THE INDICES OF LOG CANONICAL SINGULARITIES
対数的標準特異点の指数について

藤野 修*

対数的標準特異点 (log canonical singularities) の指数 (index) について述べる．詳しくはプレプリント [Fj2] を見よ．基本的な用語, 定義等は [KMM], [かわ], または [K も] 等にすべてでている．文献によって少しずつ定義が異なることに注意せよ．以下, 先生方の敬称は略す．

$(P \in X)$ を正規特異点の芽とし,

$$\varphi : X' \to X$$

を特異点解消とする．X の標準因子を K_X と書き, K_X は $\mathbb{Q}$-Cartier であると仮定する．つまり, ある正の整数 r が存在して rK_X が Cartier 因子になるとする．X' の標準因子 $K_{X'}$ と φ^*K_X の差は例外因子 $\{E_i\}$ を用いて以下のように書ける．

$$K_{X'} = \varphi^*K_X + \sum a_i E_i.$$

ここで, 特異点 $(P \in X)$ について次のような定義をする．

定義 1. $(P \in X)$ は

$$\begin{cases} \text{対数的標準 (lc) 特異点} \\ \text{対数的末端 (lt) 特異点} \end{cases} \quad \text{if} \quad \begin{cases} a_i \geq -1 \text{ for every } i, \\ a_i > -1 \text{ for every } i. \end{cases}$$

とする．ここで, lc は log canonical, lt は log terminal の略である．これらが特異点解消の取り方によらないことも簡単にチェックできる．

X の次元が 2 のとき, つまり X が曲面の時, lt は商特異点と同値な概念である．一般次元では商特異点は lt 特異点だが, 逆は成り立たない．また, 2 次元 lc 特異点は川又によって分類されている．X が 2 次元の時, 正規特異点を考えているので, 勿論特異点は孤立している事に注意する．

次に指数 (index) を定義しよう．

定義 2. $\mathrm{I}(P \in X) := \min\{r \in \mathbb{N} \mid rK_X \text{ is Cartier at } P\}$ とおく．これを X の P での指数と呼ぶ．

---

* Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science.

定理 3. $(P \in X)$ を *2* 次元の lc 特異点とし, lt でないとする. この時, $\mathrm{I}(P \in X) = 1, 2, 3, 4$ または 6.

これは良く知られた結果で, 様々な証明方法が知られている. 例えば, 川又の分類表を眺めるとか, Shokurov による Complement の概念を使うとか, 色々あって面白い.

3 次元になると問題は一気に難しくなる. 石井は [Is] で 3 次元孤立特異点について上の定理の一般化を得た.

定理 4 (石井 [Is])**.** $(P \in X)$ を *3* 次元の孤立 lc 特異点とし, lt でないとする. この時, $\mathrm{I}(P \in X) \in I'_2 := \{r \in \mathbb{N} \mid \varphi(r) \leq 20, r \neq 60\}$. ここで, φ は *Euler* 関数である. また, すべての $a \in I'_2$ に対し, 指数が a であるような *3* 次元孤立 lc 特異点で lt でないものが存在する.

定理 4 で lt 特異点でないと仮定しているが, この条件をとってしまうと明らかに主張は嘘である. 商特異点（lt 特異点でもある）で指数がいくらでも大きいものが作れるからである.

今回の話は上の定理を一般化することが目標である. もう少し具体的に言うと, 定理の条件から特異点が孤立しているという条件を外したい.（3 次元以上では正規特異点は一般には孤立していない事に注意する.）最終的には一般次元の lc pair (これは lc 特異点の一般化）について対数的極小モデル理論を認めたうえで上の定理の一般化に成功した.（正確な主張は [Fj2] を見よ.）3 次元以下では対数的極小モデル理論は完成していることにも注意せよ.

取り敢えず index 1 cover （指数 1 被覆）の定義から始めよう.

定義 5 (Index 1 cover)**.** $(P \in X)$ を lc 特異点の芽とする. この時以下の性質を持つ巡回被覆が解析的同型を除いてただ一つ存在する.

$$\pi : (Q \in Y) \to (P \in X)$$

は巡回被覆で

$$\pi^* K_X = K_Y$$

は Cartier 因子. G を π に付随する巡回群とすると,

$$(Q \in Y)/G \simeq (P \in X)$$

である.

Index 1 cover については [KMM], [K も] を見よ. 標準被覆と呼んでいる文献もある.

