

# ON KOLLÁR'S INJECTIVITY THEOREM

## コラールの単射性定理について

藤野 修 (OSAMU FUJINO)

ABSTRACT. In this short note, we will explain Kodaira's vanishing theorem and Enoki's injectivity theorem, which is a generalization of Kollár's injectivity theorem for compact Kähler manifolds. Our main ingredient is the theory of harmonic forms on compact Kähler manifolds. It seems to be much more powerful than we expected.

### CONTENTS

1. はじめに	1
2. 小平の消滅定理	2
3. 榎の単射性定理	3
4. 証明のスケッチ	5
5. その後の発展	8
References	9

### 1. はじめに

講演では解析的な乗数イデアル層のことやコラールの単射性定理の一般化の証明なども話したが、この報告書では小平の消滅定理と榎の単射性定理に話をしほりたい。何事も基礎が大切なのである。内容的にはかなり古典的で、ちゃんと勉強すると全然難しくない話だと思う。おそらく少し年配の代数幾何学者には常識だったと思われる。しかし、若い世代の代数幾何学者はあまりこの方面を勉強する機会がないと思う。消滅定理やコホモロジー論は研究対象と言うよりは、研究のための道具であると教育されているように思う<sup>1</sup>。2章では小平の消滅定理について語ってみる。いろいろな意見があると思うが、小平の消滅定

---

<sup>1</sup>私自身のことを思い出してみると、消滅定理と特異点解消定理はとりあえず認めて、高次元代数多様体の双有理幾何学の勉強を始めた。セミナーで消滅定理や特異点解消について語った覚えはない。ただ、個人的に消滅定理は好きだったので、様々な証明をこっそりと勉強した覚えがある。特異点解消については、ちょうど私が学生のころに弱広中定理ができたので、これについては読んだ覚えがある。応用上は弱広中で十分なことも多いと思う。数理研にはカワノーエ計画で有名な川ノ上さんがいたので、彼に触発されて、当時最新だった様々な特異点解消のアルゴリズムを勉強した

理がすべての出発点である。ここでは小平の消滅定理へのさまざまなアプローチを概観するだけで、証明は4章の最後で与える。3章はこの報告書の中心である。ここで複の単射性定理について説明する。複の単射性定理は、コラールの単射性定理のコンパクトケーラー多様体版である。こう言ってしまえばそれまでなのだが、複の定理のすばらしさはその証明方法にあると思う。複の証明によって、コラールの単射性定理と小平の消滅定理との関係がよく分かるようになっただけでなく、ポホナトリックが消滅定理だけでなく単射性定理の証明にも有効であることが明らかになったのである。次の4章で複の単射性定理の証明を与える。もちろん調和積分論の一般論などは認めて、証明の本質的部分のみを説明する。これだけあれば、興味のある読者が証明を完成させるには十分だと思う。最後の5章はその後の発展についてのコメントである。

## 2. 小平の消滅定理

とりあえず有名な小平の消滅定理から始めよう。

**定理 2.1 (小平の消滅定理).**  $X$  をコンパクトなケーラー - 多様体とし、 $L$  を正な正則直線束とする。このとき、 $H^q(X, K_X \otimes L) = 0$  が任意の  $q \geq 1$  に対して成立する。もちろん  $K_X$  は  $X$  の標準直線束である。

直線束に対する曲率条件を復習しておこう。

**定義 2.2.**  $X$  を複素多様体とし、 $L$  をその上の正則直線束とする。 $L$  が正 (もしくは半正) とは、 $L$  上に滑らかなエルミート計量  $h_L$  が存在し、 $\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log h_L$  が  $X$  上の正定値 (もしくは半正定値) な  $(1, 1)$ -形式となることである。

