Vanishing theorem and non-vanishing theorem

消滅定理と非消滅定理

京都大学大学院理学研究科数学教室
藤野 修*

2009 年 9 月 17 日

概 要

In this note, we explain vanishing theorem and non-vanishing theorem for log canonical pairs. Our new approach greatly simplifies proofs of the fundamental theorems for the log minimal model program for log canonical pairs.

このノートでは、対数的標準対に対する消滅定理と非消滅定理を解説する。我々の新しいアプローチは、対数的標準対に対する極小モデル理論の基本定理たちの証明を著しく簡略化する。

目 次

1 消滅定理と非消滅定理ってなに？ **2**

2 はじめに **4**

3 おわび **5**

4 特異点の定義 **6**

5 非消滅定理 **7**

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町, e-mail: fujino@math.kyoto-u.ac.jp

6　極小 LC 中心に対する消滅定理　8

7　証明のアイデア　9

8　今後の課題　11

9　勉強の仕方　11

10　おまけ：個人的な考え　11

11　訂正　13

1　消滅定理と非消滅定理ってなに？

今ここを読んでいる人は、せめてこの章だけは読んで欲しい。この章は高次元代数多様体論普及のための解説である。非専門家向けに書いてある。以下すべて複素数体上で考える。

X を非特異射影代数多様体とし、D を X 上のカルティエ因子とする。典型的な消滅定理は、

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$$

がすべての $i > 0$ に対して成立する、という形の主張である。$D - K_X$ が豊富のとき、上の主張は小平の消滅定理に他ならない。

次に Y を X 上の非特異超曲面とする。短完全列

$$0 \to \mathcal{O}_X(D - Y) \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathcal{O}_Y(D) \to 0$$

を考える。もし $H^1(X, \mathcal{O}_X(D - Y)) = 0$ が成立すれば、制限写像

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D))$$

の全射性がわかる。これによって X 上の線形系 $|D|$ の研究に次元による帰納法が有効になる。Y 上の線形系 $|D|_Y|$ のメンバーを X 上の線形系 $|D|$ のメンバーに持ち上げることが出来るからである。この手の議論は、80 年代前半から現在にいたるまで、極小モデル理論研究の際の常套手段である。広中の特異点解消定理と係数を揺するというテクニックを組み合わせた川又の X-論法はその典型例である。もっと言うなら、小平の埋め

込み定理も同様の議論である。80 年代後半から始まる乗数イデアル層の理論では、Y を X の閉部分スキームとし、

$$H^1(X, \mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{O}_X(D)) = 0$$

を使うことが多い。ここで $\mathcal{I}_Y$ は Y の定義イデアル層である。今回の話でも上のようなイデアルを引っ掛けた形の消滅定理が大活躍する。よくよく考えると、小平が小平消滅定理をつかって小平の埋め込み定理を証明した頃から線形系を扱う基本的なテクニックは何も変わっていないのである。

最後に非消滅定理について考えてみたい。$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$ がすべての $i > 0$ で成立したとしても、一般には $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ については何も言えない。線形系 $|D|$ を考える際、もっとも困難をともなうのは、$|D|$ が空でないことを示す点である。いったん $|D| \neq \emptyset$ が示せたら、$|D|$ のメンバー $Z \in |D|$ をとってきて幾何学的な議論を展開することができる。低次元のときは、$H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0$ が $i > 0$ で成立するという事実とリーマン–ロッホの定理から $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$ が簡単に分かることが多いのであるが、一般次元では難しい問題である。そういうわけで、高次元代数多様体論では $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$ なる形の主張を非消滅定理と呼ぶことが多い。先程の設定で Y が 0 次元と仮定すると、$\mathcal{O}_Y(D)$ は摩天楼層である。したがって、$H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D)) \neq 0$ である。これと制限写像の全射性を使うと、$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$ が従う。このノートではもっと精密な主張を非消滅定理と呼んでいるが、気持ちは上に述べた通りである。

