拡散過程とスペクトル

重川 一郎 (京都大学)

2019 年 3 月 8 日

最終講義

URL: http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/

Contents

Pearson 分布族

Pearson 分布族

Definition 1

次の形の密度 ρ を持つ分布を **Pearson 分布族**という:

$$\rho(x) = \exp\left\{\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right\}. \tag{1}$$

ここで $g(x)$ は 1 次式で，$f(x)$ は 2 次式である.

- 特に確率密度に限らず，この形の密度を Pearson 密度と呼ぶ.
- 元々は 12 種類に分類されているが，6 種類に大別する.
- 同属の分布に対しスペクトルの類似性が成立する.

Pearson 分布族の分類 I

6 種類の密度（有限測度の場合も正規化していない）

	密度関数	区間
1	$e^{-\beta x^2/2}$	$\mathbb{R}$
2	$x^\alpha e^{-\beta x}$	$(0, \infty)$
3	$x^\alpha(1-x)^\beta$	$(0, 1)$
4	$(1+x^2)^\alpha \exp\{\beta \arctan x\}$	$\mathbb{R}$
5	$x^\alpha e^{-\beta/x}$	$(0, \infty)$
6	$x^\alpha(1+x)^\beta$	$(0, \infty)$

Pearson 分布族の分類 II

別の観点からの分類も可能．特に統計に関わる分布が多い．

	完全系列	不完全系列	
α-系列	正規分布		
β-系列	ガンマ分布	極値分布	
γ-系列	ベーター分布	F-分布 & Pareto 分布	t-分布

対応する確率過程

生成作用素の係数による分類:

	完全系列	不完全系列		特殊関数
α-系列	$a = 1$			${}_0F_1$
β-系列	$a = x$	$a = x^2$		${}_1F_1$
γ-系列	$a = x(1 - x)$	$a = x(1 + x)$	$a = 1 + x^2$	${}_2F_1$

確率過程との対応を考えると

	完全系列	不完全系列	
α-系列	ブラウン族		
β-系列	ベッセル族	ブラック-ショールズ族	
γ-系列	ヤコビ族	フィッシャー・パレート族	スチューデント族

生成作用素の表現について

1 次元の拡散過程の一般形

1 次元の拡散過程の一般形:

$$\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}. \tag{2}$$

Definition 2

(2) で a が 2 次式で，b が 1 次式のとき，対応する拡散過程を Pearson-Kolmogorov の拡散過程，あるいは Kolmogorov 拡散過程 と呼ぶ.

a が二次式で，b が 1 次式のとき，Feller の意味での標準測度 $dm = \rho dx$ が Pearson 分布になることを Kolmogorov が注意している.

生成作用素の表現

生成作用素 $\mathfrak{A}$ の表現には，いくつかの流儀がある．これを次のように分類する．

名前	生成作用素	双対性	微分作用素
Kolmogorov	$a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}$		
Feller	$\frac{d}{dm}\frac{d}{ds}$	$\frac{d}{dm}=-\frac{d}{ds}^*$	$\frac{d}{ds}: L^2(dm)\to L^2(ds)$
Stein	$\left(a\frac{d}{dx}+b\right)\frac{d}{dx}$	$a\frac{d}{dx}+b=-\frac{d}{dx}^*$	$\frac{d}{dx}: L^2(\rho)\to L^2(a\rho)$

Feller の双対性と，Stein の双対性

上の Feller の双対性と，Stein の双対性から次のような対応が作られる.

Feller's pair	$\frac{d}{dm}\frac{d}{ds} \longleftrightarrow \frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$
Stein's pair	$(a\frac{d}{dx}+b)\frac{d}{dx} \longleftrightarrow \frac{d}{dx}(a\frac{d}{dx}+b)$

この pair は，0 以外は同じスペクトルを持つ（超対称性）

Stein の双対の特徴

Stein の双対の計算

$$\frac{d}{dx}(a\frac{d}{dx}+b) = a\frac{d^2}{dx^2}+(a'+b)\frac{d}{dx}+b'.$$

a が 2 次式で b が 1 次式のとき，双対も同じクラスに入る．

Kolmogorov 拡散過程は Stein の双対で閉じている

Doob の h-変換

$V = \frac{d}{dx}$ と $\frac{d}{ds}$ の同値性

$\frac{d}{ds} = a\rho\frac{d}{dx}$ と $V = \frac{d}{dx}$ の関係:

$$\frac{d}{ds} : L^2(\rho) \to L^2(1/(a\rho))$$

および

$$\frac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(a\rho).$$

これらは本質的に同じ作用素と考えられる.

二つを結ぶのが次のユニタリー作用素である．

$$Uf = a\rho f \tag{3}$$

但し $U\colon L^2(a\rho) \to L^2(1/(a\rho))$ と見ている．

Proposition 3

$\frac{d}{ds} = UV$ が成り立つ．また共役に対して $(\frac{d}{ds})^* U = V^*$ が成り立つ．

結局，上のことは次の図式が可換であることを示している．

$$
\begin{tikzcd}
 & L^2(a\rho) \arrow[d, "U"] \arrow[dr, "D^*"] & \\
L^2(\rho) \arrow[ur, "D"] \arrow[r, "\frac{d}{ds}"'] & L^2(1/(a\rho)) \arrow[r, "\left(\frac{d}{ds}\right)^* = -\frac{d}{dm}"'] & L^2(\rho)
\end{tikzcd}
$$

Figure 1: V と $\frac{d}{ds}$ の同値性

さて，上のことに注意すると，実は V^* と $-\frac{d}{dm}$ が同値となり，これらを組み合わせれば VV^* と $-\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ が同値であることが分かる．

Theorem 4

VV^* と $-\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$ はユニタリー同値である．即ち次が成り立つ

$$VV^* = -U^{-1}\frac{d}{ds}\frac{d}{dm}U, \qquad -\frac{d}{ds}\frac{d}{dm} = UVV^*U^{-1}. \tag{4}$$

Kolmogorov diffusions の分類

a を 2 次式，b を 1 次式として $\mathfrak{A} = a\frac{d^2}{dx^2} + b\frac{d}{dx}$ で生成される拡散過程を Kolmogorov diffusions といった．これから分類を行う．a の次数でまず分類できる．即ち 0 次，1 次，2 次の 3 つに分類できる．

