A CANONICAL BUNDLE FORMULA
標準因子公式

藤野 修

今回の話はタイトルの通り, 標準因子公式についてである. まず最初に小平先生による標準因子公式をのべる. 以下すべて複素数体上の話である.

定理 1. $f : X \to C$ を極小楕円曲面とする. この時以下の関係式が成り立つ.

$$K_{X/C} = f^*L + \sum_P \frac{m_P - 1}{m_P} f^*P.$$

ここで L は C 上のネフ因子で $P \in C$ は f^*P が多重ファイバーなる点である. もちろん $m_P > 1$ が多重ファイバーの重複度である.

この公式は曲面論の本に大抵載っていると思う. 楕円曲面についての標準因子公式の曲面論における重要さは改めて述べるまでもないであろう.

実はもっと正確なことが示せる. 上の仮定の元で $\mathbb{Q}$-因子

$$L^{ss}_{X/C} := L - \sum_Q \delta_Q Q$$

を定義する. $L^{ss}_{X/C}$ は semi-stable part と呼ぶことにする. ここで $Q \in C$ は f^*Q が特異ファイバー (多重ファイバーではないとする) になる点とする. δ_Q は特異ファイバーから決まる有理数で分母は 12 の約数である. 詳しい値は特異ファイバーの分類表をみれば分かるが, ここでは値はあまり重要でないので省略する. 楕円曲面の特異ファイバーの分類から簡単に計算できることだけは注意しておく. 注意 8 も見て頂きたい.

この時, 次が成立する.

定理 2. $12L^{ss}_{X/C}$ は *Weil* 因子で,

$$\mathcal{O}_C(12L^{ss}_{X/C}) \simeq J^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).$$

もちろん $J : C \to \mathbb{P}^1$ は j 関数である.

したがって, 極小楕円曲面の標準因子と底空間の標準因子の差が特異ファイバーの寄与とモジュライの寄与で書き表せたことになる.

今回の目標は小平先生の結果の一般化である. 一般化と言っても色々考えられる. 以下で一般化の候補をいくつかあげてみる.

(1) 底空間の次元を上げる. つまり高次元多様体の上に楕円曲線が生えている状況である. これはすでに調べつくされている. 上野, 藤田, 川又, 中山先生方の論文を見て頂きたい. もちろん [F2] でも扱っている. 公式は基本的には曲面の時と同じである. なぜなら, 底空間を一般超平面で次元引く一回切ると楕円曲面になるからである.

(2) ファイバーの次元を上げる. すなわち生成ファイバーを小平次元零の代数多様体と仮定し, 全空間と底空間の標準因子の差を書く. これは楕円曲線を小平次元零の一次元多様体と見なすと, 自然な一般化である.

(3) 対数化する. 極小モデル理論をご存じの方なら代数多様体と $\mathbb{Q}$-因子の対を考えることが自然であるという考えに異論はないであろう. 各種応用のためには対数化は有効であると思われる.

(4) 一般ファイバーをアーベル多様体, もしくは $K3$ 曲面に限定して semi-stable part $L^{ss}_{X/Y}$ を詳しく調べる. 楕円曲線の一般化としてアーベル多様体, もしくは $K3$ 曲面を考えるのは自然であると思う. これらの多様体の族については周期写像がうまく振る舞うので (2) の設定よりも深い結果が得られることが期待できる.

(1), (2), (3) については [FM] で詳しく述べてある. 底空間の次元が一般, ファイバーの次元も一般で, 対数化された標準因子公式が証明されている. 一般的な公式は [FM] を見てもらうとして, 今回は主に一般化 (4) について述べる. もう少し詳しく言うと, semi-stable part と周期写像の関係を述べたい. これは [F2] で詳しく証明されている.

