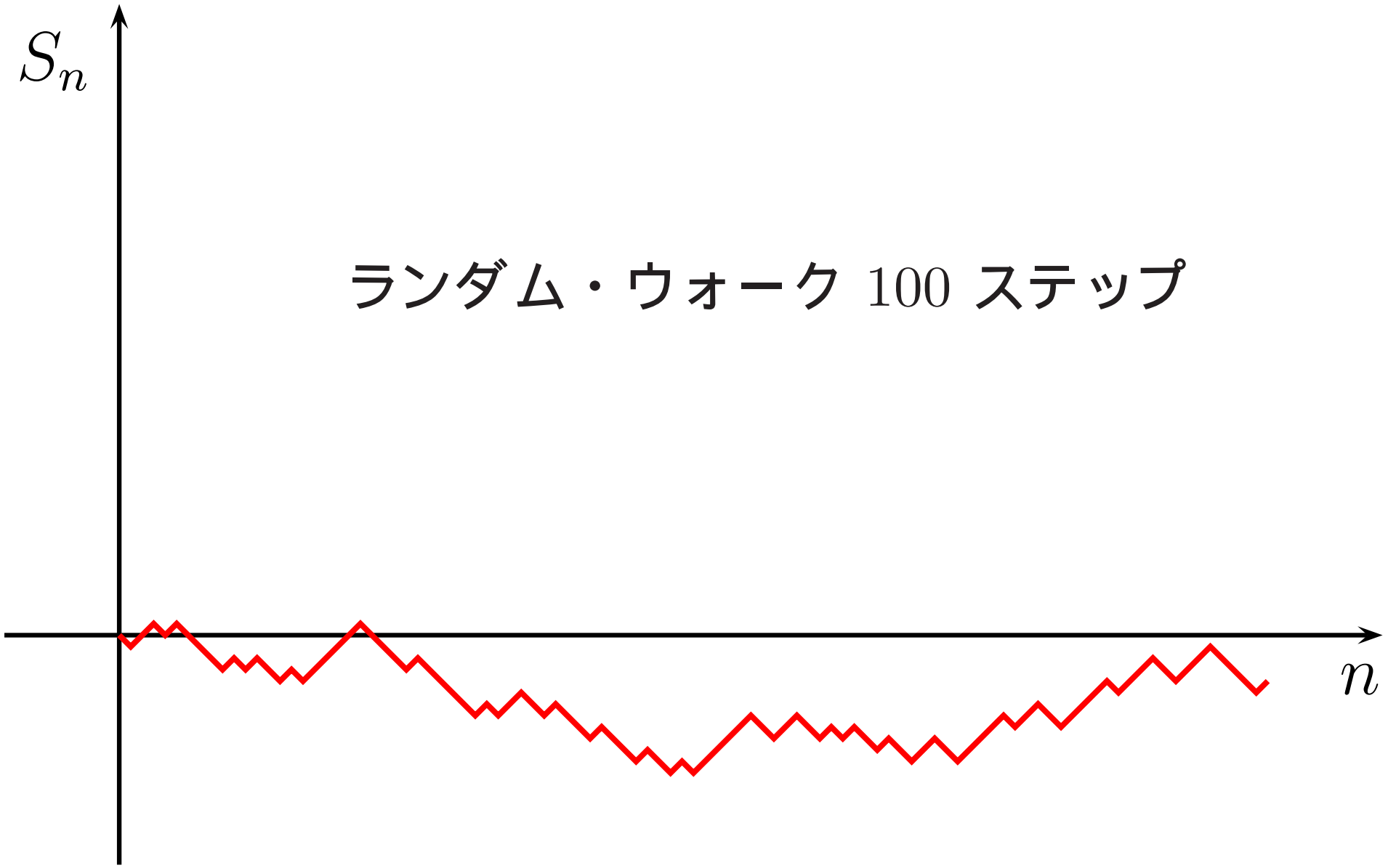


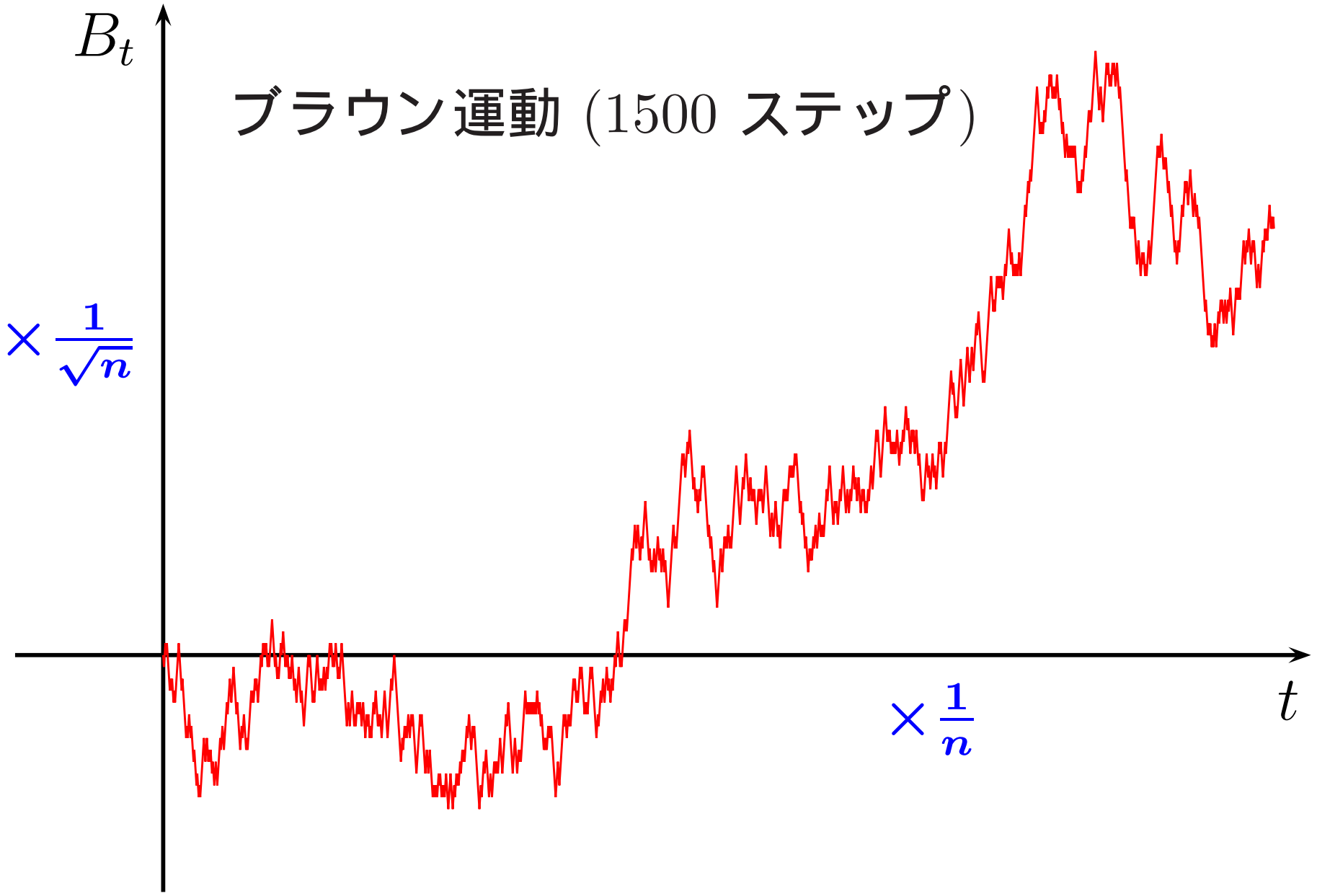
2 次元ランダム・ウォーク 10 万ステップ

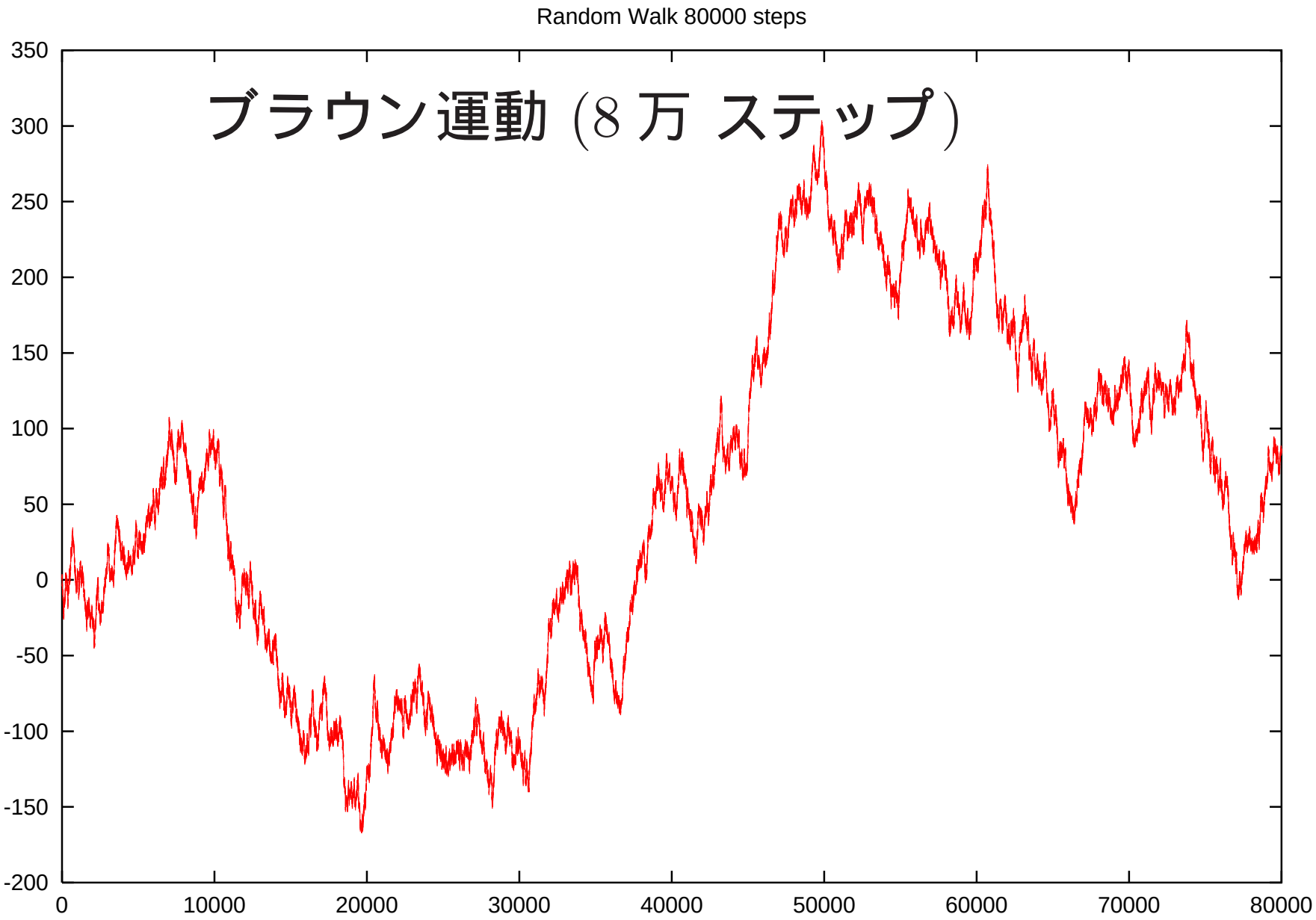


2. ブラウン運動

時空尺度変換：時間と空間を縮小する。


S_n
ランダム・ウォーク 100 ステップ
n


B_t
ブラウン運動 (1500 ステップ)
$\times \frac{1}{\sqrt{n}}$
$\times \frac{1}{n}$
t


Random Walk 80000 steps
ブラウン運動 (8 万 ステップ)
350
300
250
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
0
10000
20000
30000
40000
50000
60000
70000
80000