コンパクトケーラー - 多様体  $X$  上に正な正則直線束  $L$  があると、 $X$  は射影空間に埋め込めることができ (小平の埋め込み定理)、 $L$  は豊富な直線束になる。ここでセールの GAGA の原理を使うと、通常の数幾何学の話になる。したがって、小平の消滅定理は非特異複素射影的代数多様体とその上の豊富直線束について述べられることも多い。よって、代数幾何にしか興味のない人は、無理にケーラー多様体上で頑張る必要はないと思う。ただし、小平の埋め込み定理の証明には小平の消滅定理が使われていることに注意しておく。小平の消滅定理の証明は後回しにして、現在知られている小平の消滅定理への様々なアプローチを概観してみよう。もちろん私の理解している範囲内である<sup>2</sup>。先に注意しておく、モース理論とホッジ理論によるアプローチは非特異複素射影的代数多様体とその上の豊富直線束に対してしか適用出来ない。

覚えもある。まあ、結論から言うと、特異点解消と消滅定理はユーザーに徹しても特に困らないであろう。

<sup>2</sup>もちろん他のアプローチもあると思うし、以下で述べる方法を組み合わせて使うことも多いと思う。

おそらくコンパクトケーラ - 多様体とその上の正な正則直線束に対する本来の小平の消滅定理に対しては、調和積分論を使った元々の証明しかないと思われる。

2.3 (調和積分論). これが小平の最初の証明で、やはり王道の一つだと思う。しかし、残念ながら代数幾何学者には嫌われているような気がする。複素幾何の本を見てみると、テンソル計算が延々と書いてあって、それだけで挫けてしまう。よくよく考えてみると、外積代数と部分積分程度しか使っていないことが分かるのだが、見た目では拒否反応をおこす人が多いと思う。ボホナートリックのキーポイントは、曲がった世界では微分の順序交換をするとズレとして曲率が現れるという点である。また、楕円型偏微分方程式の一般論をやりたくなくて避けてしまうことも多いのであろう。個人的には、関数解析の講義で習った自己随伴コンパクト作用素の話に遭遇して、「おお！こんなところで使うのか！」と感動した思い出がある。大昔の話である。現在は一番お気に入りのテクニクである。小平の消滅定理のためだけに調和積分の一般論を学ぶのは面倒だという意見は、榎の単射性定理の証明をみると捨て去らなくてはいけなくなるであろう。

2.4 (モース理論). 学部でモース理論を習ったときは、「モース関数  $f$  を  $-f$  で取りかえることでポアンカレ双対ができる」という点に感動した程度で、まさか代数幾何で役立つとは思わなかった。モース理論を使った小平の消滅定理の証明は、他の方法に比べて、おそらく一番簡単であろう。超平面切断因子の補集合がアフィンで、アフィン多様体のトポロジカルな性質を使ってレフシェッツの超平面切断定理を示すのである。若い頃は一番お気に入りの証明方法であった。ただ、一番マイナーな方法のような気がする。この証明方法では整数係数のコホモロジー群などについての情報も得られるので、なかなか有効な方法だと思うのだが、小平の消滅定理（や秋月 - 中野の消滅定理）以外の消滅定理や、単射性定理に役立つのかどうかは私は知らない。

2.5 (ホッジ理論). これが一番代数幾何学者が好む方法であろう。実際、この方面のテクニクはコラールやエノー - フィーベックの本でかなり詳しく解説されているし、これらの本が引用されることも多い。このテクニクの利点の一つは、正標数に還元して、ホッジ - ドラームスペクトル系列の退化を示すことにより、純代数的に小平の消滅定理などを示すことができる点である。私自身この方面で一般化を示したこともある。この方向は小平の消滅定理そのものと言うよりは、コホモロジー群の間の単射性を証明して、セールスの消滅定理と組み合わせると小平の消滅定理を導き出していると言う方がいいかもしれない。

