今までの研究を振り返って
— 確率論とともに

重川 一郎 (京都産業大学)

2024 年 2 月 7 日

最終講義

URL: http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/

Contents

研究の振り返り

主な研究

- Malliavin 解析
- 対数 Sobolev 不等式
- 指数定理の確率論的な証明
- 多様体上の拡散過程
- 1 次元拡散過程

Malliavin 解析

Wiener 空間

議論の枠組み

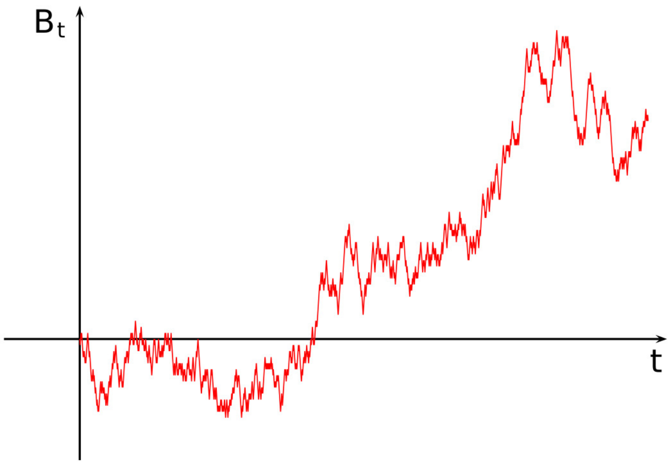
- Wiener 空間： $W = C([0,1] \to \mathbb{R})$
- Wiener measure：μ
- $B_t(w) = w(t)$: Brown 運動
- Cameron-Martin space：

$$H = \{h \in W; h(0) = 0,\ h' \in L^2([0,1]\} \tag{1}$$

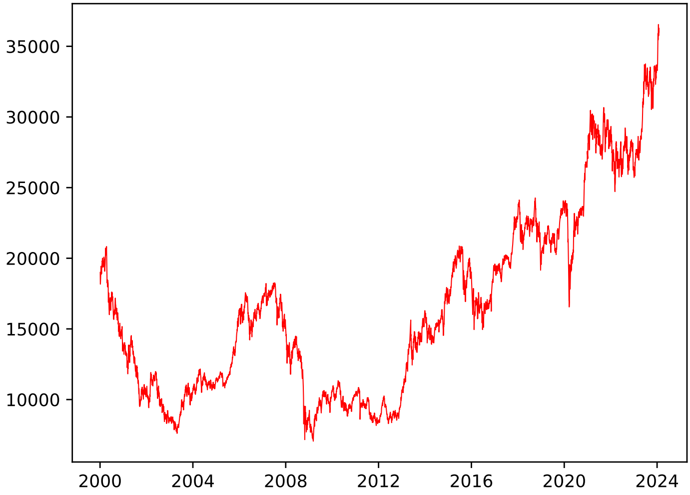
$$(h,k)_H = \int_0^1 h'(t)k'(t)dt \tag{2}$$

