切替拡散過程の概安定性の判定定理について

鳥生 梓 *

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻 M2，2016 年 2 月

1　切替拡散過程の概安定性

まず, 本報告書で扱う過程について説明する. $w(t) = (w_1(t), ..., w_m(t))^\top$ を m 次元ブラウン運動 (1) とする. $r(t)$, $t \geq 0$ を有限状態空間 $S = \{1, 2, ..., N\}$ に値をとる連続時間マルコフ連鎖で, $\Delta \downarrow 0$ のとき,

$$P(r(t+\Delta) = j \mid r(t) = i) = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta) & (i \neq j) \\ 1 - \gamma_i \Delta + o(\Delta) & (i = j) \end{cases} \tag{1.1}$$

を満たすものとする. ここで $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ は生成行列と呼ばれ,

$$i \neq j \text{ ならば}, \gamma_{ij} \geq 0 \text{ であり}, \gamma_i = -\gamma_{ii} = \sum_{j : j \neq i} \gamma_{ij} \geq 0 \tag{1.2}$$

である. さらに, マルコフ連鎖 $r(\cdot)$ はブラウン運動 $w(\cdot)$ と独立であると仮定する.

関数 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}^n$ および関数 $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times S \to \mathbb{R}^{n \times m}$ について, 次の確率微分方程式を考える.

$$dx(t) = f(x(t), t, r(t))dt + g(x(t), t, r(t))dw(t) \tag{1.3}$$

ただし, 初期値は $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ である. この確率微分方程式の解によって定まる $\mathbb{R}^n$ 上の確率過程 $x(t)$ を, **マルコフ切替を持つ拡散過程**と呼ぶ. この過程は, $r(t) = i,\ 1 \leq i \leq N$ となる期間では切替のない確率微分方程式

$$dx(t) = f(x(t), t, i)dt + g(x(t), t, i)dw(t) \tag{1.4}$$

の解となっており, マルコフ連鎖 $r(t)$ の動きに従って, N 個の方程式の間を一方から他方へスイッチングした結果として得られる.(cf. [1])

[2] は切替拡散過程に対する概安定性の判定定理として，正則 M 行列に関する結果を用いた十分条件を与えた．本報告書では，[2] の定理では判定定理が適用できない例を与える．

2　概安定性の判定定理

次の条件を課す.

*azusa@math.kyoto-u.ac.jp

(1) もし A がベクトルまたは行列ならば, その転置行列を $A^\top$ と表す.

仮定 (A) 各 $i \in S = \{1, 2, ..., N\}$ に対して, $\alpha_i \geq 0, \sigma_i \geq 0, \rho_i \geq 0$ が存在して, すべての $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ に対して, 以下が成り立つ:

$$x^\top f(x,t,i) \leq \alpha_i |x|^2,$$
$$|x^\top g(x,t,i)| \geq \sigma_i |x|^2,$$
$$|g(x,t,i)| \leq \rho_i |x|.$$

仮定 (B) ある $K > 0$ が存在して, すべての $(x, t, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S$ に対して, 以下が成り立つ:

$$|f(x,t,i)| \leq K|x|. \tag{2.1}$$

$p \geq 0$ において,

$$\theta_i(p) = \frac{p}{2}((2-p)\sigma_i^2 - \rho_i^2) - p\alpha_i \tag{2.2}$$

とし,$N \times N$ 行列 $\mathscr{A}(p)$ を

$$\mathscr{A}(p) = \mathrm{diag}(\theta_1(p), ..., \theta_N(p)) - \Gamma \tag{2.3}$$

で定義する.

定理 2.1. 仮定 (A) 及び仮定 (B) が従うと仮定するとき，切替拡散過程は概安定である.

定理 2.2. 仮定 (A) 及び仮定 (B) が従うと仮定する.

$$\frac{d}{dp}\det \mathscr{A}(0) = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 - \rho_1^2/2 - \alpha_1 & -\gamma_{12} & \dots & -\gamma_{1N} \\ \sigma_2^2 - \rho_2^2/2 - \alpha_2 & -\gamma_{22} & \dots & -\gamma_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_N^2 - \rho_N^2/2 - \alpha_N & -\gamma_{N2} & \dots & -\gamma_{NN} \end{vmatrix} > 0 \tag{2.4}$$

を仮定する. $u \in S$ が存在して, すべての $i \in S, i \neq u$ に対して,

$$\gamma_{iu} > 0 \tag{2.5}$$

も仮定する. このとき, 切替拡散過程は概安定である.