次に石井の証明のアイデアを最も簡単な場合に大雑把に述べてみる. この証明法は指数を決定するという観点から見ると 2 次元の場合に適用しても明らかに他の証明法よりも優れていると思う. この方法を使う

と 2 次元の場合の指数がなぜ 1, 2, 3, 4 又は 6 になるかが良く分る．これは楕円曲線の自己同型群の位数からきていることが分る．

$(P \in X)$ を 2 次元 lc 特異点で lt でないとし,

$$\pi : (Q \in Y) \to (P \in X)$$

は上記の index 1 cover とする．

$$f : (Z, E) \to (Q \in Y)$$

を極小特異点解消とする．ここで E は

$$K_Z = f^* K_Y - E$$

をみたす Weil 因子である．簡単のために E を非特異で既約な曲線と仮定する．勿論一般には E は可約になる．この時 adjunction formula により, $K_E \sim 0$ で E は楕円曲線である．巡回群 G は Z にも E にも作用する．ここで簡単に確認できることを述べる．

事実 6. 次の同型が成立する．

$$\omega_Y / m_Q \omega_Y \simeq H^0(E, K_E) \simeq \mathbb{C}.$$

ω_Y は $\mathcal{O}_Y(K_Y)$ のことで, m_Q は Q の極大イデアルである．また, 作用

$$\rho : G \to GL(\omega_Y / m_Q \omega_Y) \simeq \mathbb{C}^\times$$

の像の位数を $|\rho(G)|$ とかくと, $\mathrm{I}(P \in X) = |\rho(G)|$ である．

群 G は $\omega_Y / m_Q \omega_Y \simeq H^0(E, K_E)$ の両辺に compatible に作用しているので右側への作用を見れば良い．したがって楕円曲線の良く知られた結果から $\mathrm{I}(P \in X) = |\rho(G)| = 1, 2, 3, 4$ または 6 が従う．

以上が石井の証明のアイデアの最も簡単な場合である．一般の時は勿論こんなに簡単ではない．E が可約のことが有り得る．X が 2 次元なら, 有理曲線の環がでてくる場合もある．さらに一般次元なら極小特異点解消は存在しないし, 特異点が孤立していないときは E はかなり複雑になるはずである．因に石井による定理 4 の証明は彼女自身による 3 次元孤立 lc 特異点の粗い分類を使っている．

以下今回の主張を述べるために記号をもう一度定義し直そう．

X を $\mathbb{C}$ 上の正規多様体で Δ を X 上の $\mathbb{Q}$-因子とする．$K_X + \Delta$ を $\mathbb{Q}$-Cartier と仮定する．

定義 7. $\mathrm{I}(P \in X, \Delta) := \min\{r \in \mathbb{N} \mid r(K_X + \Delta) \text{ is Cartier at } P\}$ とおく．この $\mathrm{I}(P \in X, \Delta)$ を (X, Δ) の P での指数と呼ぶ．

$\Delta = 0$ の時は先程扱った．先程定義した特異点も多様体と $\mathbb{Q}$-因子の対について拡張しておく．

定義 8. $\Delta=\sum d_i\Delta_i$ と既約成分に分けて書いたときすべての i に対し d_i は $0\le d_i\le 1$ なる有理数と仮定する.

$$\varphi : X' \to X$$

をあるログ特異点解消（例外集合が単純正規交差因子で, 例外集合と Δ の固有変換の和がやはり単純正規交差因子なるような特異点解消）とする.

$$K_{X'}=\varphi^*(K_X+\Delta)+\sum a_jE_j$$

と書いたとき, (X,Δ) の特異点を, (X,Δ) は

$$\begin{cases}\text{lc pair}\\ \text{dlt pair}\end{cases}\quad \text{if} \quad \begin{cases} a_i\ge -1 \text{ for every } i,\\ a_i>-1 \text{ if } E_j \text{ is } \varphi\text{-exceptional.}\end{cases}$$

で定義する. lc pair は特異点解消の取り方によらないが, dlt は特異点解消の取り方による概念である. dlt pair の典型的な例は X が非特異多様体で, Δ が X 上の被約な単純正規交差因子の場合である. ちなみに, dlt は divisorial log terminal の略である.

今後以下の仮定を満すものを考える.

仮定 9. (1) $\Delta=\sum d_i\Delta_i$ は *standard coefficients* とする. すなわち, $d_i\in\{1-1/m \mid m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}\}$ とする.

(2) $a_j=-1, \varphi(E_j)=P$ をみたす E_j が存在する. ただし, 記号は定義 8 の記号とする.