この辺で小平の消滅定理から榎の単射性定理に向かおう。

### 3. 榎の単射性定理

榎の単射性定理などという言葉は耳にしたことがないと思う。私自身も聞いたことがない。有名なのは次に述べるコラールの単射性定理である。

定理 3.1 (Kollár).  $X$  を非特異複素射影的代数多様体とし、 $L$  を半豊富な直線束 (つまり、ある正の整数  $m$  が存在し、 $L^m$  が大域切断で生成されている) とする。  $k$  を正の整数とし、  $0 \neq s \in \Gamma(X, L^k)$  とする。このとき、  $\otimes_s$  から導かれるコホモロジー群の間の射

$$\times_s : H^q(X, L^l) \rightarrow H^q(X, L^{l+k})$$

はすべての  $q \geq 0$ 、  $l \geq 1$  に対して単射である。

コラールはタンケーエフの定理の一般化として上の定理を示したのである。ただし、タンケーエフの定理との差はかなり大きいので、コラールの単射性定理といって問題ないと思う。もし直線束が正であることと豊富であることの同値をすでに認めているのなら、コラールの単射性定理とセールの消滅定理を使うと、小平の消滅定理が復元できる。したがって、非特異複素射影的代数多様体に関して言えば、コラールの単射性定理は小平の消滅定理の一般化とも言える。榎の定理はコラールの定理のコンパクトケーラー多様体版である<sup>3</sup>。直線束についての条件もコラールの定理とは異なり、計量に関する条件になっている。当然のことながら榎の定理はコラールの定理を含んでいる。

定理 3.2 (Enoki).  $X$  をコンパクトケーラー多様体とする。  $L$  を半正な正則直線束とする。  $k$  を正の整数とし、  $0 \neq s \in \Gamma(X, L^k)$  とする。このとき、  $\otimes_s$  から導かれるコホモロジー群の間の射

$$\times_s : H^q(X, L^l) \rightarrow H^q(X, L^{l+k})$$

はすべての  $q \geq 0$ 、  $l \geq 1$  に対して単射である。

定理の証明に入る前に幾つかの事実を述べておく。

事実 3.3.  $L$  が半豊富なら  $L$  は半正である。  $L$  が半正なら  $L$  は数値的正である。

最初の実事は簡単である。半豊富なら、定義により、何倍かすると射影空間上の超平面バンドルの引き戻しになっている。したがって、フビニ - スタディ計量の引き戻しから目的の計量を作ることが出来る。半正から数値的正が出るのは定義から明らかである。数値的正という条

<sup>3</sup>これらの事実を考えに入れて、タイトルは「コラールの単射性定理について」とした。少し先走ってしまうが、コホモロジー群を調和形式の空間であらわすという古典的結果と中野の公式を組み合わせると、小平の (もっというと、秋月 - 中野の) 消滅定理も榎の単射性定理も簡単に示せるという点を強調したい。このような観点からみると、コラールの単射性定理の代数幾何学的証明はトリッキーな印象を受ける。

件を考える時は多様体  $X$  を代数多様体としておく方が良いかもしれない。ただ、ここでは数値的正なる条件は使わないので、これ以上は詳しく述べない。注意しなくてはいけないのは、半豊富、半正、数値的正は、非特異射影的代数多様体上でも全て異なる概念である。この微妙な差が幾つかの問題ではシリアスになってくる。小平の消滅定理のところで述べた以下の事実もここに書いておく。

事実 3.4.  $L$  が豊富であることと正であることは同値である。

$L$  が正のとき豊富であるという事実は、小平の埋め込み定理から従う大結果と思う。逆向きはほぼ明らかである。

3.5 (半豊富、半正、数値的正). もう少しこれらの概念について考えてみる。 $X$  を非特異複素射影的代数多様体とし、 $X$  上の直線束を考えることにする。半正であるが半豊富でない直線束の存在はすぐに分かる。 $\text{Pic}^0(X)$  の元でねじれ元でないものを取ってくればよい。問題は、数値的正であるが半正でない直線束の存在である。これはかなり難しい問題であった。数値的正なら半正ではないか？というのが80年代の藤田の問題であった。今現在はこのような直線束の存在はよく知られている。文献の中に書いてあるのを見たことはないが、榎の定理を使うのがもっとも簡単だと思う。数値的正な直線束  $L$  で榎の定理が成立しない例は比較的簡単につくることができる。榎の定理は、考えている直線束が半正でないということを示すのに使えるのである。

