非対称拡散過程とスペクトル

重川 一郎 (京都大学)

2018 年 6 月 7 日，岡山大学

岡山確率論セミナー

URL: http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/

Contents

リーマン多様体上の非対称拡散過程

非対称作用素

- (M, g): d-次元連結完備リーマン多様体
- vol : リーマン体積要素
- $d\nu = e^{-U} d\mathrm{vol}$: 基礎の測度
- b : M 上のベクトル場
- V : M 上のポテンシャル関数
- Δ: Laplace-Beltrami 作用素

$L^2(\nu)$ で次の生成作用素を考える:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\Delta + \nabla_b - V. \tag{1}$$

$\mathfrak{A}$ の別の表現

- ∇: 共変微分
- $\triangle = -\nabla^* \nabla$
- ∇^*: ∇ の測度 vol に対する双対作用素

ν に関する ∇ の双対作用素は次で与えられる.

$$\nabla^*_\nu = e^U \nabla^* e^{-U}$$

従って

$$\triangle u = -\nabla^*_\nu \nabla u + (\nabla U, \nabla u).$$

そこで次のように置く.

$$\tilde{b} = \frac{1}{2} \nabla U^\sharp + b. \tag{2}$$

すると

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{2}\nabla_\nu^*\nabla + \nabla_{\tilde{b}} - V$$

これから ν に関する $\mathfrak{A}$ の双対作用素が次で与えられることが分かる.

$$\mathfrak{A}_\nu^* = -\frac{1}{2}\nabla_\nu^*\nabla - \nabla_{\tilde{b}} - \operatorname{div}_\nu \tilde{b} - V. \qquad (3)$$

ここで

$$\operatorname{div}_\nu X = e^U \operatorname{div}(e^{-U}X) = \operatorname{div} X - XU.$$

これらは $C_0^\infty(M)$ 上ではきちんと定義されている.

$\mathfrak{A}$ に対応する双線形形式を次で定める.

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(u,v) &= -(\mathfrak{A}u,v)_2 \\ &= \frac{1}{2}\int_M (\nabla u, \nabla v)\,dv - \int_M (\nabla_{\tilde{b}} u) v\,dv + \int_M Vuv\,dv.\end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ の対称化を $\tilde{\mathscr{E}}$ とかく:

$$\tilde{\mathscr{E}}(u,v) = \frac{1}{2}\int_M (\nabla u, \nabla v)\,dv + \frac{1}{2}\int_M (\mathrm{div}_v\,\tilde{b}) uv\,dv + \int_M Vuv\,dv.$$

$\tilde{\mathscr{E}}$ は，作用素 $\frac{1}{2}\{\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_v^*\}$ に対応する双線形形式である.

我々は $\mathfrak{A}$ で生成される L^2 の半群がいつ存在するかに興味がある.

半群の存在

そこで $-\mathfrak{A}$ が下から有界であることを保証するために次の条件を課す.

$$\text{(B.1)} \qquad \exists \gamma \in \mathbb{R}: \quad \frac{1}{2}\operatorname{div}_\nu \tilde{b} + V \geq -\gamma.$$

この条件の下で $\tilde{\mathscr{E}}$ は下に有界で可閉である．さらに

- d: 距離関数
- $o \in M$: 基準点
- $\rho(x) = d(o, x)$

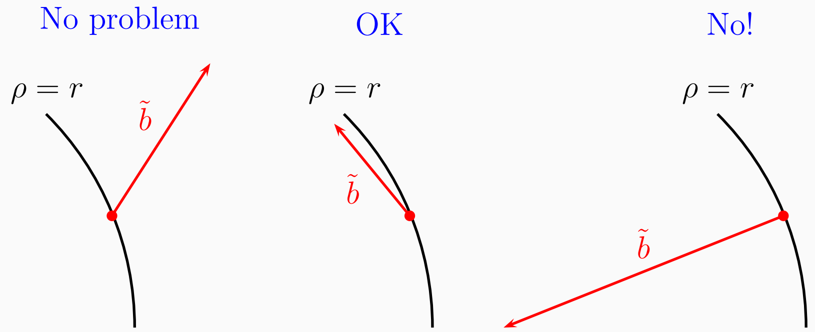
として，$\tilde{b}$ に対して次の仮定を課す:

$$\text{(B.2)} \ \exists \kappa: [0, \infty) \to [0, 1] \text{ with } \int_0^\infty \kappa(x)\, dx = \infty \text{ so that}$$

$$\kappa(\rho)\nabla_{\tilde{b}}\rho \geq -1.$$

典型的な例は $\kappa(x) = \frac{1}{x}$ である．このとき (B.2) の条件は $\nabla_{\tilde{b}}\rho(x) \geq -\rho(x)$ となる．

(B.2) の条件を図示するとつぎのようになる．



Theorem 1

条件 *(B.1)* と *(B.2)* を仮定すると，$(\mathfrak{A}, C_0^\infty(M))$ の閉包は $L^2(m)$ で正値性を保存する C_0-半群を生成する.