(1) の standard coefficients は高次元の代数多様体を扱うときには非常に頻繁に目にする係数である. 特異点を許した多様体上の $\mathbb{Q}$-Cartier Weil 因子に adjunction formula を使うとでてくる係数である. もっというなら, Hurwitz の公式でお目にかかる係数である.

(2) は点 P が $(X,\Delta$ の lc 特異点の中心 (center of log canonical singularities) という事である. [Fj2] 内では $P\in\mathrm{CLC}(X,\Delta)$ と書いてある.

定理 10. $(P\in X,\Delta)$ を 3 次元 *lc pair* とし, 仮定 9 をみたすとする. この時 $\mathrm{I}(P\in X,\Delta)\in I'_2$. もっと詳しく書くと

$$\begin{cases}\mathrm{I}(P\in X,\Delta)\in\{1,2\}\\ \mathrm{I}(P\in X,\Delta)\in\{1,2,3,4,6\}\\ \mathrm{I}(P\in X,\Delta)\in I'_2\end{cases}\quad \textit{if}\quad \begin{cases}\mu(P\in X,\Delta)=0,\\ \mu(P\in X,\Delta)=1,\\ \mu(P\in X,\Delta)=2.\end{cases}$$

ここで, $\mu(P\in X,\Delta)$ は *lc pair* の不変量である. μ の正確な定義はここではしない.

lc 孤立特異点で lt でないものは明らかに仮定 9 を満しているので定理 10 は定理 4 を含んでいる. $\Delta=0$ なら勿論 standard coefficients で, lc だが lt でないと言うのはまさに仮定 9 の (2) である.

注意 11. 今回は述べないが, 対数的極小モデル理論を認めれば上の定理は一般次元化可能である. X が n 次元のとき, μ は 0 から n-1 までの値をとり, $\mathrm{I}(P \in X, \Delta)$ は μ 次元の"Calabi-Yau" 多様体の B-birational 自己同型群の, 標準因子の大域切断の空間への作用の位数とほぼ対応している. 最も簡単な場合は石井のアイデアとして既に述べた通りである. 完全な主張は [Fj2] の 4 章をみよ. そこでの記号 I_n, I'_n 等は 3 章をみよ.

証明のアイデアについて少しだけ述べる. 以下面倒なので $(P \in X, \Delta)$ は 3 次元 lc 特異点とし, 仮定 9 をみたし, $\Delta = 0$ としてしまう.

$$\pi : (Q \in Y) \to (P \in X)$$

を index 1 cover とする. ここでは述べないが, $\Delta \neq 0$ の時も index 1 cover はきちんと定義される. 次のような性質を持つ Y の modification をつくる.

$$f : (Z, E) \to (Q \in Y)$$

は射影的な双有理射で,

(1) $K_Z + E = f^*K_Y$,

(2) (Z, E) は dlt pair,

(3) $E := E^c + E^{nc}$ と分ける. ここで E の既約成分で f で Q に落ちるものの和を E^c と書き, それ以外を E^{nc} とする. c は comapct, nc は non-compact の略である.

(4) E^cは連結な射影的多様体である.

(5) $(E^c, (E - E^c)|_{E^c})$ は sdlt である. (sdlt は [Fj1] で導入された概念であり, 単純正規交差多様体みたいな物と思って頂ければ良い.) ちなみに semi divisorial log terminal の略である.

(6) $K_{E^c} + (E - E^c)|_{E^c} = (f^*K_Y)|_{E^c} \sim 0$.

(7) ${\omega_Y}^{\otimes m}/m_Q{\omega_Y}^{\otimes m} \simeq H^0(E^c, m(K_{E^c} + (E - E^c)|_{E^c}))$ が任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して成立し, G は両辺に compatible に作用する.

(8) $\rho : G \to GL(\omega_Y/m_Q\omega_Y)$ とすると, $|\mathrm{I}(P \in X, \Delta)| = |\rho(G)|$.

(9) $\mu(P\in X,\Delta)$ は $(P\in X,\Delta)$ の不変量で, $\mu=0,1$ または 2 である. 大雑把なイメージは $E=E^c$ の時は以下の通りである.

注意 12. (4) の E^c の連結性が一番難しい所である. 孤立特異点の時は全く問題にならなかった所である. これを示すのに [Fj2] の 2 章のほとんどが費やされている.

(7) で G の作用を考えたが, G は E^c そのものには作用しない. [Fj1] で導入した B-birational map と言う因子付きの双有理写像の議論を使って証明する. B-birational map については [Fj1], [ふ] をみよ.