- μ はずらし $w \mapsto w + h$ で μ と同値測度 $\Leftrightarrow$ $h \in H$

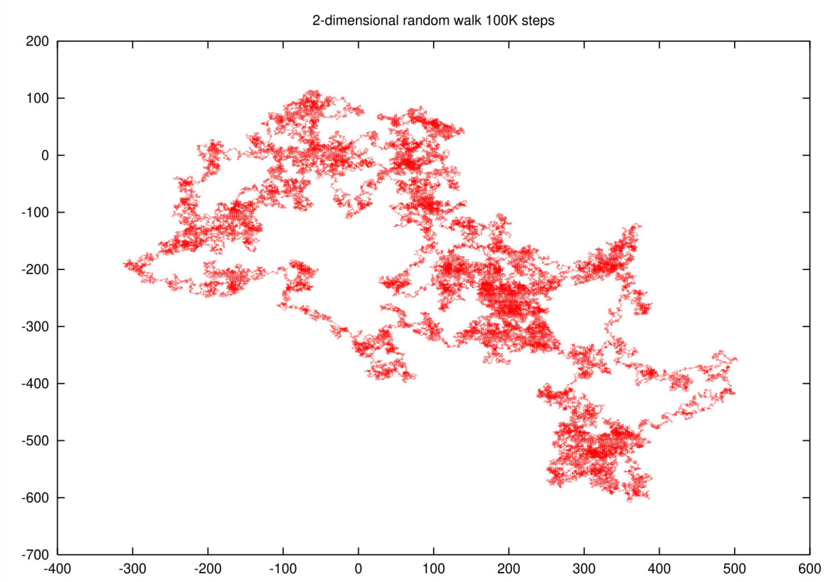
1 次元 Brown 運動



日経平均株価


35000
30000
25000
20000
15000
10000
2000
2004
2008
2012
2016
2020
2024

2 次元 Brown 運動



2-dimensional random walk 100K steps
200
100
0
-100
-200
-300
-400
-500
-600
-700
-400
-300
-200
-100
0
100
200
300
400
500
600

Malliavin 解析 ＝ Wiener 空間上の微積分

H-微分 D:

$$F(w+h) - F(w) = \langle DF(w), h \rangle + o(\|h\|_H).$$

ここで $DF(w) \in H^*$.

微分の概念を Sobolev 空間的に拡張．例えば $W^{1,p}$ は次のノルムで完備化:

$$\|F\|_p + \|DF\|_p$$

H-微分 D の双対作用素を D^* とする．このとき，次の作用素 L を **Ornstein-Uhlenbeck** 作用素と呼ぶ．

$$L = -D^* D. \tag{3}$$

P. Malliavin

P. Malliavin

Malliavin の仕事

- 多様体上の確率微分方程式
- Malliavin 解析
- 道の空間の幾何学

Meyer のノルムの同値性定理

Sobolev 空間の構成．

$W^{n,p}$ (n は微分の階数，p は p 乗可積分を表す）は次のノルムによる

$$\|F\|_p + \|DF\|_p + \cdots + \|D^n F\|_p.$$

このノルムと次のノルムが同値であることを Meyer が示した．

$$\|(1 - L)^{n/2} F\|_p$$

理論的にはこちらのノルムのほうが統一的な議論ができる．

P. A. Meyer

P. A. Meyer

Meyer の仕事

- 劣マルチンゲールの Doob-Meyer 分解
- 確率積分
- ノルムの同値性定理

Gross の対数 Sobolev 不等式

Wiener 空間の上で次の対数 Sobolev 不等式が成立する．

$$\int_W f^2(x)\log(f(x)^2/\|f\|_2^2)\,d\mu \le \int_W \|Df\|_{H^*}^2\,d\mu \tag{4}$$

この不等式は摂動の議論でよく使われる．Young の不等式 $st \le s\log s - s + e^t$ $(s > 0,\ t \in \mathbb{R})$ を使って

$$Vf^2 \le f^2\log f^2 - f^2 + e^V$$

であるから

$$\int_W Vf^2 d\mu \le \int_W (f^2\log f^2 - f^2 + e^V)\,d\mu.$$

ここで (4) を使って次が得られる．

$$\int_W Vf^2 d\mu \le \int_W \|Df\|_{H^*}^2\,d\mu + \|f\|_2^2\log\|f\|_2^2 - \|f\|_2^2 + \|e^V\|_1$$

谷口シンポジウム

谷口シンポジウム at Charingworth Manor, 1994

L. Gross

L. Gross

Gross の仕事

- 抽象 Wiener 空間
- 対数 Sobolev 不等式
- ループ群上の解析

最近の興味：1 次元拡散過程

標準測度と尺度関数

$[0, r)$ 上に連続単調関数 m, s が与えられている．
$m(0) = s(0) = 0$ を仮定する．

- dm: 標準測度
- s: 尺度関数

関数 f が次の表現

$$f(x) = f(0) + \int_{[0,x]} g(y)\, ds(y) = 0$$

を持つとき $\dfrac{df}{ds} = g$ と定める．s が微分可能のときは

$$\frac{df}{ds}(x) = \frac{1}{s'(x)} f'(x)$$

である．同様に $\dfrac{df}{dm}$ を定める．

1 次元拡散過程

$\dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds}$ を生成作用素にもつマルコフ過程を 1 次元拡散過程という．ただし，空間は $L^2(dm)$ で考える．このとき適当に境界条件を定めて $\dfrac{d}{dm}\dfrac{d}{ds}$ は自己共役作用素となる．