証明には，次の二つのことを示せばよい:

- 消散性: $((\mathfrak{A} - \gamma)u, u)_2 \leq 0$.
- 極大性: $(\mathfrak{A} - \gamma - 1)(C_0^\infty(M))$ は L^2 で稠密.

実際

$$
\begin{aligned}
((\mathfrak{A}-\gamma)u,u)_2 &= -\frac{1}{2}\int_M (|\nabla u|^2 + u^2 \operatorname{div} b)\,dm - \int_M (V+\gamma)u^2\,dm \\
&\le 0.
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{A}-\gamma-1)^* u = 0 \quad &\Rightarrow \quad u \in C^\infty(M) \\
&\Rightarrow \quad (u, (\mathfrak{A}-\gamma-1)(\chi_n^2 u))_2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad u = 0.
\end{aligned}
$$

正値性の保存

正値性の保存は次のことを示せばよい.

$$(\mathfrak{A}u, u_+)_2 \leq \gamma \|u_+\|_2^2. \tag{4}$$

次の Sobolev の不等式が成り立っているとする: 正定数 $p > 2$ と $C > 0$ が存在し

$$\|u\|_p^2 \leq C(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2).$$

これを仮定すると (B.1) の条件は次の形に弱めることができる:

(B.1)′ $$\exists \gamma \in \mathbb{R} : (\tfrac{1}{2}\,\mathrm{div}_\nu \tilde{b} + V + \gamma)_- \in L^{p/(p-2)}(\nu).$$

マルコフ性

以下 $\mathfrak{A}$ で生成される半群を $\{T_t\}$ とかく．$\{T_t\}$ のマルコフ性について次に議論しよう．

Proposition 2

(B.1) and (B.2) を仮定する．このとき，$\{e^{-\alpha t}T_t\}$ がマルコフ性を満たすための必要十分条件は，$V + \alpha \geq 0$ である．

これを示すためには，次の生成作用素に対する条件が知られているので，それを確かめればよい: $\{e^{-\alpha t}T_t\}$ がマルコフ性を満たすための必要十分条件は

$$((\mathfrak{A} - \alpha)u, (u-1)_+)_2 \leq (\gamma - \alpha)\|(u-1)_+\|_2^2$$

である．

さらに次のことも示すことができる.

Proposition 3

(B.1) と (B.2) を仮定する．このとき，$\{e^{-\beta t}T_t\}$ が L^1 縮小性を満たすための必要十分条件は $\mathrm{div}_\nu \tilde{b} + V \geq -\beta$ である.

これを示すためには，次の生成作用素に対する条件が知られているので，それを確かめればよい: $\{e^{-\alpha t}T_t\}$ が L^1 縮小性を満たすための必要十分条件は

$$((\mathfrak{A} - \beta)u, u_+ \wedge 1)_2 \leq (\gamma - \beta)\|u_+ \wedge 1\|_2^2$$

である.

双対作用素 $\mathfrak{A}_\nu^*$ について

$\mathfrak{A}$ の双対作用素は次で与えられる.

$$\mathfrak{A}^* = -\frac{1}{2}\nabla_\nu^*\nabla - \nabla_{\tilde{b}} - \mathrm{div}_\nu\, \tilde{b}.$$

$\mathfrak{A}^*$ に対しては次の条件が必要となる.

(B.2)* $\exists\, \kappa\colon [0,\infty) \to [0,1]$ with $\int_0^\infty \kappa(x)\,dx = \infty$ so that

$$\kappa(\rho)\nabla_{\tilde{b}}\rho \le 1.$$

Theorem 4

仮定 *(B.1)*, *(B.2)** の下で，$(\mathfrak{A}_\nu^*, C_0^\infty(M))$ の閉包は $L^2(m)$ において，正値性を保存する C_0 半群を生成する．この半群を $\{T_t^*\}$ とかく．

このとき $\{e^{-\alpha t}T_t\}$ がマルコフ性を持つための必要十分条件は $\mathrm{div}_\nu \tilde{b} + V \geq -\beta$ である．また，$\{e^{-\beta t}T_t\}$ が L^1 縮小性を持つための必要十分条件は $V + \alpha \geq 0$ である．

正規作用素とその判定条件

正規作用素

Hilbert 空間 H 上の閉作用素 A が $AA^* = A^*A$ を満たすとき**正規作用素**であるという.