ブラウン運動の性質

- 時刻 t での分布は $N(0,t)$ (中心極限定理による)。
- 各時刻で新たにブラウン運動が始まる。
- マルチンゲールである： $E[B_{t+s}|B_s = x] = x$。
- 再帰的である。
- 軌道は連続。
- 至るところ微分不可能。
- 至るところ有界変動でない。

3. 確率積分と伊藤の公式

確率積分

ブラウン運動 $\{B_t\}$ に対し、確率積分

$$\int_0^t \Phi(s)dB_s = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \Phi(\tfrac{k}{N}t)(B_{\frac{(k+1)}{N}t} - B_{\frac{k}{N}t})$$

が定義できる。$\{B_t\}$ が t に関して微分可能ならば

$$\int_0^t \Phi(s)dB_s = \int_0^t \Phi(s)\dot{B}_s ds.$$

伊藤の公式

ブラウン運動 $\{B_t\}$ に対し、次が成立する。

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

この等式を伊藤の公式と呼ぶ。確率解析で最も基本的な公式！

この公式は微分形で書けば

$$d(f(B_t)) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt.$$

$b(t)$ が滑らかな関数であれば、合成関数の微分は

$$\frac{d}{dt}f(b(t))) = f'(b(t))b'(t)$$

であるから、f の 2 階の微分まで関係するところが特徴的で、このことにより 2 階の偏微分方程式と密接な関係を持つようになる。

4. 偏微分方程式との関連

$[0,\infty)\times\mathbb{R}$ での次の偏微分方程式を熱方程式 (または拡散方程式) という：

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t>0, \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

f は与えられた関数で初期条件と呼ばれる。この解はブラウン運動を用いて次のように表わすことができる：

$$u(t,x) = E[f(x+B_t)]$$

$$u(t,x) = E[f(x+B_t)]$$

は形式的に次のように書ける：

$$E[f(x+B_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(y) E[\delta_y(x+B_t)]\, dy.$$

↳ 確率変数 $x+B_t$ と超関数 δ_y との合成

= 一般 Wiener 汎関数 ← マリアバン解析

$$p(t,x,y) = E[\delta_y(x+B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\}$$