(I)	$a = 1$ on $(-\infty, \infty)$	ブラウン族
(II)	$a = x$ $(0, \infty)$	ベッセル族
(III-1)	$a = x^2$ on $(0, \infty)$	ブラック-ショールズ族
(III-2-a)	$a = x(1 - x)$ on $(0, 1)$	ヤコビ族
(III-2-b)	$a = x(x + 1)$ on $(0, \infty)$	フィッシャー-パレート族
(III-3)	$a = x^2 + 1$ on $(-\infty, \infty)$	スチューデント族

この分類に従って以後スペクトルを整理していく．

(I) ブラウン族

$a = 1$ $b = \beta \in \mathbb{R}$ の場合

この場合はドリフトつきブラウン運動になる．

$b = \beta \in \mathbb{R}$ で，β をパラメーターとして，次の形の生成作用素を考える．

$$\mathfrak{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \beta\frac{d}{dx} \tag{5}$$

スピード測度密度は

$$\rho(x) = \exp\{\int \beta dx\} = e^{\beta x} \tag{6}$$

である．また $V = \frac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(\rho)$ とすると，その双対は

$$(\frac{d}{dx})^* = -\frac{d}{dx} - \beta. \tag{7}$$

スペクトルを求めよう．次のような変換
$I\colon L^2(\rho) \longrightarrow L^2(dx)$ を考える．

$$J f(x) = e^{\beta x/2} f(x). \tag{8}$$

次の図式が可換となる:

$$\begin{tikzcd} L^2(\rho) \arrow[r, "\mathfrak{A}"] \arrow[d, "J"'] & L^2(\rho) \arrow[d, "J"] \\ L^2(dx) \arrow[r, "\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\beta^2}{4}"] & L^2(dx) \end{tikzcd} \tag{9}$$

従ってこの場合のスペクトル集合は

$$\sigma(\mathfrak{A}) = (-\infty, -\frac{\beta^2}{4}] \tag{10}$$

となる．$\frac{d^2}{dx^2}$ の固有関数は分かっているから $\mathfrak{A}$ の固有関数は $e^{(i\lambda-\beta/2)x}$ が固有値 $-\lambda - \beta^2/4$ に対する固有関数である．さらに

$$\frac{d}{dx}e^{(i\lambda-\beta/2)x} = (i\lambda - \beta/2)e^{(i\lambda-\beta/2)x}$$
$$(\frac{d}{dx} + \beta)e^{(i\lambda-\beta/2)x} = (i\lambda + \beta/2)e^{(i\lambda-\beta/2)x}$$

が成り立っている．即ち V, V^* がともに固有関数を固有関数に移していることが分かる．これが Stein 双対から導かれることである．

ドリフトのあるブラウン運動のスペクトル

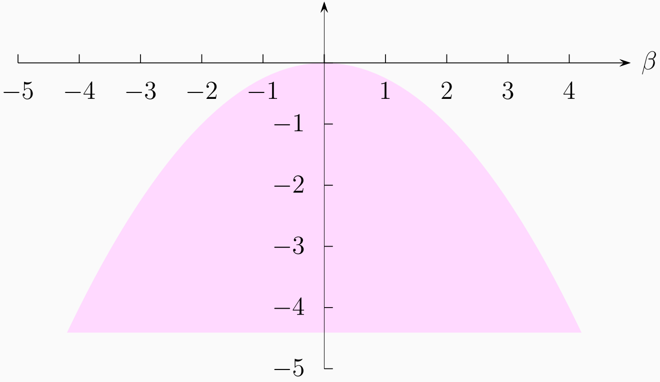


Figure 2: スペクトルの $\boldsymbol{\beta}$ への依存性

Feller の対応

Feller の双対は今の場合丁度 β の符号の反転である．従って，y 軸に関する対称性として表れている．

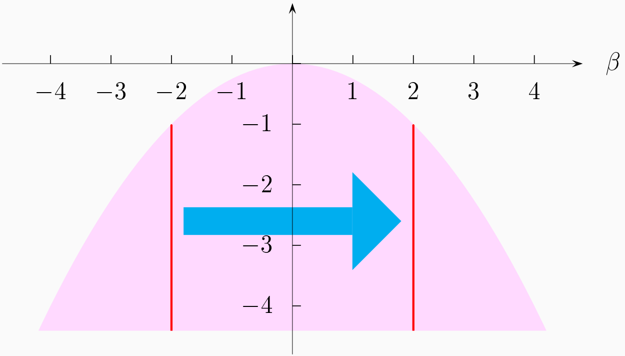


Figure 3: Feller’s pair

$a = 1$ で $b = \beta x, \beta \in \mathbb{R}$ の場合

$\beta = 0$ のとき，ブラウン運動なので，この族をブラウン族と呼ぶことにする．生成作用素は

$$\mathfrak{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \beta x \frac{d}{dx} \tag{11}$$

標準測度密度は $\rho(x) = \exp\{\int \beta x dx\} = e^{\beta x^2/2}$ であり，
$V = \frac{d}{dx} : L^2(\rho) \to L^2(\rho)$ の双対は

$$(\frac{d}{dx})^* = -\frac{d}{dx} - \beta x \tag{12}$$

となる．よって

$$\mathfrak{A}u = -V^*Vu = u'' + \beta x u',$$
$$\hat{\mathfrak{A}}u = -VV^* = u'' + \beta x u' + \beta u$$

である．

Hermite 多項式

まず Hermite 多項式 $H_n(\xi)$ $(n \in \mathbb{Z}_+, \xi \in \mathbb{R})$ を次で定める.

$$H_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2/2}. \tag{13}$$

通常の定義と定数が異なっていることに注意しておく. ここではこの方が以下の定数が簡単になる.

Ornstein-Uhlenbeck 過程

$\beta = -1$ の場合は，Ornstein-Uhlenbeck 過程である．

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}\right)H_n = -nH_n$$

となって，H_n は固有関数であることが分かる．

双対 Ornstein-Uhlenbeck 過程

次に $\beta = 1$ の場合を考えよう．この場合に対応する確率過程を双対 Ornstein-Uhlenbeck 過程と仮に呼んでおく．この場合は

$$\frac{d}{ds} : L^2(e^{-\beta x^2}) \to L^2(e^{\beta x^2}) \tag{14}$$

が固有関数の対応を与える，というのが Feller 双対である．

双対 Ornstein-Uhlenbeck 過程の固有関数

$$\begin{aligned}(\frac{d}{dx} + x)(e^{-x^2/2}H_{n+1} &= -xe^{-x^2/2}H_{n+1} + e^{-x^2/2}H'_{n+1} + xe^{-x^2/2}H_{n+1} \\ &= e^{-x^2/2}H'_{n+1} = e^{-x^2/2}H_n.\end{aligned}$$

これで $e^{-x^2/2}H_n$ が固有値 $-(n+1)$ に対する固有関数であることが分かる.

