ON ALGEBRAIC FIBER SPACES
代数的ファイバー空間について

藤野 修

1. はじめに

今回の話は代数的ファイバー空間についてである. もう少し詳しく述べると, 高次元代数多様体の古典的な双有理分類理論についてのちょっとした試みについてである. ここで, 「古典的」とは「極小モデル理論以前」という意味である. 以下すべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上の話とする. 扱う多様体はすべてコンパクトとする.

まず 2 章では, 高次元代数多様体の双有理分類理論の古典的な部分をざっと復習する. 内容の偏り, 引用の偏りがあるように思われるが, 勘弁して頂きたい. 歴史を網羅する事は目的ではない.

次の 3 章ではアルバネーゼ次元とアルバネーゼファイバー次元を考える. これらもさして新しい概念ではない.

4 章ではオリジナルの結果を少し述べる. 定理 4.1 が主定理である. もちろん大結果ではない. 古典的な結果のちょっとした拡張である.

期待せずに読んで頂きたい.

2. 代数的ファイバー空間

高次元代数多様体の双有理幾何を軽く復習する. この章の参考文献としては, 上野先生のバイブル [U] と森先生の専門家向けの解説記事 [M] をあげておく.

まず代数的ファイバー空間 (algebraic fiber space) の定義を思い出す.

定義 2.1 (代数的ファイバー空間)**.** 代数的ファイバー空間 $f : X \longrightarrow Y$ とは, 非特異射影的多様体 X, Y の間の全射で, ファイバーが連結なるものとする.

古典的な代数多様体の双有理分類に欠かせないのが, 次の小平次元である. 飯高先生によって定義された. 同値な定義が幾つかあるが, 今回は以下の定義を採用する.

定義 2.2 (小平次元)**.** 非特異射影的多様体 X を考える. K_X で標準因子を表すことにする. 多重標準射 (pluricanonical map)

$$\Phi_{|mK_X|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$

を考える．ここで $N=\dim H^0(X,mK_X)-1$ である．この時小平次元を以下のように定義する．

$$\kappa(X):=\max_m \dim \Phi_{|mK_X|}(X)$$

ここで m は任意の正の整数とする．ただし，すべての正の整数 m に対して $\dim H^0(X,mK_X)=0$ のときは $\kappa(X)=-\infty$ とおく．

小平次元が双有理不変量であることは簡単にチェックできる．

注意 2.3. 上の定義 2.2 の中でも既にかなりルーズな書き方をしてしまったが，今回の話は双有理不変量を扱うだけなので，有理写像の不確定点除去，特異点解消などは必要に応じて断りなしに使う．双有理射で取り替えた後の多様体を元の多様体と同じ記号で書くのもこの分野のお決まりである．記号の節約のためである．

次が小平次元に関する最も基本的な予想である．予想されてから約 30 年の歳月が過ぎたがまだ解決されていない．

予想 2.4 (飯高予想 $C_{n,m}$)**.** $f:X\longrightarrow Y$ を代数的ファイバー空間とする．この時以下の不等式 $(C_{n,m})$ が成立するだろうか？

$$\kappa(X)\geq\kappa(Y)+\kappa(X_{\bar\eta})$$

ここで $X_{\bar\eta}$ は f の幾何学的生成ファイバーである．添字は $n=\dim X$, $m=\dim Y$ である．

注意 2.5. F を f の十分一般のファイバーとすると，$\kappa(F)=\kappa(X_{\bar\eta})$ である．

X が曲面の時は分類結果をつかうと不等式の成立が直接確認できる．逆にこの不等式を用いて曲面の分類をすることも可能である．曲面以外の時はちょっと簡単にはチェックできない予想である．しかし，この予想はほぼ間違いなく成立すると思われる．以下の説明を読んで頂くと賛同して頂けると思われる．

