確率解析—ブラウン運動を使った解析

1. 確率論とは

明日雨の確率が何パーセントとか、株が上がるか下がるかなど、偶然がかかわる現象は日常生活にもよく現れてきます。確率という概念はこのようにごく身近に存在し、誰もが直感的な理解をもっています。確率論はそうした誰もが持っている漠然とした理解を厳密なものとして数学的に研究する学問なのです。

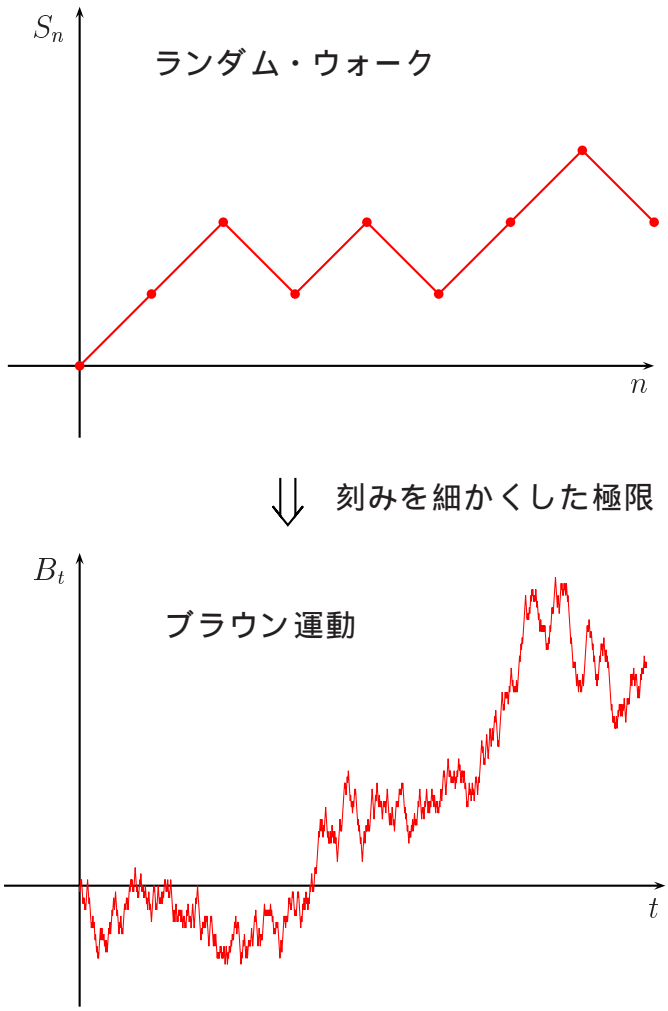
数学は数理現象のなかの法則性を研究対象としている訳ですが、その中にあって、確率論はやや異質な位置を占めています。「ランダム」即ち「でたらめ」を相手にしているのですから、むしろ法則性と相反する世界のように思われがちです。ここでは最近特に研究が進んでいる確率解析を中心に、偶然現象の中にどのような法則性があるのかを紹介します。また、確率論の数学的な厳密さが応用の範囲を広いものにしていることにも注意を喚起しておきましょう。実際確率が係わる分野は多種多様です。数学の外の世界に対しては、物理、生物、工学、経済などの分野へ確率の理論が応用されています。数学の中においても、確率論はそれだけで閉じているわけではなく、統計はもちろんのこと、数理物理、力学系、微分方程式、幾何などの問題にも深く関連しているのです。

2. ブラウン運動とその応用

確率論の中の一番重要なモデルはブラウン運動です。ブラウン運動を厳密に定義することは容易ではありませんが、もう少し直感的に分かりやすいランダム・ウォークから説明していきましょう。ランダム・ウォークは日本語では「酔歩」とか「乱歩」という訳語がよく使われています。これはコインを投げて表ならば一歩進み、裏ならば一歩下がるという運動を記述したものです。数学的に定式化すれば次のようになります。コインを投げて表が出るか、裏が出るかということを、1 が出る確率が $\frac{1}{2}$、-1 が出る確率が $\frac{1}{2}$ の確率変数 X で表します。このような確率変数で独立な列 $\{X_n\}$ を用意し、$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおけば、この S_n が酔歩の運動を表しているわけです。n は時刻を表します。この酔歩の時間と空間の刻みを細かくしていき、極限をとるとブラウン運動が得られます（図参照）。

ブラウン運動は図にあるように非常にギザギザした不規則な曲線になります。連続な曲線ではありますが、どの点でも微分できないこと、どんな小さな区間をとっても有界変動でないことなど、ブラウン運動については詳しい性質がいろいろ分かっています。こうしてみるとブラウン運動は非常に性質の悪い関数で、取り扱いにくいものに思われますが、確率積分 $\int_0^t \Phi(s)dB_s$ を定義することができるのです。B_t が微分可能か、有界変動であれば積分が定義できることはよく知られていましたが、ブラウン運動はこれらの性質を持ちません。それにもかかわらず積分が定義できるというのは驚くべきことですが、この積分を定義したのが伊藤清だったのです。伊藤はさらにブ

ラウン運動の変数変換公式をも証明しました。それは確率積分を用いて次のように表現されます。

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

B_t が t に関して滑らかであれば、右辺第 1 項だけで十分ですが、第 2 項が現れるところが特徴的です。ブラウン運動に関する計算はすべてこの公式によって行われるといっても過言でないほど重要な公式なのです。この公式は、その発見者にちなんで伊藤の公式と呼ばれています。さらにこの確率積分に基づいて、微分方程式と同じように確率微分方程式を考えることができます。いろいろなモデルがこの確率微分方程式によって記述できるようになったのです。講演ではこれらの応用にも触れていきます。