#### 4. 証明のスケッチ

ここで榎の定理の証明を解説したい。基本的道具は小平の消滅定理と全く同じである。

4.1.  $X$  を  $n$  次元コンパクト複素多様体とし、 $M$  を  $X$  上の正則直線束とする。

4.2 (接続、曲率).  $D_M$  を  $M$  のチャーン接続とする。つまり  $D_M$  は  $M$  の計量  $h_M$  と両立し、 $D_M$  を  $D'_M + D''_M$  のように  $(1, 0)$  部分と  $(0, 1)$  部分に分解すると  $D''_M = \bar{\partial}$  となっている接続とする。これは計量  $h_M$  を固定するとただ一つ決まる標準的な接続である。 $D_M^2$  を  $\Theta(M)$  と書いて  $M$  の曲率という。今の場合、 $\Theta(M)$  は  $X$  上の  $(1, 1)$ -形式  $\bar{\partial}\partial \log h_M$  である。

4.3 (内積).  $\psi, \varphi$  を  $M$  に値をとる  $X$  上の滑らかな  $(p, q)$ -形式とする。 $M$  上の滑らかなエルミート計量  $h_M$  と  $X$  上のエルミート計量  $g$  から  $\psi$  と  $\varphi$  の点ごとの内積  $\langle \psi, \varphi \rangle$  が決まる。 $\langle \psi, \psi \rangle$  は  $|\psi|^2$  と略記することにする。 $X$  の体積要素を  $dV$  と書いて、 $\int_X |\psi|^2 dV = \|\psi\|^2$  と書くことにする。内積を導入した後、この内積による完備化をとって二乗可積分な世界に行き、そこで関数解析を使って、というのが調和積分論の王道である。ここではそんなことは必要ないので、この程度で満足しよう。

4.4 (調和形式). 小平の消滅定理と複の定理の証明で本質的役割を果たす調和形式を導入しておこう。

定義 4.5.  $\varphi$  を  $M$  に値をとる  $X$  上の滑らかな  $(p, q)$ -形式とする。  $\Delta''_M \varphi = 0$  となるとき、  $\varphi$  を調和形式と言う。

ここで、  $\Delta''_M = D''_M D''^*_M + D''^*_M D''_M$  で、  $D''^*_M$  は  $D''_M$  の随伴作用素である。部分積分をつかうと次の事実が簡単にわかる。

事実 4.6.  $\Delta''_M \varphi = 0$  と  $\bar{\partial}\varphi = 0$  かつ  $D''^*_M \varphi = 0$  は同値である。

次に、  $\mathcal{H}^{n,q}(X, M)$  を  $M$  に値をとる  $X$  上の調和  $(n, q)$ -形式のなす複素ベクトル空間とする。ただし、  $M$  は  $X$  上の正則直線束とする。このとき、次の基本的な定理が成立する。

定理 4.7 (小平).  $\mathcal{H}^{n,q}(X, M)$  は有限次元複素ベクトル空間であって、さらに同型  $H^q(X, K_X \otimes M) \simeq \mathcal{H}^{n,q}(X, M)$  が成立する。

証明は複素幾何の本に載っている。証明自体はそれほど難しくない。複素多様体上で偏微分方程式論を少し展開するだけである。偏微分方程式といっても、この場合は一番扱いやすい2階の楕円型方程式である。とは言うものの、上の定理の証明のためだけに代数幾何の専門家が複素多様体論をいちいち証明までこめて勉強するのは非常に面倒である。大半の代数幾何学者はこの定理を認めて、証明の細部までは立ち入っていないと思われる。実際のところ、それで不自由を感じることもないであろう。

4.8 (中野の公式).  $X$  をケーラー多様体とし、  $\varphi$  を  $M$  に値をとる滑らかな  $(n, q)$ -形式とする。このとき次が成立する。

$$(1) \quad \Delta''_M \varphi = \Delta'_M \varphi + \sqrt{-1} \Theta(M) \wedge \varphi$$