境界を分類するために次の関数を導入する．

$$S(x) = \int_{[0,x]} m(y)\, ds(y), \tag{5}$$

$$M(x) = \int_{[0,x]} s(y) dm(y). \tag{6}$$

次のように境界 r を分類する (Feller の分類)．

	$< \infty$	$= \infty$
$S(r-)$	exit	non-exit
$M(r-)$	entrance	non-entrance

Weyl の判定法

以下境界 $\mathbf{0}$ での境界条件は

$$f(0)\sin\alpha + \frac{df}{ds}(0)\cos\alpha = 0 \tag{7}$$

で与えられる．以下では $\frac{df}{ds}(0) = 0$ の Neumann 境界条件に固定しておく．

r で境界条件が必要かどうかは Weyl の判定法がある．Weyl の分類は次のように与えられる．

$\int_{[0,r)} s(y)^2\, dm(y) = \infty$	極限点型
$\int_{[0,r)} s(y)^2\, dm(y) < \infty$	極限円型

境界条件

以下 $s(r-) = \infty$ と極限円型であることを仮定する．この場合は本質的自己共役ではないので，自己共役にするためには境界条件が必要である．境界条件は (7) ではなく，別の形になる．

まず次を準備する．

f を 2 階微分可能な関数とする．そして $\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}f \in L_s^2(dm)$ を仮定する．f の s 微分を f^+ と記述する．f に対し切片関数 (intercept function) f^I を次で定義する．

$$f^I(x) = f(x) - f^+(x)s(x). \tag{8}$$

Proposition 1

f を 2 階微分可能で $g = \frac{d}{dm}\frac{d}{ds}f \in L^2(dm)$ を仮定する．このとき，次が成立する．

$$f^+(r-) = f^+(0) + \int_{[0,r)} g(y)\, dm(y), \tag{9}$$

$$f^I(r-) = f(0) - \int_{[0,r)} g(y)s(y)\, dm(y). \tag{10}$$

さらに $f^+(x) - f^+(r-) \in L^2(ds)$ が成立する．従って $f^+(x) \in L^2(ds)$ であるための必要十分条件は $f^+(r-) = 0$ である．また $f^I(r-)$ に対して次の等式が成立する．

$$f^I(r-) = \lim_{x\to r}\{f(x) - f^+(r-)s(x)\}. \tag{11}$$

自己共役拡大

r での境界条件を

$$f^I(r-) + \kappa f^+(r-) = 0 \tag{12}$$

で与える．

Theorem 2

作用素 A_κ の定義域を

$$\mathrm{Dom}(A_\kappa) = \{f \in L^2(dm);\ f^+(0) = 0, f \text{ は (12) をみたす}\}$$

とし，$A_\kappa f = \frac{d}{dm}\frac{d}{ds}f$ で定めると A_κ は自己共役作用素となる．任意の自己共役拡大はこの形に限る．

二次形式

A_κ に対応する二次形式を与える．まず定義域を

$$\mathbf{Dom}(\mathcal{E}^{\mathrm{N}}) = \{f \in L^2_s(dm)\,;\ f \text{ は } s \text{ 微分可能で } f^+ \in L^2_m(ds)\}$$

とし

$$\mathcal{E}^{\mathrm{N}}(f,g) = \int_{[0,r)} f^+(x)g^+(x)\,ds(x) \tag{13}$$

と定義する．このとき A_κ に対応する二次形式は

$$\mathbf{Dom}(Q) = \{f;\ f(x) = f_1(x) + \lambda s(x), f_1 \in \mathbf{Dom}(\mathcal{E}^{\mathrm{N}}), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

で $f, g \in \mathrm{Dom}(Q)$ を，$f = f_1 + \lambda s$, $g = g_1 + \xi s$ と表すとき

$$Q(f,g) = -\xi f_1(0) - \lambda g_1(0) - \lambda\xi\kappa + \int_{[0,r)} f_1^+(x)g_1^+(x)\,ds(x).$$

で与えられる．

ありがとうございました