これらの定理の証明の概略は以下の通りである．まず，Borel–Cantelli の定理および仮定 (B) を用いて，p 次安定性から概安定性を導く一般的な定理を示す．次に，確率微分方程式を用いた積分の評価および正則 M 行列に関する結果を用いることによって，p 次安定性を示す.

3　判定定理が適用できない例

μ, v を実定数とするとき, 確率微分方程式

$$dx(t) = \mu x(t)dt + vx(t)dw(t),\ x(0) = x_0 \tag{3.1}$$

の解 $x(t; x_0)$ を**幾何ブラウン運動**という. 伊藤の公式より, 解は

$$x(t) = x(0)exp(vw(t) + (\mu - v^2/2)t) \tag{3.2}$$

である. 従って,

$$\frac{1}{t}\log|x(t)| = \frac{1}{t}\log|x(0)| + v\cdot w(t)/t + (\mu - v^2/2) \tag{3.3}$$

は, 大数の法則より $\mu - v^2/2$ に収束するので, $\mu - v^2/2 < 0$ ならば $x(t;x_0)$ は概安定, $\mu - v^2/2 > 0$ ならば $x(t;x_0)$ は概不安定である.

例 3.1. $w(t)$ をスカラーブラウン運動とする.$r(t)$ は $S=\{1,2\}$ に値をとり, 生成行列を

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

として, マルコフ切替を持ち, ともに切替のない解が安定な 1 次元確率微分方程式

$$\begin{cases} dx(t) = a_1x(t)dt + b_1x(t)dw(t) & (r(t)=1 \text{ の期間},\ a_1 - b_1^2/2 < 0) \\ dx(t) = a_2x(t)dt + b_2x(t)dw(t) & (r(t)=2 \text{ の期間},\ a_2 - b_2^2/2 < 0) \end{cases} \tag{3.5}$$

を考える. 以下で定理 2.1 に基づき,(3.1) の解 $x(t)$ の安定性を調べる. $i=1$ のとき, $\alpha_1 = a_1,\ \sigma_1 = b_1,\ \rho_1 = b_1$ であり, $i=2$ のとき, $\alpha_2 = a_2,\ \sigma_2 = b_2,\ \rho_2 = b_2$ であることから, 仮定 (A) をみたす. このとき,

$$\mathscr{A}(p) = \begin{pmatrix} -(b_1^2/2)p^2 + (-a_1 + b_1^2/2)p + \gamma_1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & -(b_2^2/2)p^2 + (-a_2 + b_2^2/2)p + \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+\gamma_1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & B+\gamma_2 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

となる.$0<p<2$ において $\mathscr{A}(p)$ の首座小行列式が正, つまり $A+\gamma_1 > 0$ かつ $\det\mathscr{A}(p) > 0$ となるための $\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0$ の範囲を求める.

$$\det\mathscr{A}(p) > 0 \Leftrightarrow (A+\gamma_1)(B+\gamma_2) - (-\gamma_1)(-\gamma_2) > 0 \tag{3.7}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 B > 0 & (A = 0 \Leftrightarrow p = -2a_1/b_1^2 + 1 \text{ のとき}) \\ \gamma_2 > -\frac{B}{A}(A+\gamma_1) & (A > 0 \Leftrightarrow 0 < p < -2a_1/b_1^2 + 1 \text{ のとき}) \\ \gamma_2 < -\frac{B}{A}(A+\gamma_1) & (A < 0 \Leftrightarrow p > -2a_1/b_1^2 + 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3.8}$$

(1)$p = -2a_1/b_1^2 + 1$ のときは, $B = ((b_1^2/b_2^2)a_1 - a_2)(-2a_1/b_1^2 + 1)$ より (3.8) は $b_2^2a_1 > a_2b_1^2$ であれば $\gamma_1 B > 0$ を意味する.
(2)$0 < p < \min(-2a_1/b_1^2 + 1, -2a_2/b_2^2 + 1)$ のときは, $A > 0$ かつ $B > 0$ より,(3.8) はいつも満たされる.
(3)$\min(-2a_1/b_1^2 + 1, -2a_2/b_2^2 + 1) < p < \max(-2a_1/b_1^2 + 1, -2a_2/b_2^2 + 1)$ のときは, $A < 0, B > 0$ より (3.8) は $\gamma_2 < -\frac{B}{A}(A+\gamma_1)$ を意味する.
(4)$\max(-2a_1/b_1^2 + 1, -2a_2/b_2^2 + 1) \le p < 2$ のときは,$A < 0,\ B \le 0$ より,(3.8) をみたす $\gamma_2 > 0$ は存在しない.