代数幾何学を学んだことのある人なら誰でも、リーマン面（もしくは代数曲線）上でリーマン–ロッホの公式をつかって線形系の性質を調べるという話を勉強したことがあると思う。我々はその話の単純な高次元化を考えていると言っても良いかもしれない。

高次元代数多様体論は敷居の高い分野と思われているようだが、実は約半世紀前の小平の議論と大差のない話を延々とやっているだけかもしれない。スタックもファンクターも導来圏もあまり目にしない古典的な分野である。少しでも敷居が低くなったであろうか？大半の人はここまでしか読まないのだろうか？次の章からは通常の解説記事である。2 章から 9 章までは完全に普通のまじめな報告書である。10 章は私の個人的な考えである。通常の論文などには書かない話である。内容はセミプロ向けかもしれない。10 章に面白さを期待してはいけない。最後の 11 章では、今回の話とは直接的な関係はないが、私の書いた他の解説記事内の誤りを訂正しておく。

2 はじめに

このノートでは、最近得られた対数的標準対に対する非消滅定理を解説する。この非消滅定理は、対数的標準対に対する固定点自由化定理と同値であることが示される。したがって、結果自体は新しくないと言える。今回の非消滅定理の一番のポイントは、その定式化である。数学的な内容は固定点自由化定理と同値であるが、非消滅定理として正しく定式化することにより、極小モデル理論の基本定理たちの証明に劇的な簡略化をもたらしたと主張したい。

対数的標準対に対して極小モデル理論の基本定理（固定点自由化定理、錐定理、収縮定理など）を証明することは、長年未解決の問題であった。Ambro 氏は論文 [A] の中で quasi-log varieties という概念を導入し、対数的標準対の概念を拡張する事で次元による帰納法が回るような新しい枠組みを与えた。quasi-log varieties の理論は [F5] に詳しい。Ambro 氏の証明は素朴なアイデアを実行したものだが、証明に必要となる道具は極めて高度であり、技術的にかなり大変である。

[F6] では Ambro 氏の枠組みのように多様体の次元による帰納法を使うのではなく、「極小 LC 中心を切る」という乗数イデアル層の理論でおなじみのアイデアを流用し、対数的標準対の固定点自由化問題に簡単な解答を与えた。それが上で述べた非消滅定理である。この新しい非消滅定理の証明に必要となるのが、極小 LC 中心に対する消滅定理である。この消滅定理の証明は依然として困難を伴うものであるが、[BCHM] の結果を援用する事により、非常に簡単に比較的簡単な別の消滅定理に帰着することが出来るようになった。その結果、[BCHM] を認めれば、対数的標準対に対する極小モデル理論の基本定理の証明は劇的に簡略化されたことになる。[BCHM] の使用を控えたとしても、極小 LC 中心に対する消滅定理さえ確認出来れば、後は既存のテクニックだけですべてを証明する事が出来る。重要な点は、すべて非消滅定理の定式化に含まれているのである。固定点自由化定理をいきなり証明することは難しかったが、正しく定式化された同値な非消滅定理は証明が簡単である。この点が私の最大の貢献だと思う。

このノートでは、多様体はすべて複素数体上で考えることにする。

3　おわび

2008年9月の数学会での特別講演や論説 [藤 1] の中では、極小モデル理論の基本定理（固定点自由化定理や錐定理）などを対数的標準対に対して証明するためには、可約な多様体まで込めて次元による帰納法を使う必要がある！となんども強調した。これは基本的に Ambro 氏 [A] のアイデアである。次元による帰納法を有効に活用するために quasi-log varieties なる概念を導入し、その理論に必要となる消滅定理や捻れ不在定理の一般化を証明するという戦略であった。詳しくは [F5] を見て頂きたい。

実を言うと、[F5] を書き上げた直後、突然新しいアイデアが降って来たのである。それが [F6] である。次元の帰納法を組もうとするから quasi-log varieties の枠組みを整備する必要があったのであるが、素朴に LC 中心を解析するという立場に徹すれば、quasi-log varieties のような大掛かりな話は全くいらないということが分かったのである。[F6] で使われているテクニックは、ほとんどすべて「よく知られている」ものばかりである。Shokurov 氏の非消滅定理の証明の中のアイデア、乗数イデアルを使った Siu 氏達のアイデア、Kollár 氏のテクニック、Ambro 氏による幾つかのテクニック、などなどである。