次に $\mathrm{Var}(f)$ を定義しておく．これは大雑把にいうとモジュライの次元である．双有理の意味でのモジュライの次元である．

定義 2.6 ($\mathrm{Var}(f)$)**.** 代数的ファイバー空間 $f:X\longrightarrow Y$ を考える．代数的ファイバー空間 $f':X'\longrightarrow Y'$ で generically finite 射 $\pi:\overline{Y}\longrightarrow Y$ と全射 $\rho:\overline{Y}\longrightarrow Y'$ で底変換すると下記の図のように可換になるものを考える．もちろん，ここで言う可換，底変換はすべて双有理の意味である．

$$\begin{array}{ccccc}
X & \longleftarrow & \overline{X} & \longrightarrow & X' \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \bar f} & & \big\downarrow{\scriptstyle f'} \\
Y & \underset{\pi}{\longleftarrow} & \overline{Y} & \underset{\rho}{\longrightarrow} & Y'.
\end{array}$$

このとき, 代数的ファイバー空間のヴァリエイションVarを以下で定義する.

$$\mathrm{Var}(f) := \min_{f'} \dim Y'$$

もちろん$0 \leq \mathrm{Var}(f) \leq \dim Y$である.

予想 2.7 ($C^+_{n,m}$)**.** 代数的ファイバー空間$f : X \longrightarrow Y$を考える. もちろん$n = \dim X$, $m = \dim Y$である. ここで$\kappa(Y) \geq 0$と仮定する. この時, 以下の不等式($C^+_{n,m}$)が成立するだろうか？

$$\kappa(X) \geq \kappa(X_{\bar{\eta}}) + \max\{\kappa(Y), \mathrm{Var}(f)\}$$

これはViehweg氏の予想である. もちろん$C_{n,m}$よりシャープな予想である. もうひとつViehweg氏の予想を述べておこう.

予想 2.8 ($Q_{n,m}$)**.** 前予想と同様に代数的ファイバー空間$f : X \longrightarrow Y$を考える. $\mathrm{Var}(f) = \dim Y$を仮定する. この時ある正の整数kに対して$f_* \omega^k_{X/Y}$は*big sheaf*になるか？

予想のなかで用いたbig sheafの定義は省略する. 非常に大雑把にいうと, $\det f_* \omega^k_{X/Y}$がglobal sectionsを沢山持つ, ということである. かなり雑な説明であるが, 気持ちは分かって頂けると思う.

2.9. 上記予想の関係を考えてみる. 3つの予想の間には以下の強弱関係がある.

$$Q_{n,m} \Longrightarrow C^+_{n,m} \Longrightarrow C_{n,m}$$

$C^+_{n,m}$と$C_{n,m}$の関係は明らかである. $Q_{n,m}$と$C^+_{n,m}$の関係は一見すると良く分からないが, それほど難しくない. big sheafを定義しなかったのでこれ以上の説明は無意味だが, $Q_{n,m}$から$C^+_{n,m}$の証明はこの分野のオーソドックスな議論である. そもそも$C^+_{n,m}$の証明のために$Q_{n,m}$が考え出されたという歴史を思い出すと, $Q_{n,m} \Longrightarrow C^+_{n,m}$は自然である.

それでは$Q_{n,m}$を如何にして解くか？これが問題である. これにはある意味完璧な答えが既に知られてる. まずgood minimal modelなる概念を導入する.

定義 2.10 (Good minimal model)**.** 代数多様体Xを考える. Xと双有理な多様体X'がXのgood minimal modelであるとは, X'はマイルドな特異点(例えば標準特異点(canonical singularities)) しかもたず, 標準因子$K_{X'}$が半豊富(semi-ample)な時をいう.

以下の事が予想されている.

予想 2.11 (極小モデル)**.** $\kappa(X) \geq 0$の仮定のもとでXは常にgood minimal modelを持つ.

極小モデルはとりあえず置いておいて, $C_{n,m}$に戻ろう. つぎの結果が川又先生によって得られている.

定理 2.12. 幾何学的生成ファイバー $X_{\bar{\eta}}$ が good minimal model を持つとき, $Q_{n,m}$ が成立. したがって, $C^+_{n,m}$, $C_{n,m}$ も成立する.

