# 1 次元拡散作用素の固有関数のいくつかの具体例について

重川 一郎　京都大学

## 1　Introduction

Hermite 多項式が Ornstein-Uhlenbeck 作用素の固有関数であることはよく知られている．ここで Hermite 多項式は次で定義されるものである．

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

この多項式は次の性質をみたす.

$$H_n'(x) = H_{n-1}(x).$$

即ち Hermite 多項式を微分したものは再び Hermite 多項式で，固有関数になっている．このことから固有関数を微分すると，再び固有関数が得られることが予想できる．実際あるクラスの 1 次元拡散作用素に対して，このことを一般的に示すことが出来る．

## 2　1 次元拡散作用素

区間 $I = (l, r)$ 上の拡散作用素を考える．$I$ 上に $C^2$ 級関数 $a > 0$, $p > 0$ が与えられているとする．$I$ 上に測度 $\nu = p dx$ を与える．以後 $L^2(\nu)$ の代わりに $L^2(p)$ という形で，密度関数で測度を表すことにする．そして Hilbert 空間 $H = L^2(p)$ 上で，次のような作用素を考える.

$$\mathfrak{A}u = \frac{1}{p}(apu')'. \tag{2}$$

対応する Dirichlet 形式は

$$\mathscr{E}(u, v) = \int_0^\infty u'v'ap\, dx. \tag{3}$$

である．境界条件は必要な場合は Neumann 条件を課す．$b = a' + a(\log p)'$ と定めると

$$\mathfrak{A}u = au'' + bu', \tag{4}$$

である．さらに

$$\hat{\mathfrak{A}}\theta = a\theta'' + (a' + b)\theta' + b'\theta \tag{5}$$

と定める．$\hat{\mathfrak{A}}$ は $L^2(ap)$ での作用素とみなす．このとき，次が成立する．

**定理 2.1.** $b'$ が上に有界であるとする．すると $\mathfrak{A}u = au'' + bu'$ と , $\hat{\mathfrak{A}}\theta = a\theta'' + (a' + b)\theta' + b'\theta$ は 0 を除いて同じスペクトルを持つ．但し $\mathfrak{A}$ には Neumann 条件を課し，$\hat{\mathfrak{A}}$ は台がコンパクトな関数に制限した bilinear form の閉包として定まるものを取る．さらに固有関数の対応は $u \mapsto u'$ で与えられる．

## 3　Examples

以下で定理 2.1 の具体例を与える．

### 3.1 平方 Bessel 過程

$I = [0, \infty)$ とし生成作用素として

$$x\frac{d^2}{dx^2} + (1+\alpha)\frac{d}{dx} \tag{6}$$

を考える．定理 2.1 の設定の下では $a = x$, $p = x^\alpha$ ととったことになる．作用素は

$$\mathfrak{A}u = xu'' + (1+\alpha)u', \quad \hat{\mathfrak{A}}u = xu'' + (2+\alpha)u'$$

で与えられる．$\mathfrak{A}$ と $\hat{\mathfrak{A}}$ は同じスペクトルを持ち，固有関数の対応は微分で与えられる．固有関数の表示には超幾何関数

$${}_0F_1(c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_n n!} x^n \tag{7}$$

を使う．以下 $B(c; x) = {}_0F_1(c; x)$ と記す．また $B(c\pm) = B(c \pm 1; x)$ と略記する．

**命題 3.1.** 次の関係式が成り立つ．

$$B' = \frac{1}{c}B(c+), \quad xB' = (c-1)(B(c-) - B)$$

(a) $\alpha > -1$ のとき
固有値 $-\xi$ $(\xi \geq 0)$ の固有関数は $B(1+\alpha; -\xi x)$ で

$$\frac{d}{dx}[B(1+\alpha; -\xi x)] = \frac{\lambda}{1+\alpha}B(2+\alpha; -\xi x).$$

(b) $\alpha < 0$ のとき固有値 $-\xi$ $(\xi \geq 0)$ の固有関数は $x^{-\alpha}B(1-\alpha; \xi x)$ で

$$\frac{d}{dx}[x^{-\alpha}B(1-\alpha; -\xi x)] = -\alpha x^{-\alpha-1}B(-\alpha; -\xi x)$$