80年代前半から現在にいたるまで、極小モデル理論研究の最も重要でよく使われるテクニックは川又–Viehweg 消滅定理である。80年代後半から、乗数イデアル層の考え方が持ち込まれ、Nadel 型の消滅定理をつかうことも非常に有効であることが分かって来た。いずれにせよ、すべて川又–Viehweg 消滅定理の応用として扱うことが出来る話である。今回の一連の発展は、その川又–Viehweg 消滅定理の部分を一般化し、新しい道具で極小モデル理論を考え直した、ということである。

ここ数年いろいろと迷走してしまったが、[F7] で古典的な川又の X-論法と乗数イデアル層の理論をミックスした新しい極小モデル理論の基礎と基本的なテクニックを提供することで、今後数十年間の極小モデル理論の土台は完成したと思う。一言で言うと、極小モデル理論の基礎部分が純ホッジ構造の話から混合ホッジ構造に移り変わった、である。興味を持たれた読者は、[F3]、[F4]、[F6]（いずれも短い）を読むことを勧める。以下の解説を読むより論文を読む方が分かりやすいような気がする。

4　特異点の定義

ここでは特異点の定義について最低限のことだけを述べておく。詳しくは、[K 森, §2.3] を見ていただきたい。極小モデル理論の専門家以外には頭の痛くなる話題であろう。

定義 4.1 X は正規多様体で、K_X は $\mathbb{Q}$-カルティエ因子と仮定する。つまり、正の整数 m が存在し、mK_X がカルティエになるとする。$f: Y \to X$ は特異点解消で、f の例外集合が Y 上の単純正規交差因子になるものとする。このとき

$$K_Y = f^*K_X + \sum_i a_i E_i$$

と書ける。ただし、E_i 達は f の例外素因子である。ここで、すべての i に対し $a_i > -1$ が成立するとき、X は高々川又対数的末端特異点 (klt と略す) を持つといい、すべての i に対し $a_i \geq -1$ が成立するとき、X は高々対数的標準特異点 (lc と略す) を持つという。

もう少し一般的な設定も必要である。帰納的な議論をするためには、以下のように「対（pair)」を考える方が有効なのである。

定義 4.2 (対に対する特異点) (X, B) は正規多様体 X と $\mathbb{Q}$-因子 B の対とする。ここで、B は相異なる素因子 B_i を用いて $B = \sum_i b_i B_i$ と表示する。ただし、b_i は非負な任意の有理数とする。$K_X + B$ は $\mathbb{Q}$-カルティエ因子と仮定する。$f: Y \to X$ を (X, B) の対数的特異点解消とする。つまり、Y は非特異、f は固有双有理射、f の例外集合 E は Y 上の単純正規交差因子で、$E + \sum_i f_*^{-1} B_i$ も Y 上の単純正規交差因子とする。ただし、$f_*^{-1} B_i$ は B_i の Y 上への固有変換である。

$$K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_j a_j E_j$$

と書く。全ての j に対して $a_j > -1$ のとき、対 (X, B) は川又対数的末端対 (klt と略す) といい、$a_j \geq -1$ のとき、対 (X, B) は対数的標準対 (lc と略す) という。ただし、$f_*(\sum_j a_j E_j) = -B$ となるように $\sum_j a_j E_j$ は選んである。

4.3 (補足) X を非特異な多様体とし、S を X 上の単純正規交差因子とする。$S = \sum_i S_i$ を S の既約分解としよう。このとき、$(X, \sum_i b_i S_i)$ が川

又対数的末端対であるとは、$0 \le b_i < 1$ がすべての i に対して成立することである。また、$(X, \sum_i b_i S_i)$ が対数的標準対であるとは、$0 \le b_i \le 1$ がすべての i に対して成立することである。