結局のところ good minimal model の存在にすべてが帰着されたのである. この結果のおかげ (せい？) で $C_{n,m}$ 研究が終わってしまったのである. 大体これが 80 年代半ばの結果である.

Good minimal model と関係なく成立する定理としては以下の Kollár 氏の結果がある. これは一般型 (general type) 多様体のモジュライ問題と関連して面白い. 後に Viehweg 氏が簡単な別証明を与えた.

定理 2.13. 代数的ファイバー空間 $f : X \longrightarrow Y$ を考える. 幾何学的生成ファイバー $X_{\bar{\eta}}$ が一般型（つまり, $\kappa(X_{\bar{\eta}}) = \dim X_{\bar{\eta}}$）のとき $Q_{n,m}$ が成立. したがって, $C^+_{n,m}$, $C_{n,m}$ も成立する.

この結果が証明されたのが 85 年過ぎである. その後 $C_{n,m}$ 関連の結果はほとんど (全く？) ないと思われる.

2.14. 一応念のために次の定理を述べておく. 上野先生の結果である. 今回の主定理の証明の中でも本質的な役割を果たす結果である. 色々な証明が知られているが, 上記定理 (定理 2.12) からも従う. [F2] でアーベリアンファイブレーションについての標準因子公式 (canonical bundle formula) を構成したので K_X と K_Y の差をモジュライからの寄与, 特異ファイバーからの寄与で完全に書き下すことが出来ている. [F2] 内の標準因子公式はアーベリアンファイブレーションについては $Q_{n,m}$ よりももっと強いことを主張している. [ふ 2] も参照して頂きたい.

定理 2.15. 代数的ファイバー空間 $f : X \longrightarrow Y$ を考える. 幾何学的生成ファイバー $X_{\bar{\eta}}$ がアーベル多様体と双有理同値の時, $Q_{n,m}$ が成立. 特に, $\kappa(Y) \geq 0$ なら

$$\kappa(X) \geq \max\{\kappa(Y), \mathrm{Var}(f)\}$$

が成立.

2.16. それでは極小モデルの存在はどうやって証明するのだろうか？以下の 3 つの予想が大切である. 極小モデル理論については最近では様々な教科書が出版されているので, あまり細かいことは述べないことにする. 興味のある方は各自勉強して頂きたい. かなり大雑把に述べる.

予想 2.17 ((ログ) フリップ予想 I)**.** (ログ) フリップは必ず存在する.

予想 2.18 ((ログ) フリップ予想 II)**.** (ログ) フリップの無限列は存在しない.

予想 2.19 ((ログ) アバンダンス予想)**.** 標準因子 K_X(もしくは対数的標準因子 $K_X + \Delta$) がネフ (数値的正) なら半豊富である.

これら 3 予想が解けると good minimal model の存在が証明できたことになる．いわゆる極小モデルプログラムである．良く知られているように, 3 次元以下で上記 3 予想は証明されている．80 年代から 90 年代にかけて多くの数学者の努力のもとで証明された．したがって以下が成立.

定理 2.20. 3 次元以下で $\kappa \geq 0$ の代数多様体は good minimal model をもつ．したがって $Q_{n,m}$, $C^{+}_{n,m}$, $C_{n,m}$ は $n-m \leq 3$ の条件のもとで正しい.

2.21. せっかくの機会なので少し最近の状況を述べてみたい.

ログフリップ予想 I については, Shokurov 氏が 4 次元で正しいと主張している．詳しくは Reid 氏のホームページを見て頂きたい．Shokurov 氏のプレプリント (200 ページちょっと？) や我々のおこなったセミナーのノート (の残骸？) が入手可能である．もちろん私は理解していない.

ログフリップ予想 II についてであるが, これは現在 Shokurov 氏が研究中のようである．かなり難しい問題と思われる．少し考えてみると, 予想 I よりも予想 II の方が難しいような気がする．4 次元では現在 canonical flip の停止までは確認されている．詳しくは [F4] を見て頂きたい.