定理 3. *$f: X \to Y$ を非特異射影代数多様体の間の全射とする. ファイバーは連結と仮定する. $\mathcal{L}$ を f-豊富直線束と仮定する. $\Sigma \subset Y$ を単純正規交差因子とし, $Y_0 := Y \setminus \Sigma$ 上の任意のファイバーは $K3$ (もしくは n 次元アーベル多様体) と仮定する.*

これは明らかなことであるが上の状況で我々は重さ 2 (もしくは 1) の *polarized variation of Hodge structures* (以下略して *PVHS* と呼ぶ) を得る. そして周期写像

$$p_0 : Y_0 \to \mathcal{S}$$

を得る. $\mathcal{S}$ は自然なコンパクト化 $\bar{\mathcal{S}}$ を持つ. $\bar{\mathcal{S}}$ は *Baily-Borel-Satake* コンパクト化と呼ばれている. ここで大切なのは, 我々の状況では周期領域が有界対称領域になるという点である. したがって, $\mathcal{S}$ は有界対称領域を数論的部分群で割った正規解析空間である. さらに *Borel* の拡張定理を使えば上で得た周期写像が

$$p : Y \to \bar{\mathcal{S}}$$

に拡張されることが知られている．ここで *Baily-Borel-Satake* コンパクト化 $\bar{\mathcal{S}}$ は重さ k の *automorphic forms* で射影空間に埋め込まれた射影多様体である．この埋め込みによって決まる超平面切断因子を $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{S}}}(1)$ と書いておく．$a = 19k$ (もしくは $a = k(n+1)$) とおく．ちなみに k の具体的な値はあまり知られていないと思う．ファイバーが楕円曲線の時は $k = 6,\ n = 1$ で $a = 12$ となり, 元々の話と一致する．

このとき以下の標準因子公式が成立する．

$$K_X = f^*(K_Y + L^{ss}_{X/Y}) + \sum_P s_P f^*P + B,$$

ここで $\mathbb{Q}$-因子 $L^{ss}_{X/Y}$ は *semi-stable part,* B は X 上の $\mathbb{Q}$-因子である．詳しい性質は以下の通りである．

(0) P は Σ の既約成分達,
(1) $f_*\mathcal{O}_X(\lfloor iB_+ \rfloor) = \mathcal{O}_Y$ が任意の $i \geq 0$ について成立．ここで B_+ は B の正の部分である．ちなみに, 極小楕円曲面の時は K_X が f-半豊富だったので B_+ は出てこなかった,
(2) $\mathrm{codim}_Y f(\mathrm{Supp}B_-) \geq 2$. ここで B_- は B の負の部分である．もし f のファイバーの次元が一定ならこの部分は出てこない．そもそも全空間と底空間の上の因子をくらべる公式なので, 余次元が *2* 以上に潰れる部分はうまくいかない,
(3) $aL^{ss}_{X/Y}$ は *Weil* 因子で, $\mathcal{O}_Y(aL^{ss}_{X/Y}) \simeq p^*\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{S}}}(1)$,
(4) $N := \mathrm{lcm}\left\{ y \in \mathbb{Z}_{>0} \;\middle|\; \varphi(y) \leq 22 \ \left(\textit{resp.}\ \varphi(y) \leq \frac{(2n)!}{n!n!} \right) \right\}$ と定義する．φ は *Euler* 関数である．すると $NL^{ss}_{X/Y}$ は *Weil* 因子で各 P に対して, $u_P, v_P \in \mathbb{N}$ が存在し, $0 < v_P \leq N$ で $s_P = (Nu_P - v_P)/(Nu_P)$ を満たす．ここでベッチ数 $b_2 = 22$ (*resp.* $b_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$) に注意する．