次に定義する LC 中心は、見た目より重要な概念である。各種定理の証明で大切な役割を果たす。

定義 4.4 (LC 中心) (X, B) を対数的標準対とする。X の閉部分集合 C が (X, B) の LC 中心（lc center）であるとは、(X, B) のある対数的特異点解消 $f : Y \to X$ が存在し、

$$K_Y = f^*(K_X + B) + \sum_{j \in J} a_j E_j$$

と書いたとき、$f(E_{j_0}) = C$ かつ $a_{j_0} = -1$ となる $j_0 \in J$ が存在することとする。

(X, B) の LC 中心 C が極小 LC 中心であるとは、C に真に含まれる LC 中心が存在しないこととする。

4.5 (補足 2) 上の補足で扱った例にもどる。$(X, \sum_i b_i S_i)$ が対数的標準対とする。このとき、$T = \sum_{b_i=1} S_i$ と書く。T は X 上の単純正規交差因子である。T の既約分解を $T = \sum_j T_j$ と書くと、$T_{j_1} \cap \cdots \cap T_{j_k}$ の既約成分が $(X, \sum_i b_i S_i)$ の LC 中心である。これは爆発の簡単な計算から従う。

5 非消滅定理

以下の定理がこの章の主定理である。対数的標準対に対する非消滅定理である。

定理 5.1 (非消滅定理) X を正規で射影的な代数多様体とし、B を X 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子とする。(X, B) は対数的標準対と仮定する。L を X 上の数値的非負なカルティエ因子とし、ある正の数 a に対して $aL - (K_X + B)$ は豊富であるとする。このとき、ある正の整数 m_0 が存在し、$m \ge m_0$ なるすべての m に対し、線形系 $|mL|$ の固定点集合 $\mathrm{Bs}|mL|$ は (X, B) の LC 中心を含まない。

非消滅定理と言えば Shokurov 氏による定理 [S] が有名であるが、上の定理は Shokurov 氏の非消滅定理の直接的な一般化にはなっていない。そ

もそも、(X, B) が川又対数的末端対のときは LC 中心が存在しないので、定理 5.1 は何も主張していないことになる。ただし、定理 5.1 の証明を見ると、なぜこれが Shokurov 氏の非消滅定理の一般化であるかが分かってもらえると思う。いちおう固定点自由化定理も述べておこう。定理の条件は定理 5.1 と全く同じである。

定理 5.2 (固定点自由化定理) X を正規で射影的な代数多様体とし、B を X 上の有効 $\mathbb{Q}$-因子とする。(X, B) は対数的標準対と仮定する。L を X 上の数値的非負なカルティエ因子とし、ある正の数 a に対して $aL-(K_X+B)$ は豊富であるとする。このとき、ある正の整数 m_0 が存在し、$m \geq m_0$ なるすべての m に対して、線形系 $|mL|$ は固定点自由である。

定理 5.2 は明らかに定理 5.1 より強いことを主張している。定理 5.2 が定理 5.1 から簡単に従うことは後に説明する。

6 極小 LC 中心に対する消滅定理

非消滅定理の証明の中で最も大切な役割を果たすのが、以下の消滅定理である。

定理 6.1 (極小 LC 中心に対する消滅定理) (X, B) を射影的な対数的標準対とし、W を (X, B) の極小 LC 中心とする。D を W 上のカルティエ因子とし、$D-(K_X+B)|_W$ を豊富と仮定する。このとき、

$$H^i(W, \mathcal{O}_W(D)) = 0$$

がすべての $i > 0$ に対して成立する。

定理 6.1 で重要な点は以下の通りである。D は X 上の因子の W への制限になっている必要はない。また、たとえ D が X 上のカルティエ因子 G の W への制限でかけたとしても、$G-(K_X+B)$ が X 上豊富であることは要求していない。

この定理 6.1 のおかげで、定理 5.1 が簡単に示せるようになった。定理 6.1 はもっと一般的な形で [A] で主張されていたし、そのような消滅定理は [F5] で組織的に調べられている。そこでの証明は、可約な多様体上で混合ホッジ構造を調べるという大掛かりなものであった。しかし、[F6] では、[BCHM] の応用として Hacon 氏によって示された dlt modifications の存在定理を使うことにより、定理 6.1 を次に述べる比較的簡単な定理 6.2 に帰着させることに成功している。