また Doob の h-変換は $J\colon L^2(e^{-x^2/2}) \to L^2(e^{x^2/2})$ は

$$Jf = \varepsilon^{-x^2/2}f \tag{15}$$

で与えられる.

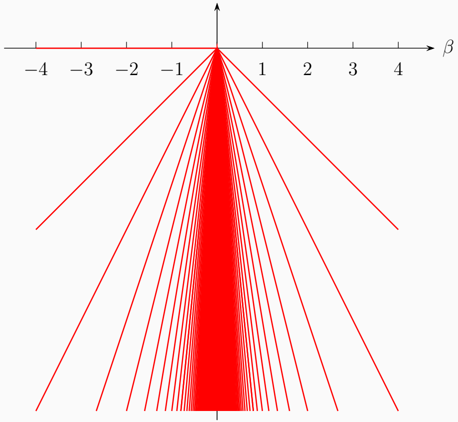


Figure 4: スペクトルの $\boldsymbol{\beta}$ への依存性

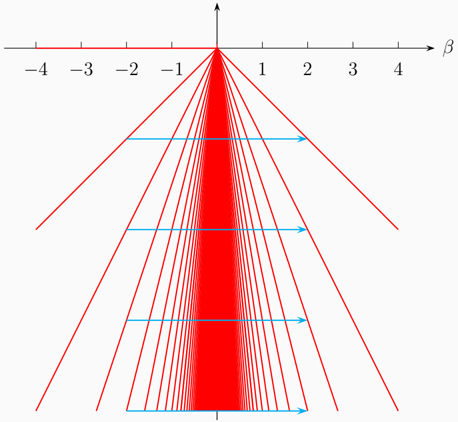


Figure 5: Feller's pair

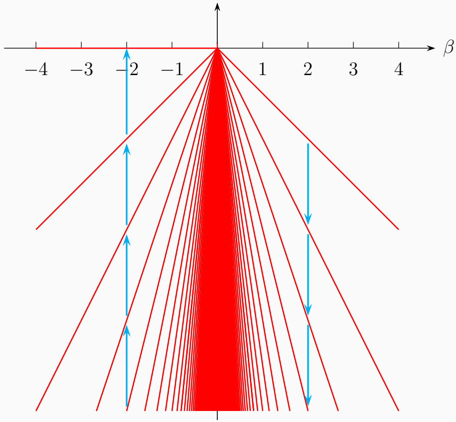


Figure 6: Stein's pair

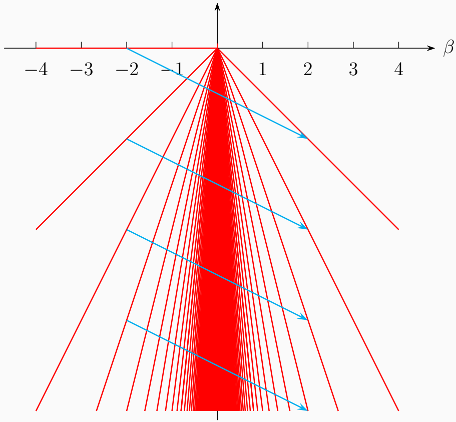


Figure 7: Doob's $\boldsymbol{h}$-transformation

(II) ベッセル族

$a = x,\ b = 1 + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ の場合

この場合は平方 Bessel 過程になる．$I = (0, \infty)$, $a = x$, $p = x^{\alpha}$ である．従って

$$\mathfrak{A}u = xu'' + (1 + \alpha)u', \quad \hat{\mathfrak{A}}u = xu'' + (2 + \alpha)u'.$$

$\mathfrak{A}$ and $\hat{\mathfrak{A}}$ は同じスペクトルを持ち，微分が固有関数の対応を与える．

超幾何関数

超幾何関数を次で定義する.

$$ {}_0F_1(c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_n n!} x^n. \tag{16} $$

簡単のために

$$ B(c; x) = {}_0F_1(c; x). \tag{17} $$

とおく.

一般化固有関数は次で与えられる.

(a) $\alpha > -1$

固有値 $-\xi$ ($\xi \geq 0$) に対する固有関数は $B(1+\alpha; -\xi x)$ で

$$\frac{d}{dx}[B(1+\alpha; -\xi x)] = \frac{\lambda}{1+\alpha} B(2+\alpha; -\xi x).$$

これらを entrance family 固有関数と呼ぶ.

(b) $\alpha < 0$

固有値 $-\xi$ ($\xi \geq 0$) に対する固有関数は $x^{-\alpha} B(1-\alpha; \xi x)$ で

$$\frac{d}{dx}[x^{-\alpha} B(1-\alpha; -\xi x)] = -\alpha x^{-\alpha-1} B(-\alpha; -\xi x)$$

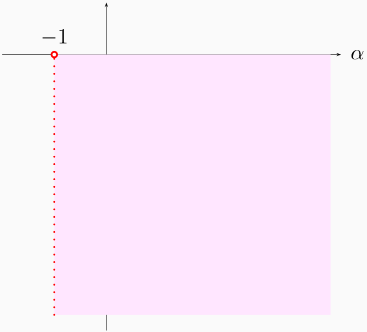
これらを exit family 固有関数と呼ぶ.