一般に作用素をその定義まで正確に決めることは難しく，何かの閉包，という形で定義されることの方が多い．そのことを考慮して，正規作用素の判定条件を与えよう．次のような設定で考える.

- A, B: $\mathscr{D}$ で定義された**消散作用素**
- 閉包 $\overline{A}, \overline{B}$ は **m-消散である**

Theorem 5

$A\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}$ および $B\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}$ が成り立ち，さらに

$$AB = BA \quad \text{on } \mathscr{D},$$
$$(Au, v) = (u, Bv), \quad u, v \in \mathscr{D}.$$

であるとする．このとき $\overline{A}$ は正規作用素で $\overline{A}^* = \overline{B}$ である．

リーマン多様体上の例

- M: 完備リーマン多様体
- vol: リーマン体積要素
- $\nu = e^{-U} d\mathrm{vol}$.

$H = L^2(\nu)$ 上の作用素を

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\Delta_\nu + \nabla_b$$

で定める．ここに $\Delta_\nu = -\nabla_\nu^* \nabla$ である．このとき

$$\mathfrak{A}_\nu^* = \frac{1}{2}\Delta_\nu - \nabla_b - \mathrm{div}_\nu\, b.$$

ただし div_ν は ν に関する発散である．

Definition 6

g をリーマン計量とする．ベクトル場 X が $L_X g = 0$ を満たすとき，X を Killing ベクトル場という．ここで L_X は Lie 微分を表す.

作用素 $\mathfrak{A}$ の閉包に関して次が成り立つ.

Theorem 7

b を *Killing* ベクトル場とし $\mathbf{div}_\nu\, b$ は下に有界とする．このとき $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}_\nu^*$ のそれぞれの閉包は m-消散的である.

正規作用素の条件

これと，Theorem 5 から $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\Delta_\nu + \nabla_b$ が正規作用素であるための判定条件が得られる．

Theorem 8

$\mathrm{div}_\nu\, b$ が下に有界であることを仮定する．このとき $\mathfrak{A}$ が正規であるための必要十分条件は b が *Killing* ベクトル場 で，次の等式が成立することである:

$$\left(\frac{1}{2}\Delta_\nu + \nabla_b\right) \mathrm{div}_\nu\, b = 0,$$
$$[(\nabla U)^\sharp, b] + (\nabla\, \mathrm{div}_\nu\, b)^\sharp = 0.$$

M が compact のときは，上の条件は次のように単純化することができる．

Theorem 9

$\mathfrak{A}$ が正規であるための必要十分条件は b が *Killing* ベクトル場であり，次の等式が成立することである:

$$\mathbf{div}_\nu\, b = 0,$$
$$[(\nabla U)^\sharp, b] = 0.$$

正規作用素の例

回転付き Ornstein-Uhlenbeck 作用素

- $M = \mathbb{R}^2$
- $\nu = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} dxdy$
- $b = c(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y})$

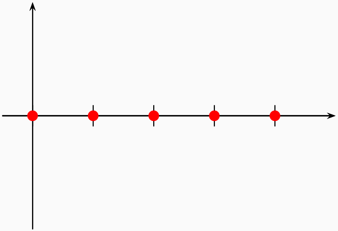
このとき $\mathfrak{A} = -\nabla_\nu^* \nabla + \nabla_b$ は $L^2(\nu)$ での正規作用素である.