定理 6.2 X を正規な射影代数多様体とし、B を $\mathbb{Q}$-因子とする。さらに、(X,B) は対数的標準対と仮定する。D が X 上のカルティエ因子で $D-(K_X+B)$ は豊富とし、C を (X,B) の LC 中心とする。このとき、

$$H^i(X,\mathcal{I}_C\otimes\mathcal{O}_X(D))=0$$

と

$$H^i(X,\mathcal{O}_X(D))=0$$

がすべての $i>0$ に対して成立する。ただし、$\mathcal{I}_C$ は C の X 上での定義イデアル層である。とくに、制限写像

$$H^0(X,\mathcal{O}_X(D))\to H^0(C,\mathcal{O}_C(D))$$

は全射である。

この定理の証明は、全く難しくない。詳しくは [F3] を見て欲しい。証明の概略は、[藤 2] や [藤 3] を見て頂きたい。

7 証明のアイデア

ここでは非消滅定理の証明のアイデアについて説明する。

7.1 (非消滅定理の証明のアイデア) C を (X,B) の極小 LC 中心とする。このとき、$|mL|$ の固定点集合が C を含まないことを示せば十分である。$L|_C$ が数値的にゼロのとき、

$$h^0(C,\mathcal{O}_C(L))=\chi(C,\mathcal{O}_C(L))=\chi(C,\mathcal{O}_C)=h^0(C,\mathcal{O}_C)=1$$

が成立するので、$L|_C$ は線形自明である。1 つ目と 3 つ目の等号を示すところに定理 6.1 を本質的に使っている。この部分が最も深い部分である。よって、$|mL|_C|$ はすべての $m>0$ に対して固定点自由である。一方、

$$H^0(X,\mathcal{O}_X(mL))\to H^0(C,\mathcal{O}_C(mL))$$

は $m\geq a$ で全射なので、$|mL|$ の固定点集合は C を含まない。この全射性のところでは定理 6.2 を使った。以上が証明の核心部分である。

以下はいつも通りの話である。$L|_C$ が数値的にゼロではないとき、$(lL-(K_X+B))|_C$ の自己交点数は l を大きくするといくらでも大きくする事が

できる。このとき、Shokurov 氏の非消滅定理の証明の議論と全く同じ議論で、C の一般の位置にある点 $x \in C$ で重複度が非常に大きく、C の外では悪さをしない有効 $\mathbb{Q}$-因子 M で $M \sim_{\mathbb{Q}} lL - (K_X + B)$ となるものが構成出来る。c を $(X, B + cM)$ が対数的標準対になる最大の c とすると、M の構成方法より、$0 < c < 1$ で $(X, B + cM)$ は C に真に含まれる極小 LC 中心 C' を持つことがわかる。

$$(a - ac + cl)L - (K_X + B + cM) \sim_{\mathbb{Q}} (1 - c)(aL - (K_X + B))$$

に注意して、a を $a - ac + cl$、(X, B) を $(X, B + cM)$ に置き換えて同じ議論を繰り返す。結局、$L|_C$ が数値的にゼロになるまで持っていくことが出来て、非消滅定理の証明は完成する。

7.2 (非消滅定理から固定点自由化定理) これは演習問題である。折角なので少し解説してみよう。

(X, B) が川又対数的末端対のときはよく知られているので、以下 (X, B) は川又対数的末端対でないと仮定しよう。このとき、非消滅定理を使って、$|mL|$ の一般元 $D_1, \cdots, D_{n+1}$ をとる。ただし、m は十分大で、$n = \dim X$ とする。$\mathrm{Bs}|mL| = \emptyset$ なら L は半豊富である。以下 $\mathrm{Bs}|mL| \neq \emptyset$ と仮定しよう。$D = \sum_{i=1}^{n+1} D_i$ とおく。すると、ある有理数 $0 < c < 1$ が存在し、$(X, B + cM)$ は対数的標準対で、さらに、$(X, B + cM)$ の LC 中心 C が存在して $C \subset \mathrm{Bs}|mL|$ となるように出来る。