Remark 1

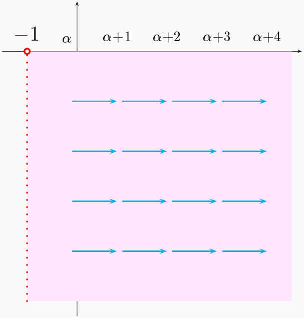
関数 B は本質的に Bessel 関数である.

$$B(\alpha+1,-\xi x)=\Gamma(\alpha+1)(\xi x)^{-\alpha/2}J_\alpha(\sqrt{4\xi x}) \tag{18}$$

Bessel 拡散過程のスペクトル： entrance family

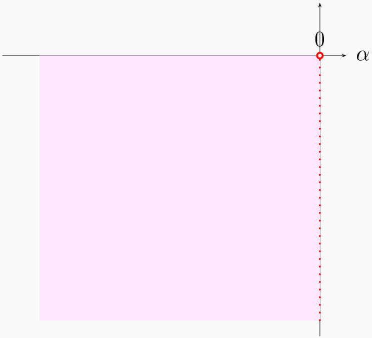


the spectrum of $\mathfrak{A}$

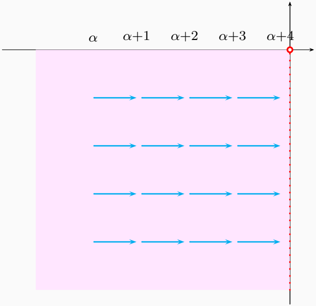


微分による固有関数の対応関係

Bessel 拡散過程のスペクトル： exit family



the spectrum of $\mathfrak{A}$



微分による固有関数の対応関係

$a = x,\ b = 1 + \alpha - x,\ \alpha \in \mathbb{R}$

Kummer 過程になる.

$I = (0, \infty)$, $a = x$, $p = x^\alpha e^{-x}$. 従って

$$\mathfrak{A}u = xu'' + (1 + \alpha - x)u', \quad \hat{\mathfrak{A}}u = xu'' + (2 + \alpha - x)u' - u.$$

これらの作用素は $\mathbf{0}$ 以外で同じスペクトルを持つ.

合流型超幾何関数は次で定義される.

$$ {}_1F_1(a;c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} x^n. \tag{19} $$

次のように略記する.

$$ M(a,c;x) = {}_1F_1(a;c;x) \tag{20} $$

M は本質的に Laguerre 多項式である.

$$ L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} M(-n,\alpha+1;x) \tag{21} $$

Theorem 5

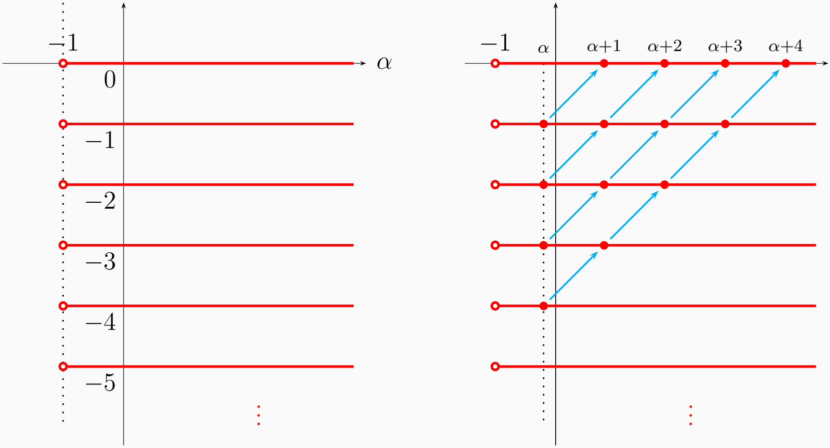
(a) $\alpha > -1$ *entrance family* 固有値 $-n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対する固有関数は $M(-n, \alpha + 1; x)$ で

$$[M(-n, \alpha + 1; x)]' = -\frac{n}{\alpha + 1} M(-n + 1, \alpha + 2; x).$$

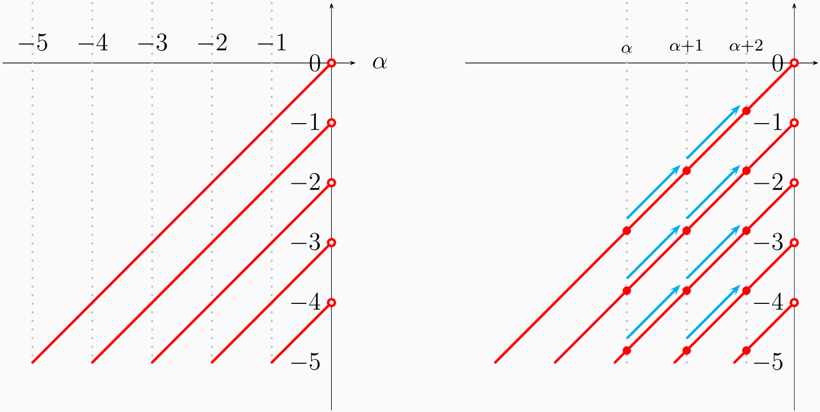
(b) $\alpha < 0$ *exit family*
固有値 $-n + \alpha$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対する固有関数は $x^{-\alpha} M(-n, 1 - \alpha; x)$ で

$$[x^{-\alpha} M(-n, 1 - \alpha; x)]' = -\alpha x^{-\alpha-1} M(-n, -\alpha; x).$$

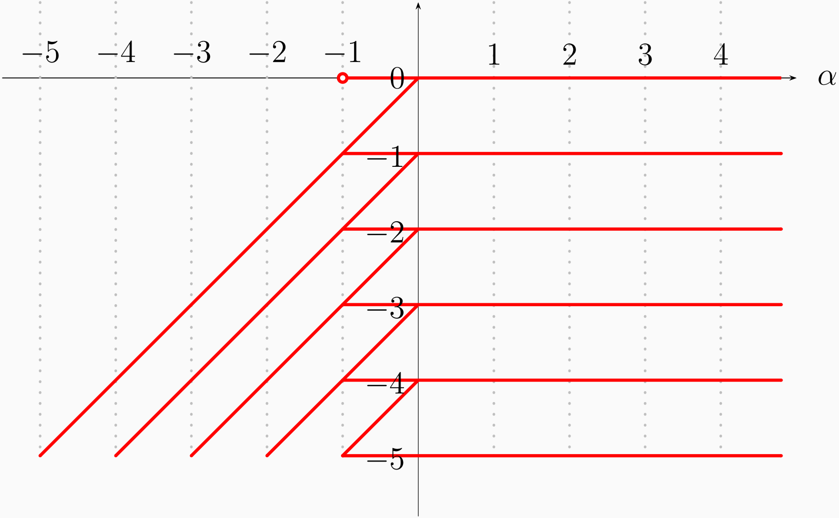
Kummer 作用素のスペクトル (Exit 系列)