アバンダンス予想はおそらく一番の大問題だと思われる．3 次元の時の証明を思い出しても, かなり難しいことが予想される．少し意外なのは, 現在の高次元極小モデル理論の表舞台から正標数還元のテクニックは隠れてしまっているが, アバンダンスの証明には本質的に正標数のテクニックが使われている．現在のところアバンダンス予想は 3 次元半対数的標準 (semi log canonical threefolds) なるものまでしか証明できていない．ちなみに [F1] は私のデビュー作である．3 年前の城崎シンポジューム報告集 [ふ 1] も参照して頂きたい.

かなり乱暴であるが, 以上で古典的な高次元分類理論の復習はおしまいにする．詳しいことはオリジナルの論文, もしくは [M, Sections 6, 7] などを参照して頂きたい.

3. アルバネーゼ次元

ここでちょっとアルバネーゼ多様体について考えてみる．アルバネーゼ多様体の定義の確認は各自にお任せする．今回の話は非特異射影的代数多様体しか扱わないのでアルバネーゼ多様体はなんら難しいことはない．アルバネーゼについての基本文献は [U, §9] と思われる.

まず最初にアルバネーゼ次元を定義する.

定義 3.1 (アルバネーゼ次元)**.** 非特異射影代数多様体 X を考える．アルバネーゼ射を $\alpha_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ と書くとき, アルバネーゼ次元を以下で定義する.

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(X) := \dim \alpha_X(X)$$

ついでにアルバネーゼファイバー次元を以下で定義しておく.

$$\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(X) := \dim X - \mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(X)$$

定義 3.2 (最大アルバネーゼ次元)**.** $\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(X) = \dim X$ の時, X は最大アルバネーゼ次元 (maximal Albanese dimension) を持つ, という. もちろんこれは $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(X) = 0$ と同値である.

次の注意は大切である.

注意 3.3. $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(X) = 0$ の時 $\kappa(X) \geq 0$ である. これは簡単にチェックできる. $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(X) = 0$ かつ $\kappa(X) = 0$ の時, X はアーベル多様体と双有理である. こちらはノントリビアルである. 例えば川又先生の定理を使えばよい.

アルバネーゼ次元が双有理不変量であることは簡単にチェックできる. したがって, すべての完備代数多様体に対してアルバネーゼ次元を定義することができる. 特異点解消をとったモデルに対してアルバネーゼ次元を考えればいいのである. 多重標準射の像の次元で小平次元, アルバネーゼ射の像の次元でアルバネーゼ次元, というわけである.

個人的な感想としては, アルバネーゼ次元よりアルバネーゼファイバー次元の方が扱い易いような気がする. もちろん論理的にはどちらを使っても同じであるが$\cdots$.

アルバネーゼ次元は様々な人によってすでに定義されている. ただし人によって定義が異なるので注意が必要である. 上野先生のバイブル [U] の中の定義 (Definition 9.21) は我々の定義とは異なる.

定義を見ると何て事ない概念に見えるが, 意外と役に立つのである.

せっかく新しい概念を導入したので基本的な性質を調べておこう. といってもほとんど定義から明らかであろう.

定理 3.4 (Easy addition)**.** 非特異射影的多様体の間の全射 $f : X \longrightarrow Y$ を考える. この時以下が成立.

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(X) \leq \mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(f) + \dim Y$$

ここで $\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(f)$ は一般ファイバーのアルバネーゼ次元である.

これは良く知られた小平次元の easy addition と同じ形である. 念のために書いておく.

定理 3.5 (Easy addition)**.** 代数的ファイバー空間 $f : X \longrightarrow Y$ に対して以下が成立.

$$\kappa(X) \leq \kappa(X_{\bar{\eta}}) + \dim Y$$

定理 3.6. V を非特異射影的代数多様体とする. X を V の部分多様体で一般の位置にあるとする. この時以下が成立.

$$\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(X) \leq \mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(V)$$

特に $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(V)=0$ ならば $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(X)=0$ である．

定理 3.7. $f:X\to Y$ を非特異射影的多様体の間の全射とする．このとき，

$$\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(X)\le \mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(Y)+\dim f$$

である．ただし，$\dim f:=\dim X-\dim Y$.