$$(c(n + 1)m + a)L - (K_X + B + cD) \sim_{\mathbb{Q}} aL - (K_X + B)$$

に注意して、a を $c(n + 1)m + a$、(X, B) を $(X, B + cD)$ に置き換えて、非消滅定理を使う。 すると、$m_1 > 0$ が存在し、$\mathrm{Bs}|m_1 mL| \subsetneq \mathrm{Bs}|mL|$ が従う。右辺には C が含まれているが、m_1 を十分大きくとると C は左辺に含まれないように出来るからである。ネーター性より、ある $m' > 0$ が存在し、$|m'L|$ が固定点自由であることがわかる。実際は、十分大きなすべての m に対して $|mL|$ が固定点自由であることが示せる。

ここでは、(X, B) は川又対数的末端対でないと仮定してしまったが、(X, B) が川又対数的末端対のときも少し工夫すれば同様に証明出来る。我々のこの新しいアプローチは、対数的標準対にまで適用できるというメリットがあるだけでなく、川又対数的末端対の場合の証明も簡略化していると思われる。[K 森] や [KMM] と [F6]、[F7] の議論を是非見比べて欲しい。

8　今後の課題

今回の仕事で、[K 森] の 2 章の後半と 3 章が完全に一般化されたことになる。ある意味今回の証明の方が、[K 森] の証明よりも簡単である。道具である消滅定理が [K 森] よりも格段に進歩しているからである。[F7] では、非消滅定理と消滅定理を相対的で対数的標準特異点より悪い特異点を持つ場合まで込めて論じている。したがって、極小モデル理論の基礎の部分は完成したと宣言したい。今後の課題は、[BCHM] を対数的標準化することである。現在のところ、この方面には全くなんの結果もしられていないと思う。

9　勉強の仕方

消滅定理は [F3] がお勧めである。[K 森] の消滅定理の証明と全く同じ書き方で書いてある。次に [F6] を読めば極小モデル理論の基本定理（非消滅定理、固定点自由化定理、有理性定理、錐定理）が簡単に学べる。ある意味 [K 森] の 3 章より簡単である。消滅定理が強力になったので、川又による X-論法（広中の特異点解消定理をつかって係数を揺するという有名なテクニック）は不要になったのである。基本定理の証明の途中では広中の特異点解消定理すら必要としなくなったのである。Ambro 氏の quasi-log varieties の理論に興味がある人には、[F4] をお勧めする。理論の本質的な部分は [F4] で全部理解出来るはずである。技術的な細部まで理解しようとすると、[F5] を読まないと仕方ないであろう。著者の私が言うのもなんだが、[F5] を読むのは大変だと思う。技術的細部に拘りまくったからである。

10　おまけ：個人的な考え

ここでは、80 年代から現在にいたるまで極小モデル理論で重要な位置を占めている X-論法と、最近の新しい議論について個人的な意見を少し書いてみたい。通常の論文などには書かない個人的な印象である。あくまで私の考えである。

X-論法の最もすばらしい点は、その強力さにあると思う。広中の特異点解消定理と係数を揺するという小細工をつかうことにより、様々な結果を川又–Viehweg 消滅定理の応用として示すことが出来るのである。こ

こで用いられる川又–Viehweg 消滅定理は、豊富 $\mathbb{Q}$-因子でその分数部分の台が単純正規交差因子になっているという最も簡単なバージョンの場合が大半である。この程度の川又–Viehweg 消滅定理は、被覆をとるというテクニックで小平の消滅定理から簡単に導くことができる。結局、$\mathbb{Q}$-因子まで許すことにより小細工の幅が格段にひろがり、小平の消滅定理だけでは不可能であった応用にまでたどりつけたのである。X-論法では考えている閉部分集合を因子にまでふくらませ、川又–Viehweg 消滅定理を適用する。この方法の利点は、次元による帰納法が使いやすいという点であろう。ただし、多様体上の非特異な点を調べる際にもその点をわざわざ爆発させて因子にして解析していることになってしまい、無駄な遠回りをしている可能性も十分ありうる。