証明は論文 [FM] と [F2] を見てもらいたい．少しだけコメントしておく．まず semi-stable part $L^{ss}_{X/Y}$ を定義する．これがキチンと定義できると, ある意味 (0) から (2) までの性質を持つ公式を得るのは難しくない．定義からほぼ明らかである．(4) の N は $K3$ の自己同型群などを扱うときにお目にかかることがあると思う．以下の注意 8 も見て頂きたい．問題は (3) である．これだけはかなり深い議論を要する．今回 [F2] で採用した証明は純粋にホッジ理論的な証明である．幾何学的なものに付随する必要は全くない．完全にホッジ理論的な話として扱ったので, 重さ 1, もしくは重さ 2 の PVHS で, ある種の仮定を満たせば, 周期領域が有界対称領域になり, Baily-Borel-Satake コンパクト化上の超平面切断因子とホッジフィルトレーションの標準延長 (canonical extension) の間の関係式が証明できた．それの応用として上記のファイバー空間に適用すると (3) が得られる．ホッジ理論的な話は [F2] の §2 に詳しく述べてある．興味のある方は見て頂きたい．

ついでに一つオマケを述べておく．ホッジ理論的議論で得られた結果を曲線の族に適用すると, 以下の結果が簡単に得られる．これは重み1のPVHSの話である．重み2のPVHSの結果はシンプレクティック多様体の族などに応用があると思われる．

系 4. $f: X \to Y$ を非特異射影代数多様体の間の全射とする．$\Sigma \subset Y$ を単純正規交差因子とし, $Y_0 := Y \setminus \Sigma$ と置く．Y_0 上の任意のファイバーは非特異な曲線で種数は $g \geq 1$ と仮定する．さらに写像 f は余次元1で半安定と仮定する．この時以下が成立．

$$(\det f_*\omega_{X/Y})^{\otimes a} \simeq p^*\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{S}}}(1).$$

ここで $\mathcal{S}$ は次数 g のジーゲル上半空間をシンプレクティック群で割ったものであり, $\bar{\mathcal{S}}$ はそれの佐武コンパクト化である．$a := k(g+1)$ で k は佐武コンパクト化を射影空間に埋め込む *automorphic forms* の重みである．

定理3の補足をいくつか述べる．

注意 5. 定理のなかで $f: X \to Y$ が余次元1で semi-stable と仮定すると (3) は

$$(f_*\omega_{X/Y})^{\otimes a} \simeq p^*\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{S}}}(1).$$

である．これはア—ベル多様体の族についてはよく知られていたように思う．ただ, 証明は見たことがない．底空間が1次元のときは, ある種の仮定の元で, 上記の関係式はア—ベル多様体の族に対して証明されている．Arakelov の結果である．

注意 6. 標準因子公式は生成ファイバーの小平次元が零という仮定の元で定式化できる．この仮定の元でも上記定理とほぼ同じことが示せる．少し技術的な話であるが, 生成ファイバーの幾何学的種数が零の時は小細工が必要である．定理のなかの (3) は

(3') $L^{ss}_{X/Y}$ はネフ $\mathbb{Q}$-因子,

に取り替える必要がある．ネフを示すだけなら周期写像の深い解析など必要ない．いわゆる藤田-川又の半正値性定理の応用である．(4) の具体的な数値はもちろん変更する必要がある．

注意 7. すでに述べたように対数バージョンの一般化も証明できる．ただし, かなり技術的にややこしい公式である．後の応用を見て頂ければ分かると思うが, 対数化することで応用が増える．詳しくは [FM] の §4 を見て頂きたい．

注意 8. 定理の (4) の s_P は一見よく分からない値であるが, もちろん意味のある値である．$t_P := 1 - s_P$ と置くと, t_P は P の生成点上 $(X, -B)$ の f^*P による log-canonical threshold である．log-canonical threshold は特異点の研究でそこそこ普及した概念であると思う．楕円曲面の時は特異ファイバーの分類表を見ると簡単に計算できる．

以下で標準因子公式の応用をいくつか述べる．「痒いところに手が届く」という感じの応用達である．直接的には関係ないが, [F1] もかなり「痒いところに手が届く」結果である．