ここで、  $\Delta''_M = D''_M D''^*_M + D''^*_M D''_M$  で、  $\Delta'_M = D'_M D'^*_M + D'^*_M D'_M$  である。  $D'^*_M$  は  $D'_M$  の、  $D''^*_M$  は  $D''_M$  の随伴作用素で、  $\Lambda$  は  $\omega \wedge \bullet$  の随伴である。微分形式の世界に  $h_M$  とケーラー計量  $g$  で自然な内積をいれて考えている。  $\omega$  は  $g$  に対応するケーラー形式である。

4.9. ここでは中野の公式を特殊な設定で書いた。通常の教科書に載っている形とは少し違うと思う。いずれにせよ、この中野の公式を証明するところが一番面倒である。証明は難しくないのだが、とにかく面倒なのである。本の書き方にもよるのだが、テンソル計算(なんだか添字がいっぱいついた微分形式の計算)を長々としなくてはいけない。と、私は思っていたし、大半の人が思っていると思う。ところが、よくよく考えてみると、そんなことはしなくても証明できることが分かる。いろいろなアプローチがあると思うが、一つの簡単なアプローチは、ケーラー計量は2次以上の部分を無視すればユークリッド空間の通常の計量と同じと思って良い、という事実を使うのである。この方

法だと簡単な部分積分を少し準備しておけば、中野の公式を証明することはそれほど難しくない。まあ、この辺は自分で勉強して、自分にあった計算方法を身に付けるしかないであろう。人の説明を読むより、実験してルールを身に付ける方が確実である。

4.10 (アイデア).  $\otimes s$  がコホモロジー群  $H^q(X, K_X \otimes L^l)$  と  $H^q(X, K_X \otimes L^{l+k})$  のあいだの射を導くだけでなく、調和形式の空間の間の射  $\times s : \mathcal{H}^{n,q}(X, L^l) \rightarrow \mathcal{H}^{n,q}(X, L^{l+k})$  を導くことを示す。これが示せば単射性は明らかである。コホモロジー類を扱うのではなく、調和形式という微分形式のかけ算の話にしてしまうのである。 $\varphi \in \mathcal{H}^{n,q}(X, L^l)$  とする。 $s\varphi := s \otimes \varphi$  は  $L^{l+k}$  に値をもつ滑らかな  $(n, q)$ -形式である。これを調和形式の空間  $\mathcal{H}^{n,q}(X, L^{l+k})$  に直交射影した  $P(s\varphi)$  を考える。一般には  $P(s\varphi) \neq s\varphi$  である。よって、我々が証明するのは、 $L$  が半正なら  $P(s\varphi) = s\varphi$  ということである。一応注意しておく、 $\sqrt{-1}\bar{\partial}\partial \log h_L$  が半正定値になる  $L$  上の滑らかなエルミート計量を1つ固定し、 $L^m$  には計量  $h_L^m$  を入れて考えている。ただし、 $m$  は任意の正の整数である。 $X$  上には任意のケーラー計量  $g$  を1つ固定していることにも注意せよ。

ここまでくれば榎の定理の証明は簡単である。

*Proof.*  $\varphi \in \mathcal{H}^{n,q}(X, L^l)$  とする。示すべきことは  $s\varphi$  が調和形式であるということである。つまり、 $\Delta_{L^{l+k}}''(s\varphi) = 0$  を示せばよい。これは  $\bar{\partial}(s\varphi) = 0$  かつ  $D_{L^{l+k}}''^*(s\varphi) = 0$  と同値である。したがってこれらの条件を示せばよい。最初の条件は、 $s$  が正則切断で  $\varphi$  が調和形式なので、鎖法則を使うと明らかである。問題は後のほうの条件である。まず、 $\varphi$  が調和形式なので、

$$0 = \|\bar{\partial}\varphi\|^2 + \|D_{L^l}''^*\varphi\|^2 = \|D_{L^l}'\varphi\|^2 + \|D_{L^l}''^*\varphi\|^2 + \int_X \langle \sqrt{-1}\Theta(L^l)\Lambda\varphi, \varphi \rangle dV$$