Nadel の消滅定理をつかう固定点自由性に対するアプローチは、上の不満を少し解消してくれる。閉部分集合を因子にふくらませるのではなく、その定義イデアルをひっかけた形で議論をするのである。この方法の利点は、証明の途中で特異点解消を用いる必要がないので、議論がスッキリする点である。さらに、藤田予想のように精密な評価付きの主張を目指す際には、通常の X-論法のようにすべてを因子にまでふくらませて議論をするのはあまりにも効率が悪い。乗数イデアル層をつかった定式化の方が自然で強力である。ちなみに、川又–Shokurov の固定点自由化定理を Nadel の消滅定理のみで証明出来るのか？という質問に対する答えを私は知らない。高木俊輔氏をはじめとする何人かの人から同じ質問をされた記憶がある。今回の非消滅定理はこの問題に対する私なりの解答でもある。

以下、(X, B) を対数的標準対とする。これに X-論法を単純に適用しようとすると、すぐに困難にぶち当たる。係数を揺するというテクニックが使えないのである。$B = 0$ で X が川又対数的末端でない場合を考えてみればよい。したがって、次元による帰納法を組もうとすると、既約な多様体からはじめても、次のステップは単純正規交差因子を扱わないといけない。乗数イデアル層の理論の方で言うと、non-klt locus を既約にするという小細工が使えないのである。

Ambro 氏は、次元による帰納法をまわすために可約なものまで同列に扱ってあげるという quasi-log varieties の理論を創った。これはある意味王道である。

私の今回とった方法は、non-klt locus を切っていくという乗数イデアル層の理論でおなじみの議論を LC 中心を切っていくという考えに変更し

ただけの単純なものである。LC 中心は定義から明らかなように、既約である。LC 中心を切るということが出来ない場合はどうすべきか？という疑問の解消のために極小 LC 中心に対する消滅定理を準備したのである。これで技術的な困難は解消された。係数を揺すって川又 subadjunction を使うなどというよこしまな考えを持ってはいけない。我々の設定では係数を揺するという方法は全く使えないのである。また、フリップの証明などで使われている拡張定理をご存知の人には明らかだと思われるが、線形系の解析が破綻するのは、その固定点集合が (X,B) の LC 中心を含むときである。したがって、そうならないと主張する私の非消滅定理の定式化が理にかなったものであると納得出来るはずである。

我々極小モデル理論の専門家は今後、「とりあえず係数を揺すってみよう！」という衝動をどこまでおさえられるかが重要かもしれない。先入観の少ない若い人の方が活躍出来るかもしれない。

最後に少しネタをばらしておく。[F1] と [F2] で対数的標準対に対する評価付きの固定点自由性の問題を扱った。これらは川又対数的末端対に対する結果の完全な焼き直しである。数学的には大した結果ではないと思う。[F1] と [F2] は Kollár 氏や Angehrn 氏と Siu 氏の議論の手直しに過ぎない。ただし、[F1] と [F2] での試行錯誤が今回の [F6] につながったので、そういう意味では [F1] と [F2] は私にとっては非常に価値があった。結局のところ、やっぱりいろいろやってみないとダメだな、と改めて思った。以上。

11 訂正

今回の話の内容とは直接的な関係はないが、ここで一つ間違いの訂正をしておきたい。最近たまたま勘違いに気付いたからである。[藤 4, 質問 4] や [藤 1] で [BCHM] では端射線の長さの評価が大切な役割を演じているというような内容を述べたが、それは完全な誤りであった。[BCHM] では定理 3.8.1 で端射線の長さの評価を与えている。しかしよく考えると、定理 3.8.1 は [BCHM] 内で全く不要である。定理 3.8.1 はその次の系 3.8.2 の証明のみで使われている。系 3.8.2 はいつも通りの係数を揺する議論を用いると、B は $\mathbb{Q}$-因子で (X,B) は川又対数的末端対と仮定してよい。すると系 3.8.2 は (X,B) に対する通常の錐定理の一部にすぎない。したがって、[BCHM] の主定理達の証明には端射線の長さの評価が全く不要であることが分かる。定理 3.8.1 は森による正標数への還元テクニックを用い