定理 3.8. X と Y を非特異射影的多様体とする．このとき，

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(X\times Y)=\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(X)+\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(Y)$$

である．

上記定理の証明は定義からほぼ明らかである．しかしこれらの不等式は見掛けよりもずっと役に立つ式なのである．アルバネーゼ次元よりもアルバネーゼファイバー次元を考えたいのは上の定理 3.6, 3.7 による．下で述べる注意 3.11 も見て頂きたい．ここで述べたもの以外にも定義から簡単にチェックできる性質がいくつかあるが，詳しくは [F5, Section 2] を見て頂きたい．

注意 3.9. 代数的ファイバー空間 $f:X\longrightarrow Y$ を考える．この時 $\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(X)$, $\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(Y)$, $\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(f)$ の間には特に関係がないように思われる．したがってアルバネーゼ次元をいきなり代数的ファイバー空間の解析に用いるのは無意味のように思われる．色々な例を [F5, Section 2] で取り扱っている．興味のある方は見て頂きたい．

注意 3.10. 代数的ファイバー空間 $f:X\longrightarrow Y$ を考える．不正則数の間には

$$q(Y)\le q(X)\le q(Y)+q(F)$$

が成り立つ．もちろん証明が必要である．ここで F は一般ファイバーである．残念なことに

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(X)\le \mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(Y)+\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(F)$$

のような嬉しい不等式は成立しない．

注意 3.11. $f:X\longrightarrow Y$ が飯高ファイバー空間（飯高ファイバー空間の説明は省略する）の時には

$$\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(Y)\le \mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(X)$$

が成立する．この不等式もアルバネーゼ次元よりもアルバネーゼファイバー次元の方が扱い易いと言った理由である．特に，$\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(X)=0$ なら $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(Y)=0$ である．この事実が [F3] の主定理の証明のキーポイントの一つである．上記不等式の証明は川又先生の小平次元零の多様体についての結果を使うのでノントリビアルである．

最後に明らかな補題をひとつ述べておく．アルバネーゼ多様体の普遍性から明らかである．

補題 3.12. 非特異射影的多様体 X を考える．不正則数 $q(X)=0$ とアルバネーゼ次元 $\mathrm{d}_{\mathrm{Alb}}(X)=0$ は同値である．

4. 主定理

さすがに全くオリジナルの結果がないというのは寂しいので, ちょっとだけ新しい結果を述べておく．$C_{n,m}$ の適用可能範囲を広げた, というお話である．もちろん参考文献は [F3] と [F5] である．

高次元代数多様体の分類にアルバネーゼ次元を使うと言うことは誰でも考え付くことである．しかし, 単独でアルバネーゼ次元を使っても, これと言った新しい結果は出てきそうにない．これは前の章で述べた通りである．注意 3.9 を見て頂きたい．

そこで今回は小平次元とアルバネーゼ次元を組合せて使うことにより $C_{n,m}$ の適用範囲を広げよう！と言うわけである．

定理 4.1 (Main theorem of [F5])**.** 代数的ファイバー空間 $f: X \longrightarrow Y$ を考える．十分一般のファイバーを F と書く．$\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(F) \leq 3$ なら $\kappa(X) \geq \kappa(Y)+\kappa(F)$ である．つまり飯高予想は正しい．

補題 3.12 より次の系が簡単にチェックできる．

系 4.2. 代数的ファイバー空間 $f: X \longrightarrow Y$ を考える．十分一般のファイバーを F と書く．$\dim F=4$ で $q(F) \neq 0$ なら $\kappa(X) \geq \kappa(Y)+\kappa(F)$ である．

この系を見ただけでも定理 4.1 の有り難みが分かる．アルバネーゼファイバー次元なる概念を導入することにより, スッキリと無理なく上記の系 4.2 が証明できるのである．