Kummer 作用素のスペクトル (Entrance 系列)



Kummer 作用素のスペクトル全体



$a = x,\ b = 1 + \alpha + x,\ \alpha \in \mathbb{R}$

Kummer 作用素の Feller 対を考えると

$$\tilde{L}_\alpha = x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 + x)\frac{d}{dx} \tag{22}$$

$\alpha > -1$ の場合 (entrance 系列)

$\tilde{L}_\alpha$ の固有値は $-n-\alpha-1$ で固有関数は

$$L_n^{(\alpha)}(x)e^{-x}. \tag{23}$$

$\alpha < 0$ の場合 (exit 系列)

$\tilde{L}_\alpha$ の固有値は $-n-1$ で固有関数は

$$L_n^{(-\alpha)}(x)x^{-\alpha}e^{-x}. \tag{24}$$

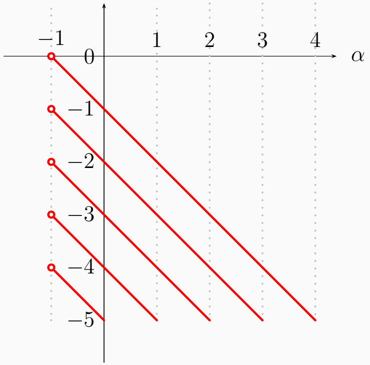


Figure 8: 双対 Kummer 作用素のスペクトル（Entrance 系列）

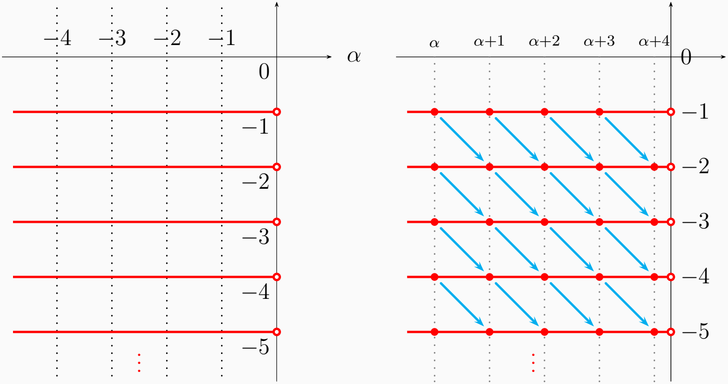


Figure 9: 双対 Kummer 作用素のスペクトル（Exit 系列）

すべてを纏めて書くと，次のようになる．

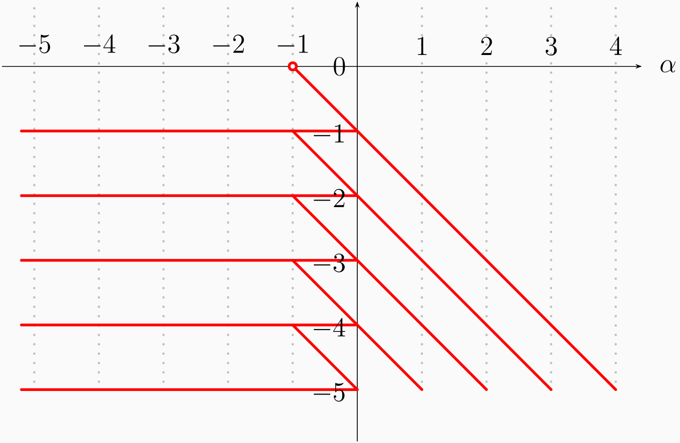


Figure 10: 双対 Kummer 作用素のスペクトル

(III-1) ブラック-ショールズ族

(III-1) $a = x^2$, $I = (0, \infty)$.

生成作用素は次で与えられる.

$$\mathfrak{A} = x^2 \frac{d}{dx^2} + (\alpha x - \beta) \frac{d}{dx}. \tag{25}$$

$\beta = 0$ のとき，対応する拡散過程は数理ファイナンスで重要な Black-Scholes モデルである．これから，この族を ブラック-ショールズ族 と呼ぶ.

$\beta = 0$ の場合： Black-Scholes 過程

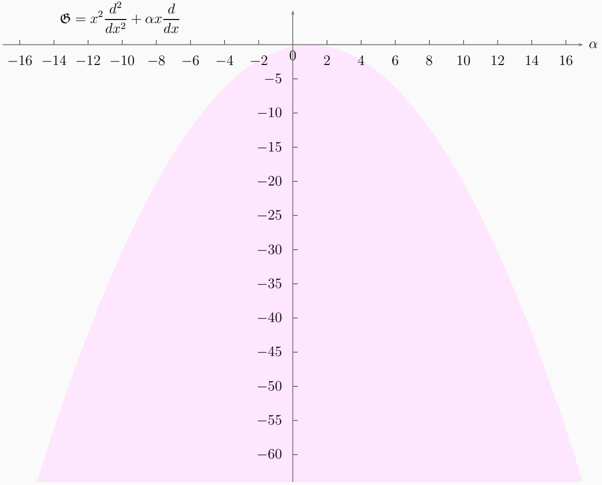
生成作用素は次の形であった.

$$\mathfrak{A} = x^2 \frac{d}{dx^2} + \alpha x \frac{d}{dx}. \tag{26}$$

スペクトルは次で与えられる.

$$\sigma(\mathfrak{A}) = (-\infty, -\frac{1}{4}(\alpha - 1)^2] \tag{27}$$

Black-Scholes 過程のスペクトル



$\beta = -1$ の場合

生成作用素は次の形になる．

$$\mathfrak{A} = x^2 \frac{d}{dx^2} + (\alpha x + 1)\frac{d}{dx}. \tag{28}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し $\lambda_n(\alpha)$ を次で定める．

$$\lambda_n(\alpha) = n(n - 1 + \alpha). \tag{29}$$

すると，スペクトルは次で与えられる．

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{A}) = (-\infty, -\frac{1}{4}(\alpha - 1)^2]$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathfrak{A}) = \{\lambda_n(\alpha);\ 0 \leq n < \frac{1-\alpha}{2}\}.$$