る証明しか知られていないことを注意しておく。文献をたどって行けばそこに行き着くのである。結局のところ、[BCHM] の結果は正標数還元テクニックと無関係である。著者に確認したところ、定理 3.8.1 はやはり不要であった。著者達もこの部分についてはあまり真剣に考えていなかったようである。[BCHM] の成立した背景を考えると定理 3.8.1 が存在する理由は専門家には分かるのであるが、定理 3.8.1 が不要であることを約 3 年間誰も指摘しなかったのは不思議である。最終的に著者達がこの部分をどのように扱うのかは私は知らない。というわけで、[藤 1] や [藤 4] で [BCHM] では端射線の長さの評価が大切であると主張していた私の発言はここで撤回しておく。ちなみに [BCHM] の著者達は定理 3.8.1 が大切だとは一度も主張していなかったと思う。むしろ、解析的な手法を好む人達からの「[BCHM] は正標数還元テクニックまで必要とする厄介な証明だ」という批判的意見を避けるために定理 3.8.1 の部分にはあまり言及していなかったような気がする。韓国出張中に突然気付いた勘違いの訂正である。

謝辞. JSPS から科学研究補助金、若手研究 (A)20684001 を受けている。稲盛財団からも研究費の補助を受けている。また、研究集会の世話役の先生方にも感謝する。

参考文献

[A] F. Ambro, Quasi-log varieties, Tr. Mat. Inst. Steklova **240** (2003), Biratsion. Geom. Linein. Sist. Konechno Porozhdennye Algebry, 220–239; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2003, no. 1 (240), 214–233.

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, J. McKernan, Existence of minimal models for varieties of log general type, arXiv:math/0610203v2, to appear in J. Amer. Math. Soc.

[藤 1] 藤野　修, 極小モデル理論の新展開, 雑誌「数学」61 巻 2 号, 162–186 (2009).

[藤 2] 藤野　修, Kodaira vanishing theorem for log canonical varieties（対数的標準特異点をもった多様体に対する小平の消滅定理）,

Hodge理論、退化、特異点の代数幾何とトポロジー研究集会（第4回）報告集 (2008).

[藤 3] 藤野　修, On injectivity, vanishing, and torsion-free theorems（単射性、消滅、捻れ不在定理について）, 数理解析研究所講究録, no. 1613, 6–25 (2008).

[藤 4] 藤野　修, Recent developments in the log minimal model program II（対数的極小モデル理論の最近の発展について II）, 第52回代数学シンポジウム報告集, 141–153 (2007).

[F1] O. Fujino, Effective base point free theorem for log canonical pairs—Kollár type theorem, preprint (2007), to appear in Tohoku Math. J.

[F2] O. Fujino, Effective base point free theorem for log canonical pairs II—Angehrn–Siu type theorems—, to appear in Michigan Math. J.

[F3] O. Fujino, On injectivity, vanishing and torsion-free theorems for algebraic varieties, to appear in Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.

[F4] O. Fujino, Introduction to the theory of quasi-log varieties, preprint (2009).

[F5] O. Fujino, Introduction to the log minimal model program for log canonical pairs, preprint (2009).

[F6] O. Fujino, Non-vanishing theorem for log canonical pairs, preprint (2009).

[F7] O. Fujino, Fundamental theorems for the log minimal model program, preprint (2009).

[KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda, and K. Matsuki, Introduction to the Minimal Model Problem, in *Algebraic Geometry, Sendai 1985,* Advanced Studies in Pure Math. **10**, (1987) Kinokuniya and North-Holland, 283–360.

[K 森] J. Kollár, 森重文, 双有理幾何学, 岩波書店, 1998.

[S] V. V. Shokurov, The nonvanishing theorem, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **49** (1985), no. 3, 635–651.