主定理は以下のように述べた方が良かったかもしれない．

定理 4.3. $C_{n,m}^{+}$ が $n-m \leq k$ なる代数的ファイバー空間すべてに対して成立すると仮定する．この時, 代数的ファイバー空間 $f: X \longrightarrow Y$ を考える．十分一般のファイバーを F と書く．$\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(F) \leq k$ なら $\kappa(X) \geq \kappa(Y)+\kappa(F)$ である．つまり飯高予想は正しい．

4.4. 定理 4.1 の証明についてすこしコメントしておく．

Step 1. まず $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(F)=0$ の時を証明する．これは [F3] の主定理である．以下 $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(F)=0$ を仮定する．少し議論がいるが, 次の事が証明できる．これは難しくないが, それほどトリビアルでもない．議論自体は昔からよく使われていたものである．

補題 4.5. $\kappa(Y) \geq 0$ と $\kappa(X_{\bar{\eta}})>0$ の仮定の元で, $\kappa(X)>0$ を示せば十分である．

ファイバーが一般型の時は定理 2.13 を使えば定理は正しい．従って, $0<\kappa(F)<\dim F$ としてよい．この時, 相対的飯高ファイバー空間を

考える．

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Z \\ f \searrow & & \swarrow h \\ & Y & \end{array}$$

簡単な議論により $g : X \longrightarrow Z$ の一般ファイバーがアーベル多様体と双有理であることが分かる．また注意 3.11 より h の十分一般のファイバーも $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}} = 0$ になる．$h : Z \longrightarrow Y$ にファイバーの次元に関する帰納法を使うと

$$\kappa(Z) \geq \kappa(Y) + \kappa(G)$$

である．ここで G は h の十分一般のファイバーである．また定理 2.15 を $g : X \longrightarrow Z$ に使うと

$$\kappa(X) \geq \max\{\kappa(Z), \mathrm{Var}(g)\}$$

である．補題 4.5 より $\kappa(Z) = 0$, $\mathrm{Var}(g) = 0$ としてよい．この時 $\kappa(G) = 0$ になり, G がアーベル多様体と双有理．定理 2.15 を h に用いて $\mathrm{Var}(h) = 0$ が従う．ここまで来ると, 川又式被覆のテクニックより $Z \simeq Y \times A$ なる場合に帰着できる．ただし A はアーベル多様体である．最後はアーベル多様体の性質に帰着するのである．後はマンフォードの本を片手に欲しい結果を捻り出せばおしまいである．Theorem of cube もどきに帰着できる．この部分は [F3, Sections 4, 5] で詳しく説明してある．

Step 2. $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}}(F) \leq 3$ の時も同様の証明である．少し議論すると, この場合も補題 4.5 を示せばいいことが分かる．今回は相対的飯高ファイバー空間の代わりに相対的アルバネーゼ射 (ここはかなり大雑把な書き方である) を考える．Step 1 (つまり, ファイバーの $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}} = 0$) の時の結果と先にのべた結果 $C^{+}_{n,m}$(定理 2.20) を合わせて簡単な場合に帰着し, やはりアーベル多様体の性質に訴えるのである．ここの議論は使う結果が異なるだけで Step 1 と全く同じ議論である．条件に出てくる 3 は極小モデル理論が 3 次元以下で成立するというところからでてくる 3 である．定理 2.20 と定理 4.3 を見て頂きたい．この部分は [F5, Section 3] に詳しく書いた．

Step 1 (つまり [F3]) では相対的飯高ファイバー空間をつかって帰納的に証明したところを, Step 2 (つまり [F5]) では相対的アルバネーゼ射と Step 1 の主結果を使って帰納的に証明する．上で述べたように, [F3] と [F5] の基本的な証明方法, アイデアは全く同じである．

証明自体はそれほど難しくないが, ところどころ大結果を引用しているので, 結果は十分ノントリビアルである．

かなり大雑把であるが証明についてはこれぐらいにしておく．

注意 4.6. 特異点解消, 平坦化, 底変換, easy addition 定理などを上手く組合わせて少ない情報から沢山の結果を導き出すのは, $C_{n,m}$ の証明の常套手段である．80 年代前半の論文をきっちりと読みこなすことが出

来れば, 後は必要な形に議論を修正するだけである. もっとも, $C_{n,m}$ 関連は教科書もなく, 解説記事も少なく, 論文もあまり読みやすくないので, それほど楽な作業ではない.