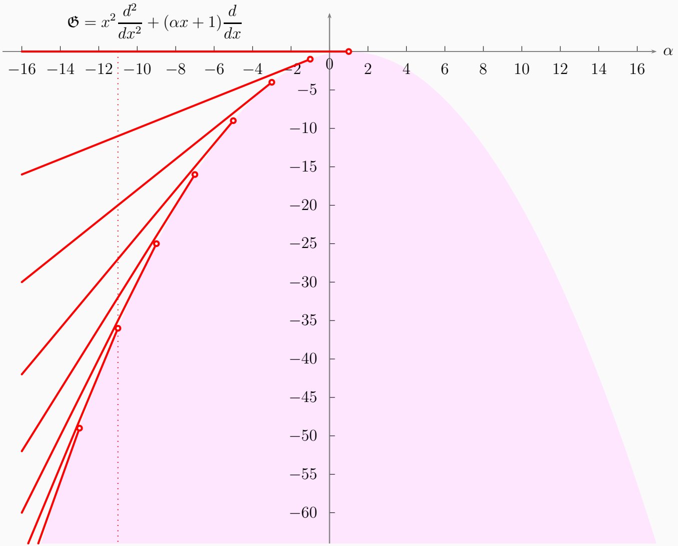
固有関数

点スペクトルに対応する固有関数は

$$P_n^{(\alpha)}(x) = x^n L_n^{(1-2n-\alpha)}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{30}$$

ここで $L_n^{(1-2n-\alpha)}$ は Laguerre 多項式である.

$\beta = -1$ の場合のスペクトル



$\beta = 1$ の場合

生成作用素の次で与えられる.

$$\mathfrak{A} = x^2 \frac{d}{dx^2} + (\alpha x - 1)\frac{d}{dx}. \tag{31}$$

$n = 1, 2, \ldots$ に対し $\xi_n(\alpha)$ を次で定める．by

$$\xi_n(\alpha) = n(n + 1 - \alpha) \tag{32}$$

スペクトルは次で与えられる.

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{A}) = (-\infty, -\frac{1}{4}(\alpha - 1)^2]$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathfrak{A}) = \{\xi_n(\alpha);\ 1 \leq n < \frac{\alpha - 1}{2}\}.$$

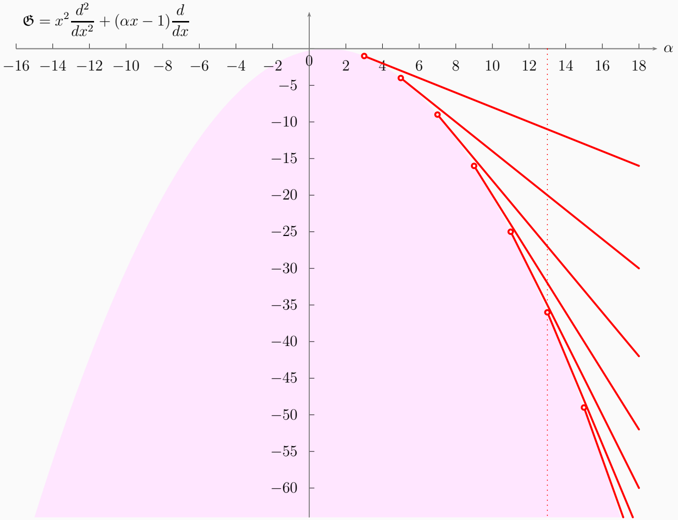
固有関数

点スペクトルの固有関数は次で与えられる.

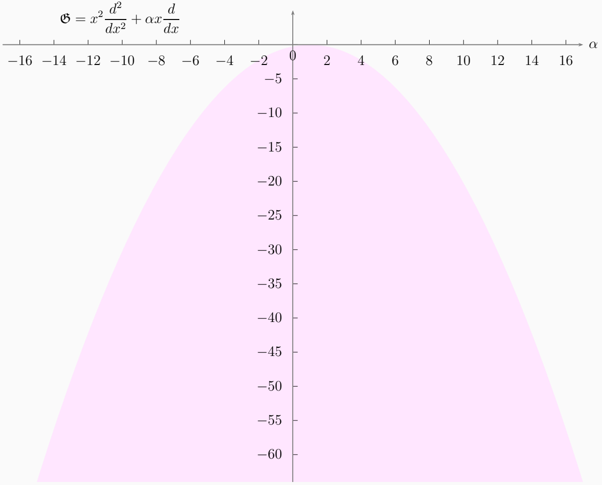
$$x^{-\alpha+2}e^{-1/x}P_{n-1}^{(4-\alpha)}(x) = x^{n-\alpha+1}e^{-1/x}L_{n-1}^{(\alpha-2n-1)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

ここで $L_{n-1}^{(\alpha-2n-1)}$ は Laguerre 多項式 である.

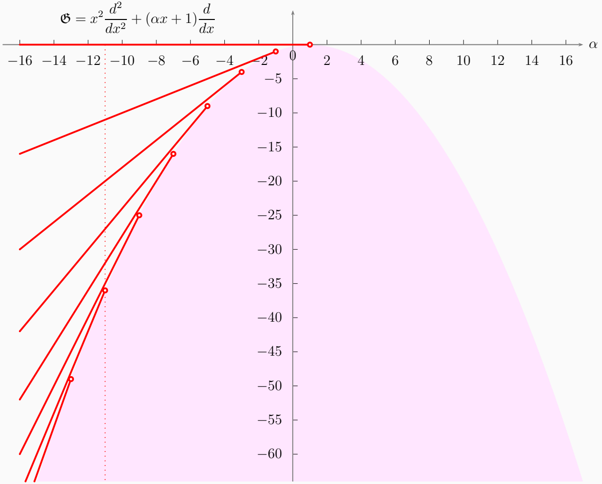
$\beta = 1$ のときのスペクトル



$\boldsymbol{\beta = 0}$ のときのスペクトル



$\beta = -1$ のときのスペクトル



(III-2-a) ヤコビ族

(III-2-a) $a = x(1-x)$, $b = \alpha + 1)(1-x) - (\beta+1)x$

$I = (0,1)$, $a = x(1-x)$, $\rho = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ である．このとき生成作用素は次で与えられる．

$$\mathfrak{A}u = x(1-x)u'' + ((\alpha+1)(1-x) - (\beta+1)x)u',$$
$$\hat{\mathfrak{A}}u = x(1-x)u'' + ((\alpha+2)(1-x) - (\beta+2)x)u' - (\alpha+\beta+2)u.$$