が熱方程式 (1) の基本解を与えている。

3M

境界条件がある偏微分方程式

D を $\mathbb{R}^d$ の領域として、D 上の関数 u に対して次の微分方程式を考える

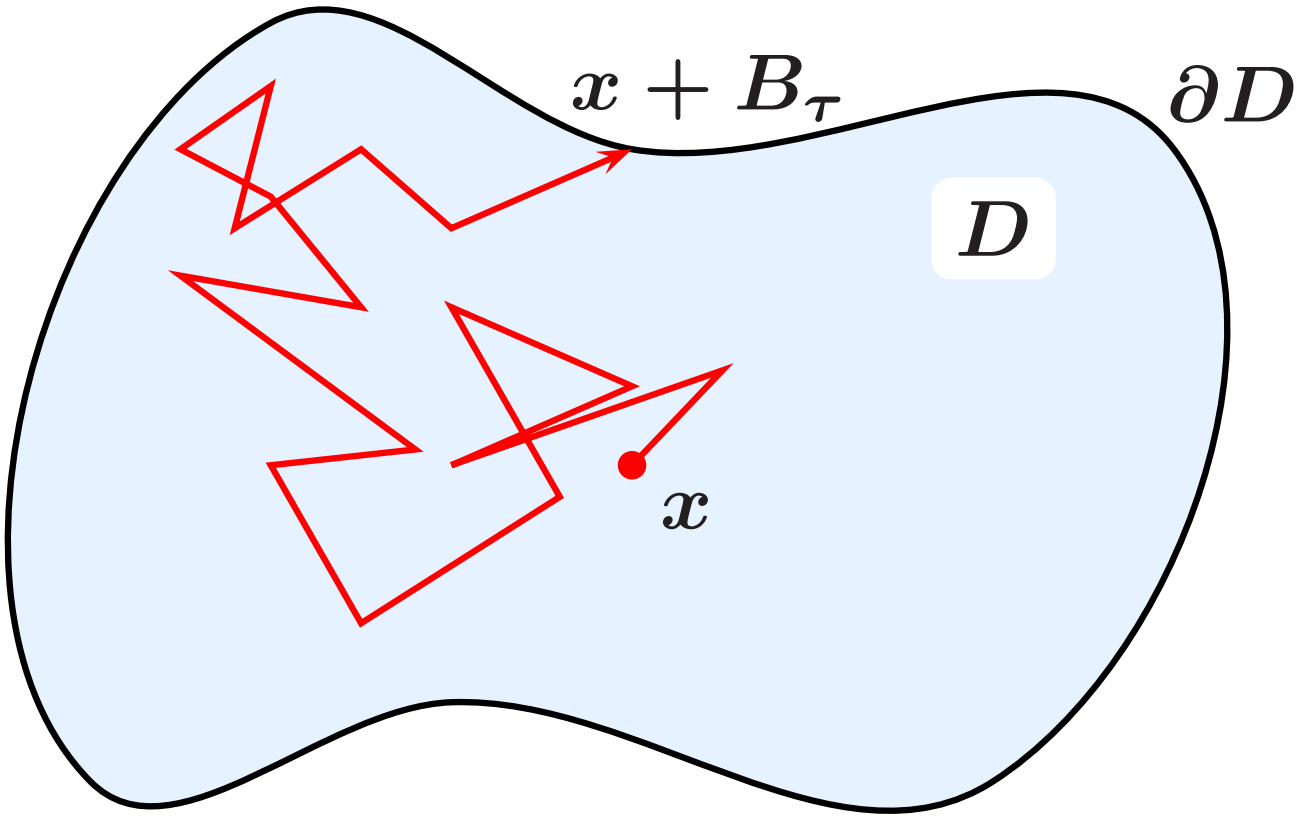
$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in } D, \\ u = f & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

ここに $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ で、f は境界条件を与える関数である。この解もブラウン運動を用いて次のように表すことが出来る：

$$u(x) = E[f(x + B_\tau)].$$

ここで、τ は D からの脱出時刻：

$$\tau = \min\{t; x + B_t \notin D\}.$$



Feynman-Kac の公式

再び $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上で次の偏微分方程式を考える：

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Vu, \quad t>0, \\ u(0,x) = f(x). \end{cases}$$

この解はブラウン運動を用いて次のように表現される：

$$(3)\quad u(t,x) = E\left[f(x+B_t)\exp\left\{ -\int_0^t V(B_s)ds \right\} \right].$$

この公式は **Feynman-Kac の公式**と呼ばれている。
Feynman の名前が冠せられているのは、Feynman 経路積分と関係していることによる。以下そのことを説明する。

Schrödinger 作用素

作用素

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V$$

はポテンシャル V の **Schroödinger 作用素** と呼ばれ、

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = Hu = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Vu \tag{4}$$

は **Schrödinger 方程式**と呼ばれている。Feynman 経路積分はこの解の表示を与えようというものである。

Feynman の着想は、作用 S を

$$S = \int_0^t \left\{ \frac{1}{2}\dot{x}_s^2 - V(x_s) \right\} ds$$

で定義すれば、(4) の基本解が

$$\langle x | e^{-itH} | y \rangle = \int_{\substack{x_0 = x \\ x_t = y}} e^{iS} \prod_{0 \le s \le t} dx_s \tag{5}$$

で与えられるというものである。この表示は形式的なもので厳密な正当化の試みがなされている。

ここで時間を虚数にして

$$t = -i\tau, \quad \tau \geq 0$$

とすると、(5) は

$$\langle x|e^{-\tau H}|y\rangle = \int_{\substack{x_0=x \\ x_\tau=y}} e^{-S_E} \prod_{0\leq\sigma\leq\tau} dx_s \tag{6}$$

と書き直される。S_E は

$$S_E = \int_0^\tau \left\{ \frac{1}{2}\dot{x}_\sigma^2 + V(x_\sigma) \right\} d\sigma.$$

(6) がとりもなおさず (3) を意味する。

Thanks!