である。もうすこし詳しく書くと、式(1)と  $\varphi$  の内積を  $X$  上で積分し、適当に部分積分をつかって式を整理すると、上の式が出てくる。 $D_{L^l}'\varphi$  は  $(n+1, q)$ -形式なので明らかに0である。また、 $L$  が半正なので、 $\langle \sqrt{-1}\Theta(L^l)\Lambda\varphi, \varphi \rangle \geq 0$  が  $X$  の任意の点で成立する。ゆえに、 $D_{L^l}''^*\varphi = 0$  かつ  $\langle \sqrt{-1}\Theta(L^l)\Lambda\varphi, \varphi \rangle = 0$  である。上と同様に中野の公式を  $s\varphi$  につかうと、

$$\|D_{L^{l+k}}''^*(s\varphi)\|^2 = \|D_{L^{l+k}}''^*(s\varphi)\|^2 + \int_X \langle \sqrt{-1}\Theta(L^{l+k})\Lambda(s\varphi), s\varphi \rangle dV$$

である。ここでも  $D_{L^{l+k}}''^*(s\varphi) = 0$  をつかった。定義に戻って考えると、 $D_{L^{l+k}}''^*(s\varphi) = sD_{L^l}''^*\varphi = 0$  である。そもそも、 $D''^*$  は直線束の計量に依存

しないことにも注意しておく<sup>4</sup>。よって

$$\|D''_{L^{l+k}}(s\varphi)\|^2 = \int_X \langle \sqrt{-1}\Theta(L^{l+k})\Lambda(s\varphi), s\varphi \rangle dV$$

が成立する。ここで、

$$\langle \sqrt{-1}\Theta(L^{l+k})\Lambda(s\varphi), s\varphi \rangle = |s|^2 \langle \sqrt{-1}\Theta(L^{l+k})\Lambda\varphi, \varphi \rangle = 0$$

である。もちろん  $|s|$  は  $h_L^k$  による  $s$  の点ごとのノルムである。 $\Theta(L^m) = m\Theta(L)$  が任意の正の整数に対して成り立つことも注意しておく。全部あわせると、 $D''_{L^{l+k}}(s\varphi) = 0$  を得る。ゆえに  $s\varphi$  は調和形式である。これで複の単射性定理の証明が終了した。□

最後に小平の消滅定理の証明についてすこし説明しておこう。

4.11 (小平の消滅定理について).  $L$  が正なので、 $\sqrt{-1}\Theta(L)$  をケーラー形式  $\omega$  とするようなケーラー計量  $g$  を使って同じ議論をする。 $\varphi \in \mathcal{H}^{n,q}(X, L)$  をとってくる。このとき、 $\langle \sqrt{-1}\Theta(L)\Lambda\varphi, \varphi \rangle = q|\varphi|^2$  に注意して中野の公式をつかうと、

$$0 = \|\bar{\partial}\varphi\|^2 + \|D''_L\varphi\|^2 = \|D'_L\varphi\|^2 + \|D''_L\varphi\|^2 + q \int_X |\varphi|^2 dV$$

である。これから、 $q \geq 1$  のとき、 $\varphi = 0$  である。ゆえに  $H^q(X, K_X \otimes L) = 0$  ( $q \geq 1$ ) が従う。これが小平の消滅定理の由緒正しい証明であると思う。

## 5. その後の発展

複の単射性定理は、理由はよく分からないが、代数幾何学者の中では全く知られていない。文献としては [E] である。竹腰によるコラールと複の定理の一般化はたまに引用されることがある。竹腰の仕事では、コホモロジー群を調和形式の空間で表現するという点を究極的に追い求め、その副産物として様々な結果を出している。ここまで来ると代数幾何と言うよりは複素幾何である。その後、大沢によって単射性定理の部分が見直された。ただし、戦いの場は非コンパクトな多様体に移っているので、その部分のテクニカルな議論に目を奪われて、本質を見抜くのは大変である。で、最後にすこし宣伝しておく、もうすこし幾何学的な応用を目指して定式化したらどうなるのだ? と思って追求すると、講演で話したような定理が証明できる。