少し注意と例を述べておく.

注意 4.7. アルバネーゼファイバー次元の定義を思い出すと, 3 次元以下の代数多様体はすべて $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}} \leq 3$ である.

例 4.8. 最大アルバネーゼ次元 (maximal Albanese dimension) を持つ多様体としては, 有理曲線以外のすべての曲線 (いわゆるアーベルの定理), アーベル多様体, それらの直積, それらの (generically finite な) 被覆空間, それらの部分多様体で一般の位置にあるもの, などなどである. 定理 3.6, 3.7, 3.8 などから明らかである.

定理 3.6, 3.7, 3.8 を使えば $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}} \leq 3$ なる多様体が沢山作れる. したがって, $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}} \leq 3$ なる多様体のクラスはかなり広いクラスである. [F3, Section 2] と [F5, Section 2] も参照して頂きたい.

4.9. “Good minimal model を持つ” という条件と “$\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}} \leq 3$” という条件は直接的には関係がない. 以下の発言は数学的には無意味な発言であるが, 敢えて述べておく.

（今現在）good minimal model を持つ多様体よりも $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}} \leq 3$ を満たす多様体の方が多いような気がする.

少し補足しておく. 上で述べたように $\mathrm{fd}_{\mathrm{Alb}} \leq 3$ なる多様体の例は比較的簡単に沢山作れる. Good minimal model を持つ多様体はアーベル多様体やその非特異部分多様体, カラビ-ヤウ多様体の高次元化 (標準因子がトリビアルなもの), トーリック多様体の general な超曲面などしか思いつかない.

もちろん極小モデル理論が完成した暁には上の発言は無意味である. すべての $\kappa \geq 0$ なる多様体は good minimal model を持つのだから$\cdots$.

5. まとめ

結局のところ, 今回の話では $C_{n,m}$ の本質的な部分には全く近付けていない. 既存の結果を効率よく上手く組合せて $C_{n,m}$ の適用範囲を広げただけである.

アルバネーゼ次元を単独で使うのではなく, 小平次元と組合せて使った点, アルバネーゼ次元ではなくアルバネーゼファイバー次元を使った点. 敢えて言うと, この 2 点が今回の新しい部分であろうか？

最後にひとこと. [F2] の中にも $C_{n,m}$ についてのちょっとしたノントリビアルな結果が載っている. こっちはかなりマニアックである. 証明が大変な割には結果があまり良くないという悲しい定理である.

References

[F1] O. Fujino, Abundance theorem for semi log canonical threefolds, Duke Math. J. 102 (2000), no. 3, 513–532.

[F2] O. Fujino, A canonical bundle formula for certain algebraic fiber spaces and its applications, to appear in Nagoya Math. J.

[F3] O. Fujino, Algebraic fiber spaces whose general fibers are of maximal Albanese dimension, to appear in Nagoya Math. J.

[F4] O. Fujino, Termination of 4-fold canonical flips, preprint 2002.

[F5] O. Fujino, Remarks on algebraic fiber spaces, preprint 2002.

[ふ 1] 藤野 修, Abundance theorem for semi log canonical threefolds (3 次元半ログ標準多様体のアバンダンス定理), 代数幾何学城崎シンポジューム報告集 p1–p7 (1999).

[ふ 2] 藤野 修, A canonical bundle formula (標準因子公式), 第 46 回代数学シンポジウム報告集 p75–p80 (2001).

[M] S. Mori, Classification of higher-dimensional varieties, Proc. Symp. Pure Math., **46** (1987), 269–331.

[U] K. Ueno, *Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces,* Springer Lecture Notes Vol. **439**, 1975.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所
E-mail address: `fujino@kurims.kyoto-u.ac.jp`