例 3.2. マルコフ切替を持ち, ともに解が不安定な 1 次元確率微分方程式

$$\begin{cases} dx(t) = \mu_1x(t)dt + v_1dw(t) & (r(t)=1 \text{ の期間},\ \mu_1 - v_1^2/2 > 0) \\ dx(t) = \mu_2x(t)dt + v_2dw(t) & (r(t)=2 \text{ の期間},\ \mu_2 - v_2^2/2 > 0) \end{cases} \tag{3.9}$$

を考える.

$$\theta_1(p) = \frac{p}{2}((2-p)v_1^2 - v_1^2) - p\cdot\mu_1 = -\frac{v_1^2}{2}p^2 + (\frac{v_1^2}{2} - \mu_1)p < 0 \tag{3.10}$$

$$\theta_2(p) = \frac{p}{2}((2-p)v_2^2 - v_2^2) - p\cdot\mu_2 = -\frac{v_2^2}{2}p^2 + (\frac{v_2^2}{2} - \mu_2)p < 0 \tag{3.11}$$

となる. ここで, $A := -\theta_1(p) > 0,\ B := -\theta_2(p) > 0$ とおく. このとき,$\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0$ をどのようにとっても $\mathscr{A}(p)$ は正則 M 行列にならない. このことを背理法で示す. もし $\mathscr{A}(p)$ が正則 M 行列だったと仮定すると,

$$-A + \gamma_1 > 0 \Leftrightarrow \gamma_1 > A \tag{3.12}$$

ところがこのとき,

$$\det\begin{pmatrix} -A+\gamma_1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & -B+\gamma_2 \end{pmatrix} = (-A+\gamma_1)(-B+\gamma_2) - \gamma_1\gamma_2 \tag{3.13}$$

$$= AB - A\gamma_2 - B\gamma_1 \tag{3.14}$$

$$< AB - A\gamma_2 - BA < 0 \tag{3.15}$$

よって矛盾する. したがって定理 2.1 から安定性を判定することはできない.

例 3.3. $x(t)$ を 2 次元ベクトル値のマルコフ切替をもつ拡散過程で,

$$dx(t) = A_{r(t)}x(t)dt + \sigma x(t)dw(t) \tag{3.16}$$

の解とする. ここで $A_1,\ A_2$ を実対称な 2×2 行列

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

とする. ただし $a, b, c, d > 0,\ a < b,\ c > d$ とする. 切替のない解はともに不安定である. $\sigma > 0$ を定数,w を 1 次元ブラウン運動とする. $i = 1$ のとき, $\alpha_1 = a,\ \sigma_1 = \sigma,\ \rho_1 = \sigma$ であり, $i = 2$ のとき, $\alpha_2 = d,\ \sigma_2 = \sigma,\ \rho_2 = \sigma$ であることから, 仮定 (A) をみたす. また,

$$|A_1 x| \le b|x|,\ |A_2 x| \le c|x| \tag{3.18}$$

より (2.1) をみたす.

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 - \rho_1^2/2 - \alpha_1 & -\gamma_{12} \\ \sigma_2^2 - \rho_2^2/2 - \alpha_2 & -\gamma_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma^2/2 - a & -\gamma_1 \\ \sigma^2/2 - d & \gamma_2 \end{vmatrix} = \gamma_2(\sigma^2/2 - a) + \gamma_1(\sigma^2/2 - d) < 0 \tag{3.19}$$

より (2.4) の条件をみたさない. よって, 定理 2.2 では安定性が判定できない.

参考文献

[1] X.Mao and C.Yuan, Stochastic Differential Equations with Markovian Switching, Imperial College Press, 2006.

[2] X.Mao, Stability of stochastic differential equations with Markovian switching, Stochastic Process. Appl., 79, 45-67, 1999.

[3] 鳥生梓, 矢野孝次, 切替拡散過程の指数安定性, 第 7 回白浜研究集会報告集, 2015.