Theorem 10

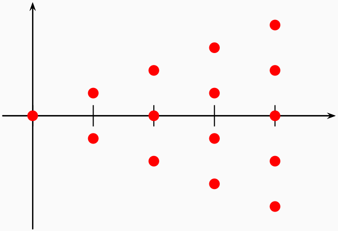
$\mathfrak{A}$ のスペクトルは

$$\{(p+q) - (p-q)ci\}_{p,q=0}^{\infty} \tag{5}$$

である.



the spectrum of L_0



the spectrum of L_α

ドリフトのある1次元ブラウン運動

作用素 $\mathfrak{A} = \frac{d^2}{dx^2} - c\frac{d}{dx}$ を $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ で考える．但し，測度 ν は次で定める．

$$\nu(dx) = e^{-cx}dx. \tag{6}$$

このとき $\mathfrak{A}$ は自己共役で次が成り立つ:

$$(\mathfrak{A}f, g) = -\int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)\,\nu(dx).$$

$\mathfrak{A}$ のスペクトルを調べるには，次の同型写像 $I\colon L^2(\nu) \longrightarrow L^2(dx)$ を用いる:

$$If(x) = e^{-cx/2}f(x).$$

すると

$$I \circ \mathfrak{A} \circ I^{-1} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{c^2}{4},$$

即ち次の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\nu) & \xrightarrow{\mathfrak{A}} & L^2(\nu) \\ {\scriptstyle I}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle I} \\ L^2(dx) & \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}-\frac{c^2}{4}} & L^2(dx) \end{array}$$

これから $-\mathfrak{A}$ のスペクトルは

$$\sigma(-\mathfrak{A}) = [\frac{c^2}{4}, \infty). \tag{7}$$

であることが分かる.

摂動

次に $\mathfrak{A}$ に摂動を加えたものを考える．ベクトル場 $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b} = k\frac{d}{dx}$$

で定める．そして $\mathfrak{A} + \boldsymbol{b}$ という形の作用素を考える．$\boldsymbol{b}$ を加えることでスペクトルがどう変わるかに興味がある．$\boldsymbol{b}$ は明らかに Killing ベクトル場である．ν に関する発散は

$$\operatorname{div}_\nu \boldsymbol{b} = -ck$$

であり，従って

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} + \boldsymbol{b}) \operatorname{div}_\nu \boldsymbol{b} &= 0, \\ [(\nabla U)^\sharp, \boldsymbol{b}] + \nabla \operatorname{div}_\nu \boldsymbol{b} &= 0. \end{aligned}$$

ここで $U(x) = cx$ である．

従って Theorem 8 を使って, $\mathfrak{A} + b$ が正規作用素であることが分かる.

変換 I によって

$$I \circ (\mathfrak{A} + b) \circ I^{-1} = \frac{d^2}{dx^2} + k\frac{d}{dx} - \frac{c(c-2k)}{4}$$

が成り立つ．スペクトルは $\frac{d^2}{dx^2} + k\frac{d}{dx}$ に対して調べればよい．Fourier 変換は

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}\, dx$$

で定義され，これは $L^2(dx)$ から $L^2(d\xi)$ への同型を与える.

ここで

$$\int_{\mathbb{R}} (\frac{d^2}{dx^2} + k\frac{d}{dx}) f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} (-\xi^2 + ik\xi)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$$

に注意すれば

$$\sigma(\frac{d^2}{dx^2} + k\frac{d}{dx}) = \{-\xi^2 + ik\xi; \xi \in \mathbb{R}\}$$

が分かる.

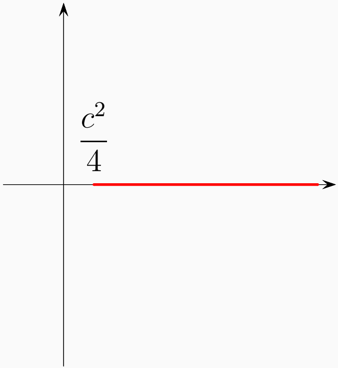
Theorem 11

次が成り立つ.

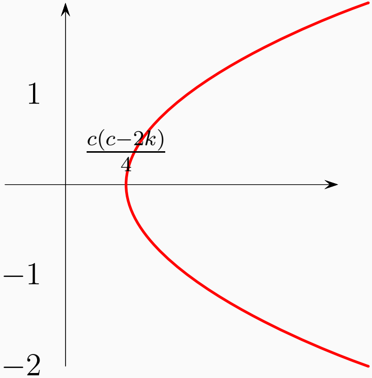
$$\sigma(-\mathfrak{A}) = [\frac{c^2}{4}, \infty)$$

であり

$$\sigma(-\mathfrak{A} - b) = \{\frac{c(c-k)}{2} + \xi^2 + ik\xi;\ \xi \in \mathbb{R}\}.$$