(9) の μ は孤立特異点に対しては石井が E の mixed Hodge structure を用いて導入した $(0,i)$ type と同じ概念になる. (厳密に言うと, (Z,E) ではなくて, $(Q\in Y)$ の特異点解消を見なくてはいけない.) [Fj2] では μ は lc 特異点の中心で極小なるもの (minimal center of log canonical singularities) の次元で定義されている.

(7), (8) により G の $H^0(E^c,K_{E^c}+(E-E^c)|_{E^c})$ への作用を見れば十分であることが分った. この作用については既に [Fj1] で十分詳しく調べられた結果がある. それを今回の場合に適用出来るように書き直せば十分である. 感覚的には, 上の手書きの図で考えると, $\mu=0$ の時は 3 枚の曲面の交わりの 1 点が大切で, $\mu=1$ の時は交わりが楕円曲線であることが簡単に分かって, それの自己同型群, $\mu=2$ の時は標準因子が自明であるアーベル曲面, もしくは $K3$ 曲面がでてきて, それらの自己同型群の作用を調べる, と言う感じである. もちろん, それほど簡単な事ではない.

もう少し書くと, 上のようなモデル (Z,E) がとれた後は [Fj1] で展開した議論が少しの修正で適用出来る. sdlt pair $(E^c,(E-E^c)|_{E^c})$ 上に admissible section と名付けた良い section を構成することで証明は完了する. admissible section $s\in H^0(E^c,m(K_{E^c}+(E-E^c)|_{E^c}))$ とは B-birational 自己同型で不変な section と思っていただいても問題ない. 正確な定義は [Fj1], [Fj2] を見よ. 2 次元 sdlt のアバンダンス定理の特殊な場合を effective な評価付 (m の評価をする) で証明することになる. よって, 結局のところ [Fj2] は [Fj1] の応用のひとつと言っても良い. 詳しくは [Fj1] もしくは [ふ] を見て頂くしか仕方がない.

最後に 1 つ例をあげておく.

例 13. $X = (x^3 + y^3 + z^3 = 0) \subset \mathbb{C}^4$ とする. 巡回群 $\mathbb{Z}_m$ を X に次のように作用させる.

$$(x, y, z, t) \mapsto (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z, \varepsilon t).$$

もちろん ε は *1* の原始 m 乗根である. Y_m を $X/\mathbb{Z}_m$ とし, $o \in Y_m$ を $(0, 0, 0, 0) \in X$ の像とする. $(o \in Y_m)$ は lc だが, lt でない. この時 $\mathrm{I}(P \in Y_m) = m$ となる. これは仮定 9 の (2) が満されないと指数がおさえれないということを示す例である.

したがって仮定 9 は本当に必要な仮定である.

おまけ. 定理 10 を証明した後, 仮定 9 の (2) を弱めた形でも定理は正しいはずだと信じて証明を考えていた. 証明が完成し, 破綻するという日々が続いた. ７月９日の昼下がり, 数理研のロビーで森先生に「仮定を弱めても成立すると思っているが証明がうまくいかない」と話すと, 最初は森先生もその一般化は正しそうだとおっしゃっていたが, ものの１０分程の議論で反例 (上記の例 13 よりも少し難しい例) を構成されてしまった. 個人的には結構悔しかったのだが, 「一般化が証明できました」と言わなくて良かった思った. おそらく, 特異点の専門家の間でもあまり知られていなかったような気がするのでここに例 13 を載せた.

最後に, 今回の主結果は石井先生の講演が出発点であることを付け加えておく.

References

[Fj1] O. Fujino, Abundance theorem for semi log canonical threefolds, to appear in Duke Mathematical Journal.

[Fj2] O. Fujino, The indices of log canonical singularities, RIMS-**1250**, preprint 1999.

[ふ] 藤野 修, Abundance theorem for semi log canonical threefolds, 1999 年の城崎シンポジウムの報告集.

[Is] S. Ishii, The quotient of log-canonical singularities by finite groups, to appear in Advanced Studies in Pure Math.

[かわ] 川又 雄二郎, **代数多様体論**, 共立出版, 1997.

[KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda, and K. Matsuki, Introduction to the Minimal Model Problem, in *Algebraic Geometry, Sendai 1985,* Advanced Studies in Pure Math. **10**, (1987) Kinokuniya and North-Holland, 283–360.

[K も] J. Kollár, 森重文, **双有理幾何学**, 岩波書店, 1998.

京都大学数理解析研究所

E-mail address: `fujino@kurims.kyoto-u.ac.jp`