**注意 3.1.** 関数 $B$ は本質的に Bessel 関数である．

$$B(\alpha+1, -\xi x) = \Gamma(\alpha+1)(\xi x)^{-\alpha/2} J_\alpha(\sqrt{4\xi x}) \tag{8}$$

**注意 3.2.** 固有関数の意味は次のスペクトル分解による．Hankel 変換を

$$\hat{H}_\alpha[f](\xi) = \int_0^\infty f(x)\Gamma(\alpha+1)^{-1}B(\alpha+1; -\xi x)x^\alpha \, dx. \tag{9}$$

と定義すると

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{H}_\alpha[f](\xi)\Gamma(\alpha+1)^{-1}B(\alpha+1; -\xi x)\xi^\alpha \, d\xi \tag{10}$$

および次の Perseval の等式が成立する．

$$\int_0^\infty f(x)^2 x^\alpha \, dx = \int_0^\infty \hat{H}_\alpha[f](\xi)^2 \xi^\alpha \, d\xi. \tag{11}$$

### 3.2 有限区間の平方 Bessel 過程

$I=[0,a]$ で $x\frac{d^2}{dx^2}+(1+\alpha)\frac{d}{dx}$ を考える．$a$ での境界条件は，Neumann と Dirichlet で考える．$z(\alpha,n)$ で Bessel 関数 $J_\alpha$ の $n$ 番目の零点とする．

(a) $\alpha>-1$ のとき

[entrance, Neumann] 系列の固有値 $-\frac{z(\alpha+1,n)^2}{4a}$ に対する固有関数: $B(1+\alpha;-\frac{z(\alpha+1,n)^2}{4a}x)$

[entrance, Dirichlet] 系列の固有値 $-\frac{z(\alpha,n)^2}{4a}$ に対する固有関数: $B(1+\alpha;-\frac{z(\alpha,n)^2}{4a}x)$

(b) $\alpha<0$ のとき

[exit, Neumann] 系列の固有値 $-\frac{z(-\alpha,n)^2}{4a}$ に対する固有関数: $x^{-\alpha}B(1-\alpha;-\frac{z(-\alpha,n)^2}{4a}x))$

[exit, Dirichlet] 系列の固有値 $-\frac{z(1-\alpha,n)^2}{4a}$ に対する固有関数: $x^{-\alpha}B(1-\alpha;-\frac{z(1-\alpha,n)^2}{4a}x)$

### 3.3 Laguerre 多項式

$I=[0,\infty)$ とし Laguerre 多項式に対応する次の作用素を

$$\mathfrak{A}u=xu''+(1+\alpha-x)u',$$

で定める．定理 2.1 の設定の下で，$a=x$, $p=x^\alpha e^{-x}$ とした場合で

$$\mathfrak{A}u=xu''+(1+\alpha-x)u',\quad \hat{\mathfrak{A}}u=xu''+(2+\alpha-x)u'-u.$$

$\mathfrak{A}$ と $\hat{\mathfrak{A}}$ は同じスペクトルを持ち，固有関数の対応は微分で与えられる．固有関数の表示には超幾何関数

$$ {}_1F_1(a;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n n!}x^n. \tag{12}$$

を使う．以下 $M(a,c;x)={}_0F_1(a;c;x)$ と記す．

(a) $\alpha>-1$ のとき

entrance 系列の固有値 $-n$ に対する固有関数 は $M(-n,\alpha+1;x)$ $(n=0,1,\dots)$ で

$$[M(-n,\alpha+1;x)]'=-\frac{n}{\alpha+1}M(-n+1,\alpha+2;x)$$

が成り立つ．

(b) $\alpha<0$ のとき

entrance 系列の固有値 $-n+\alpha$ に対する固有関数 は$x^{-\alpha}M(-n,1-\alpha;x)$ $(n=0,1,\dots)$ で

$$[x^{-\alpha}M(-n,1-\alpha;x)]'=-\alpha x^{-\alpha-1}M(-n,-\alpha;x)$$

が成り立つ．

**注意 3.3.** 関数 $M$ は本質的に Laguerre 多項式である．

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}M(-n,\alpha+1;x) \tag{13}$$

その他 Jacobi 多項式に関しても同様のことが成り立つ．