$-\mathfrak{A}$



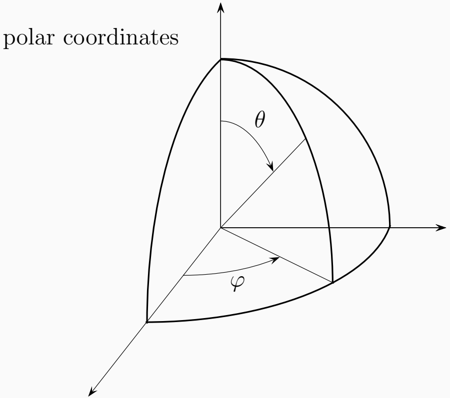
$-\mathfrak{A} - k\frac{d}{dx}$

S^2 上の正規作用素

S^2 上の Laplace-Berltrami 作用素は次のように表される.

$$\triangle = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

但し極座標を次で定めた.



固有値は $n(n+1),\ n = 0, 1, 2, \ldots$ である.

対応する固有関数を表現するのに次を準備する.

- Legendre 多項式

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n.$$

- Legendre 多項式の ODE

$$(1 - x^2) P_n'' - 2x P_n' = -n(n+1) P_n.$$

- Legendre 陪関数

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x).$$

- Legendre 陪関数の ODE

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n^m(x) - 2x \frac{d}{dx} P_n^m(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P_n^m(x) = 0.$$

Laplace-Berltrami 作用素の固有関数

以上の準備の下で固有値 $-n(n+1)$ に対応する固有関数は

$$P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \quad P_n^m(\cos\theta)e^{-im\varphi},$$
$$n = 0, 1, \dots, \ m = 0, 1, \dots, n$$

で与えられる.

Laplace-Beltrami 作用素に回転を加える

$\frac{\partial}{\partial \varphi}$ が加えたものを考えよう．即ち

$$\mathfrak{A} = \Delta + \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{8}$$

$\frac{\partial}{\partial \varphi}$ は Killing ベクトル場であるから $\mathfrak{A}$ は正規作用素である．

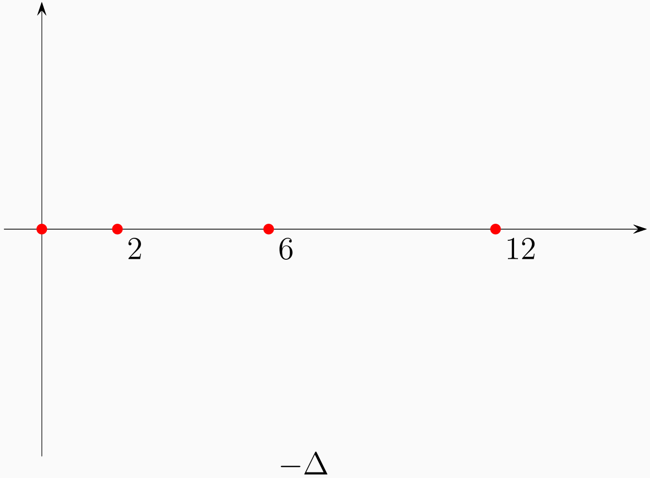
この場合も Legendre の陪関数が固有関数になる．実際

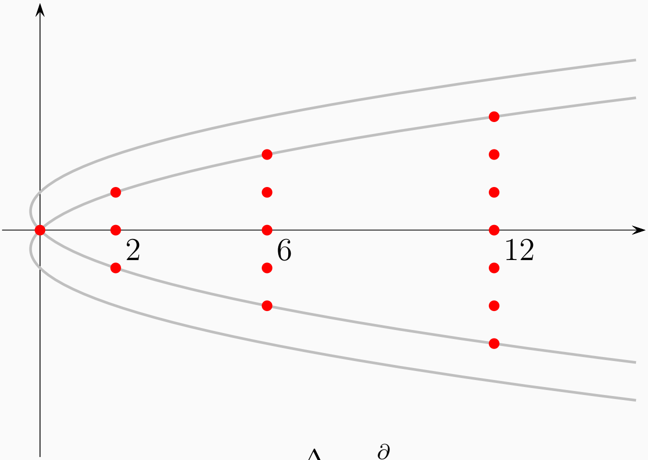
$$\frac{\partial}{\partial \varphi}[P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}] = imP_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

に注意すれば，$\Delta + \frac{\partial}{\partial \varphi}$ の固有値は $-n(n+1) + im$ で対応する固有関数は次で与えられる．

$$P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

図示すれば次のようになる.





$$-\Delta - \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

ご清聴ありがとうございました.