Gauss 超幾何関数

固有関数の表示をするのに，緒幾何関数が必要である．

$$ {}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n. \tag{33} $$

簡単のために次のように置く．

$$ K(x) = K(\alpha, \beta, \gamma; x) = {}_2F_1(-\gamma, \alpha + \beta + \gamma + 1; \alpha + 1; x) \tag{34} $$

Remark 2

K は本質的に Jacobi 多項式である．

$$ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!\Gamma(\alpha + 1)} K(\alpha, \beta, n; \frac{1 - x}{2}). \tag{35} $$

固有値と固有関数

(a) $\alpha > -1, \beta > -1$ [entrance,entrance] family
固有値 $-n(n+\alpha+\beta+1)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対する固有関数は $K(\alpha, \beta, n)$ であり

$$K'(\alpha, \beta, n) = -\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\alpha+1} K(\alpha+1, \beta+1, n-1).$$

(b) $\alpha < 0, \beta > -1$ [entrance,exit] family
固有値 $-(n-\alpha)(n+\beta+1)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対する固有関数は $x^{-\alpha} K(-\alpha, \beta, n)$ であり

$$[x^{-\alpha} K(-\alpha, \beta, n)]' = -\alpha x^{-\alpha-1} K(-\alpha-1, \beta+1, n).$$

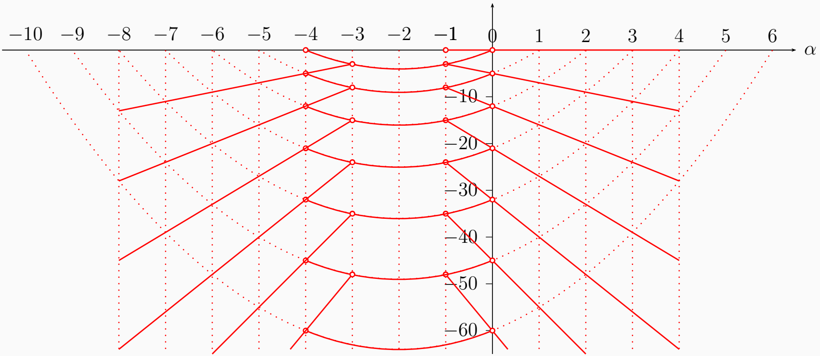
固有値と固有関数（続き）

(c) $\alpha < 0, \beta < 0$ [exit,exit] family

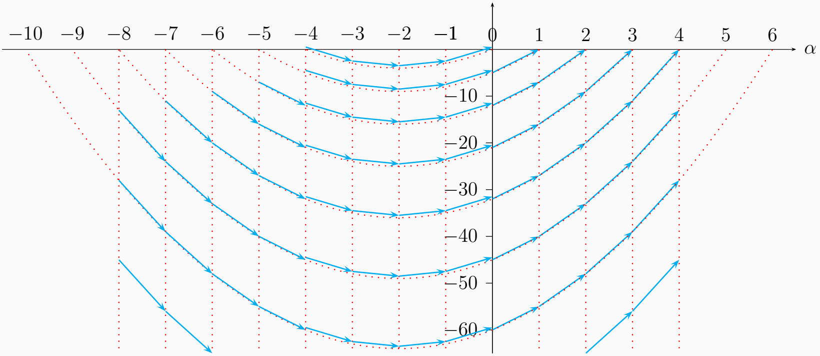
固有値 $-(n+1)(n-\alpha-\beta)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対する固有関数は $x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha, -\beta, \gamma)$ であり

$$[x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}K(-\alpha, -\beta, n)]' \\ = -\alpha x^{-\alpha-1}(1-x)^{-\beta-1}K(-\alpha-1, -\beta-1, n+1).$$

スペクトルを図示すると次のようになる．但し，$\boldsymbol{\beta = \alpha + 3}$ の場合に限定して，$\boldsymbol{\alpha}$ をパラメーターとして見ている．



Stein の対応は次のようになる.



超幾何関数のまとめ

$x\dfrac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1)\dfrac{d}{dx}$	Bessel	${}_0F_1$
$x\dfrac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 - x)\dfrac{d}{dx}$	Laguerre	${}_1F_1$
$x(1-x)\dfrac{d^2}{dx^2} + ((\alpha + 1)(1 - x) - (\beta + 1)x)\dfrac{d}{dx}$	Jacobi	${}_2F_1$

(III-2-b) フィッシャー-パレート族

(III-2-b) $a = x(1+x)$, $I = [0, \infty)$

生成作用素は

$$\mathfrak{A} = x(1+x)\frac{d^2}{dx^2} + ((\alpha+1)(1+x) + (\beta+1))x)\frac{d}{dx}. \quad (36)$$

この場合，標準測度が Fisher 分布と，Pareto 分布になるのでフィッシャー-パレート族と呼ぶことにする.

$\alpha > -1$ の場合

$n = 0, 1, 2, \dots$ に対し $\lambda_n(\alpha, \beta)$ を次で定める.

$$\lambda_n(\alpha,\beta) = \left(n - \frac{|\beta| + \beta}{2}\right)\left(n + \alpha - \frac{|\beta| - \beta}{2} + 1\right) = \begin{cases} (n-\beta)(n+\alpha+1), \\ n(n+\alpha+\beta+1), \end{cases}$$

このとき

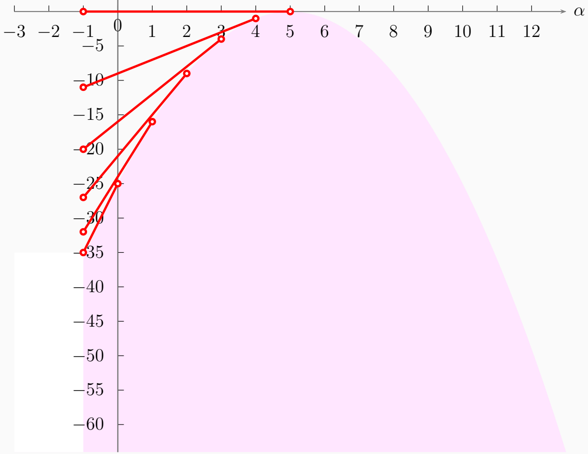
Theorem 6

$\mathfrak{A}$ のスペクトルは次で与えられる

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{A}) = \left(-\infty, -\frac{(\alpha+\beta+1)^2}{4}\right]$$

$$\sigma_{p}(\mathfrak{A}) = \left\{\lambda_n(\alpha,\beta);\ 0 \le n < \left[\frac{-\alpha + |\beta| - 1}{2}\right]\right\}$$

$$\mathfrak{G} = x(1+x)\frac{d^2}{dx^2} + ((\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)x)\frac{d}{dx}, \qquad \beta = \alpha - 11$$