系 9. *X を完備な代数多様体とし, 対 (X, Δ) が klt (Kawamata log terminal) と仮定する．この時, $\kappa(X, K_X + \Delta) \leq 3$ なら対数的標準環*

$$R(X, K_X + \Delta) = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(X, \lfloor iK_X + i\Delta \rfloor)$$

は有限生成である．

3 次元で小平次元 2 の代数多様体の標準環の有限生成性を示すために楕円ファイバー空間の標準因子公式を示し, 2 次元の対数的カテゴリーの話に問題を帰着させるというのが藤田先生のアイデアであった．したがって, 標準因子公式が一般化できた現在, 上の応用は実に自然であると思う．

系 10. *X を完備な代数多様体とし, 対 (X, Δ) が klt と仮定する．対数的標準環 $R(X, K_X + \Delta)$ が有限生成の時, $S := \mathrm{Proj} R(X, K_X + \Delta)$ 上に有効な $\mathbb{Q}$-因子 Ξ が存在し, (S, Ξ) は klt である．*

これは中山先生, 森脇先生によって部分的には証明されていたことである．我々の標準因子公式を使えば, 簡単に既知の場合に帰着できる．

系 11. *X を 3 次元多様体とし, $\kappa(X) = 1$ と仮定する．この時, X によらない自然数 M が存在し, $\Phi_{|MK_X|}$ は飯高ファイバー空間を引き起こす．*

これが本来の森先生の標準因子公式の応用であった．注意 13 も見て頂きたい．[K-森] の 294 ページの 17 行目に「森 (未出版)」と書いてある結果である．飯高先生の楕円曲面についての結果をご存じの方には自然な応用に見えると思う．証明は曲面の時よりは難しい．

系 12. *X, Y を非特異な射影代数多様体とし, $f : X \to Y$ をファイバーが連結な全射とする．生成ファイバーの小平次元を 1 とする．*

$$f : X \xrightarrow{\ g\ } Z \xrightarrow{\ h\ } Y$$

を相対的飯高ファイバー空間とする．もちろん適当にモデルを取り替えて g, h は射であるとしている．g の幾何学的生成ファイバーの generically finite な cover でアーベル多様体と双有理なものがとれたとする．この時, $\kappa(X) \geq \kappa(Y) + 1$ が成立する．

上の結果は, 飯高先生の予想 $C_{n,m}$ の非常に特殊な場合である．これは川又先生の昔の結果の焼き直しである．g が楕円ファイバー空間の時を川又先生は扱っていた．証明は同じ方針だが, 技術的にかなり大変である．詳しくは [F2] を見てもらうしかないのだが, 各種操作で semi-stable part がうまく振る舞うのかどうかをチェックする必要がある．一見当た

り前そうに見えるが証明は自明でないことがいくつかあるので, 注意が必要である.

注意 13. 最後に文献について少し補足しておく. そもそも今回の標準因子公式の始まりは, 森先生が 19994 年の 6 月に北海道の研究集会で発表した内容である. 未出版であるがテフ打ちした原稿がごく一部の人に出回っていたようである. これは 7, 8 ページのペラペラのノートであった. [FM] は, その未出版のノートの拡張版である. オリジナルとは似ても似つかないものになってしまっているかも知れない. 一般化しすぎて, オリジナルより明らかに読みにくくなってしまったのは, ちょっと悲しいところである. [F2] は標準因子公式のホッジ理論的な側面を調べている.

References

[F1] O. Fujino, Applications of Kawamata's positivity theorem, Proc. Japan Acad. Ser. A Math Sci. **75** (1999), no.6, 75–79.

[F2] O. Fujino, A canonical bundle formula for certain algebraic fiber spaces and its applications, preprint, RIMS-**1325** (2001).

[FM] O. Fujino, and S. Mori, A canonical bundle formula, preprint, RIMS-**1293** (2000), to appear in J. Differential Geometry.

[K-森] J. Kollár, 森重文, ***双有理幾何学***, 岩波書店, 1998.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502 Japan

E-mail address: `fujino@kurims.kyoto-u.ac.jp`