定理 5.1.  $f: X \rightarrow Y$  をケーラー多様体  $X$  から複素解析空間  $Y$  への固有全射とする。 $E$  を  $X$  上の正則ベクトル束、 $h_E$  は  $E$  上の滑らかなエルミート計量、 $L$  は  $X$  上の正則直線束で、 $h_L$  は  $L$  上の滑らかなエルミート計量とする。さらに、 $F$  も  $X$  上の正則直線束とし、 $h_F$  は  $F$  上の特異エルミート計量とする。このとき、以下を仮定する。

<sup>4</sup>ホッジのスター作用素を  $*$  とかくと、 $D'^* = -*\bar{\partial}^*$  である。



- (i)  $X$  の部分解析空間  $Z$  が存在し、 $h_F$  は  $X \setminus Z$  上で滑らかである。
- (ii)  $\sqrt{-1}\Theta(F) \geq -\gamma$  がカレントの意味で成立する。ただし、 $\gamma$  は  $X$  上の滑らかな  $(1, 1)$ -形式である。
- (iii)  $\sqrt{-1}(\Theta(E) + \text{Id}_E \otimes \Theta(F)) \geq_{\text{Nak}} 0$  が  $X \setminus Z$  上で成立する。
- (iv)  $\sqrt{-1}(\Theta(E) + \text{Id}_E \otimes \Theta(F) - \varepsilon \text{Id}_E \otimes \Theta(L)) \geq_{\text{Nak}} 0$  が  $X \setminus Z$  上成立する。ただし、 $\varepsilon$  はある正の実数である。

ここで、 $\geq_{\text{Nak}} 0$  は中野の意味で半正をあらわすこととする。 $s$  を  $L$  の零でない正則切断とすると、 $\otimes_s$  によって引き起こされる層の間の射

$$\times_s : R^q f_*(K_X \otimes E \otimes F \otimes \mathcal{I}(h_F)) \longrightarrow R^q f_*(K_X \otimes E \otimes F \otimes \mathcal{I}(h_F) \otimes L)$$

は任意の  $q \geq 0$  に対して単射である。ただし、 $\mathcal{I}(h_F)$  は特異エルミート計量  $h_F$  に付随する乗数イデアル層である。

詳しくは文献 [F1] と [F2] を見て頂きたい。 $X$  がコンパクトのときは、基本的に榎の定理の証明と同じ証明である。キーポイントは、 $X$  のかわりに  $W = X \setminus Z$  を考える点である。 $W$  はコンパクトではないが、適当に良い計量を選んで完備ケーラー多様体にし、あたかもコンパクトであるかのように議論する。 $W$  上では考えている計量は全て滑らかなので、通常の議論が行える。 $X$  が非コンパクトなときは、証明はかなり大変である。局所的に二乗可積分と大域的に二乗可積分という条件にズレが生じるので、 $X$  の境界付近での  $L^2$  ノルムの挙動を制御する必要がある。

最近の代数幾何学では、非特異代数多様体  $X$  とその上の有効  $\mathbb{Q}$ -因子  $D$  の組  $(X, D)$  を考えることが多い。従来の方法では、特異点解消と分岐被覆をつかって  $D$  の「特異性」を無視する。今回の方法では、 $X$  のかわりに  $X \setminus D$  を考える。 $X \setminus D$  上では  $D$  の「特異性」は邪魔をしない。 $D$  の「特異性」は  $X \setminus D$  上での二乗可積分条件として寄与する。印象としてはこんな感じであろうか？

謝辞. JSPS から科学研究補助金、若手研究 (A)17684001 を受けている。住友財団からも研究費の補助を受けている。感謝する。

## REFERENCES

- [E] I. Enoki, Kawamata-Viehweg vanishing theorem for compact Kähler manifolds, *Einstein metrics and Yang-Mills connections* (Sanda, 1990), 59–68, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 145, Dekker, New York, 1993.
- [F1] O. Fujino, A transcendental approach to Kollár’s injectivity theorem, preprint 2005.
- [F2] O. Fujino, A transcendental approach to Kollár’s injectivity theorem II, preprint 2006.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY, CHIKUSA-KU  
NAGOYA 464-8602 JAPAN  
*E-mail address:* `fujino@math.nagoya-u.ac.jp`