$\alpha < 0$ の場合

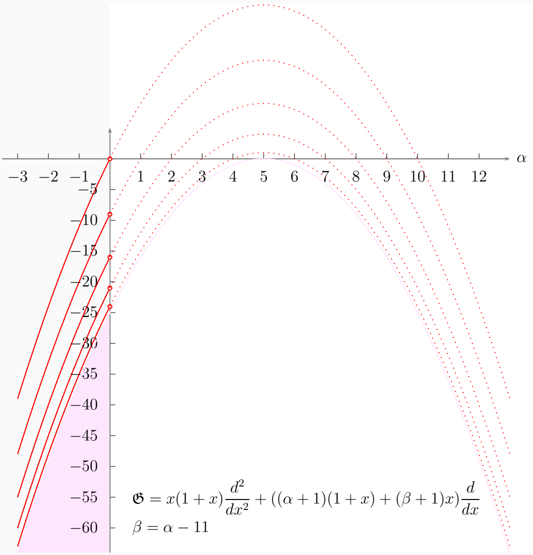
$n = 1, 2, \ldots$ に対し $\xi_n(\alpha, \beta)$ を次で定める.

$$\xi_n(\alpha,\beta) = \left(n - \frac{|\beta| - \beta}{2}\right)\left(n - \alpha - \frac{|\beta| + \beta}{2} + 1\right)$$
$$= \begin{cases} n(n - \alpha - \beta - 1), & \beta \geq 0, \\ (n + \beta)(n - \alpha - 1), & \beta \leq 0. \end{cases}$$

Theorem 7

$\mathfrak{A}$ のスペクトルは次で与えられる.

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathfrak{A}) = \left(-\infty, -\frac{(\alpha + \beta + 1)^2}{4}\right]$$
$$\sigma_p(\mathfrak{A}) = \left\{\xi_n(\alpha,\beta);\ 1 \leq n < \left\lceil \frac{\alpha + |\beta| + 1}{2} \right\rceil\right\}.$$



α
−3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
−5 −10 −15 −20 −25 −30 −35 −40 −45 −50 −55 −60
$\mathfrak{G} = x(1+x)\dfrac{d^2}{dx^2} + ((\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)x)\dfrac{d}{dx}$
$\beta = \alpha - 11$

(III-3) スチューデント族

(III-3) $a = 1 + x^2$, $I = (-\infty, \infty)$

生成作用素は次で与えられる.

$$\mathfrak{A} = (1 + x^2)\frac{d^2}{dx^2} + (2(\alpha + 1)x + 2\beta)\frac{d}{dx}. \tag{37}$$

このとき，標準測度が t-分布になるのでスチューデント族と呼ぶことにする.

Theorem 8

$\mathfrak{A}$ のスペクトルは次で与えられる．本質的スペクトルは

$$\sigma_{ess}(\mathfrak{A}) = \left(-\infty, -(\alpha + \frac{1}{2})^2\right]. \tag{38}$$

点スペクトルは，$\alpha < -\frac{1}{2}$ のとき

$$\lambda_n(\alpha) = n(n + 2\alpha + 1), \quad 0 \leq n < -\alpha - \frac{1}{2} \tag{39}$$

であり，$\alpha > \frac{1}{2}$ のとき

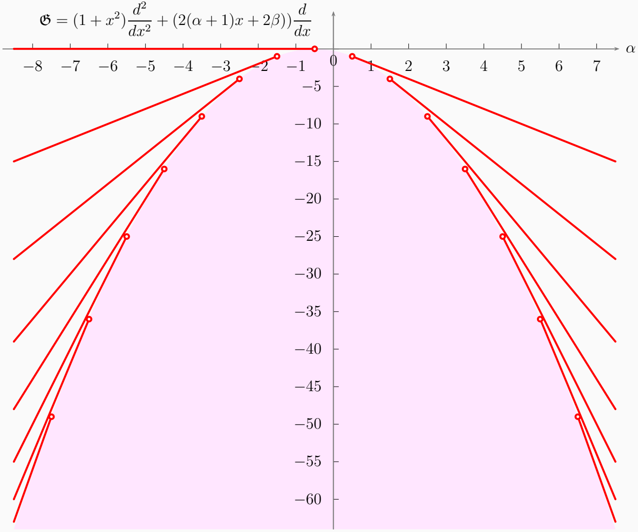
$$\xi_n(\alpha) = n(n - 2\alpha - 1), \quad 1 \leq n < \alpha + \frac{1}{2}. \tag{40}$$

$-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ のとき，存在しない．

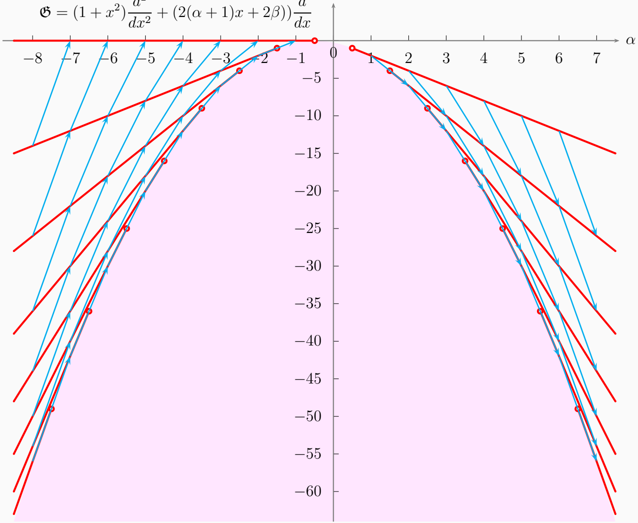
固有関数は次で与えられる.

$$x \mapsto K\left(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, n, \frac{1 - ix}{2}\right).$$

$\boldsymbol{\beta}$ を固定してスペクトルを表示すると



$$\mathfrak{G} = (1+x^2)\frac{d^2}{dx^2} + (2(\alpha+1)x + 2\beta))\frac{d}{dx}$$



ありがとうございました