非線形 Schrödinger 方程式系における
孤立波解のピッチフォーク分岐と線形安定性

山添 祥太郎 *

京都大学 情報学研究科，2016 年 2 月

1 導入

本研究は京都大学情報学研究科の矢ヶ崎一幸教授との共同研究である．

次の空間 1 次元における非線形 Schrödinger 方程式系を考える．

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}\partial_t u + \partial_x^2 u + (\alpha|u|^2 + \beta|v|^2)u = 0 \\ &\mathrm{i}\partial_t v + \partial_x^2 v + (\beta|u|^2 + \gamma|v|^2)v = 0 \end{aligned} \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+1}. \tag{CNLS}$$

ここで，$u, v : \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{C}$ は未知関数，$\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$ は定数である．(CNLS) は非線形の媒質中を相互作用しながら伝播する二つの波を表す方程式として，物理学の様々な場面でしばしば現れる．一例としては，非線形光学において複屈折性をもつ光ファイバー中を伝播する 2 つのパルスの包絡線を記述する方程式として知られている．

我々は (CNLS) の解のうち次の形の解に注目する．

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + cx - c^2 t)} U(x - 2ct), \quad v(t,x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(st + cx - c^2 t)} V(x - 2ct). \tag{1.1}$$

ここで，$\omega > 0, s > 0, c \in \mathbb{R}$ は定数，U, V は実数値関数で $U(x), V(x) \to 0$ $(|x| \to \infty)$ をみたすものとする．このような解は孤立波解と呼ばれる．非線形光学の文脈では孤立波解は光のパルスに対応すると考えられ，その性質を調べることは数学的興味はもとより，光通信などへの応用可能性から工学的にも重要な意味を持つ．

以下，記述を簡単にするため $\alpha = \omega = 1, c = 0$ とおく．(CNLS) が Galilei 変換

$$(u,v)(t,x) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(cx - c^2 t)}(u,v)(t, x - 2ct)$$

に対して不変であることに注意すると，このように仮定しても一般性を失わないことがわかる．

(CNLS) は任意の $\beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}, s > 0$ に対して自明な孤立波解

$$(u,v)(t,x) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} U^{\mathrm{h}}(x), 0), \quad U^{\mathrm{h}}(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sech}(x)$$

を持つ．固定した γ, s に対して，β をパラメータとして変化させたときに自明な孤立波解から新たな孤立波解が分岐する現象が起きる．本稿では，この分岐現象について概説し，さらに分岐した孤立波解の線形安定性について得られた結果を述べる．線形安定性の解析には Evans 関数と呼ばれ

*yamazoe@amp.i.kyoto-u.ac.jp

るある解析関数が重要な役割を果たす．Evans 関数を用いた解析においては，(CNLS) の空間次元が 1 であることが本質的に用いられる．

関連する先行研究について言及しておく．本稿で孤立波解と読んでいるような空間的に局在した解は，反応拡散系や非線形波動を記述する方程式において頻繁に現れるものであり，それらの安定性の研究は膨大な量の先行研究がある．まず，非線形 Schrödinger 方程式系の孤立波解の軌道安定性については Ohta[11]，Nguyen[10] などの結果がある．次に，Evans 関数を用いた線形安定性の解析に限定すると，その研究は Evans[3] が神経系の方程式のパルス解の安定性を調べるために今日 Evans 関数と呼ばれている関数を用いたことに端を発する．その後，この方法は様々な研究者によって拡張された [1][5][7][8]．我々の研究に特に関連が深い結果としては Li and Promislow[9] による ((CNLS) とは異なる非線形項を持つ) 非線形 Schrödinger 方程式系の孤立波解の不安定性の研究がある．彼らは摂動パラメータに対して persistent な孤立波解を考えている一方で，我々は分岐した孤立波解に注目しているところが大きく異なる．この違いは，以下に述べる主定理 3.1 において Evans 関数の摂動展開の 1 次の項が消えることに反映されている．

本稿の構成は以下のようになっている．まず，第 2 節では孤立波解の分岐現象について既知の結果を述べる．この節の内容は Blázquez-Sanz and Yagasaki[2] に従った．第 3 節では分岐した孤立波解の線形安定性について得られた結果の紹介と証明の概略を述べる．最後に第 4 節で今後の課題を述べる．

2　孤立波解のピッチフォーク分岐

Blázquez-Sanz and Yagsaki[2] に従って，ホモクリニック軌道のピッチフォーク分岐の理論を (CNLS) の孤立波解 (1.1) に適用する．(1.1) の U, V が満たす方程式は

$$U'' - U + (U^2 + \beta V^2)U = 0, \quad V'' - sV + (\beta U^2 + \gamma V^2)V = 0. \tag{2.2}$$

である．これを 1 階化してできる方程式

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_2, \quad \xi_2' = \xi_1 - (\xi_1^2 + \beta\eta_1^2), \\ \eta_1' &= \eta_2, \quad \eta_2' = s\eta_1 - (\beta\xi_1^2 + \gamma\eta_1^2) \end{aligned}$$

に対して，分岐パラメータを β として分岐理論を適用すると，任意の $\gamma \in \mathbb{R}, s > 0$ に対して

$$\beta = \beta_\ell := \frac{(2\sqrt{s} + 2\ell + 1)^2 - 1}{8} \quad (\ell = 0, 1, \dots)$$

でピッチフォーク分岐が起きることがわかる．すなわち，$|\beta - \beta_\ell| \ll 1$ のとき

$$(u, v)(t, x) = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} U^{\mathrm{h}}(x),\ \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}st} C\sqrt{|\beta - \beta_\ell|}\phi(x)\right) + \mathcal{O}(\beta - \beta_\ell), \quad C > 0 \tag{2.3}$$

の形の孤立波解が存在する．

3　孤立波解の線形安定性

この節ではピッチフォーク分岐した孤立波解の線形安定性，すなわち線形化作用素のスペクトルを決定する問題について考える．

(CNLS) とその複素共役を取った方程式の連立系を考え，これを対応する孤立波解

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}U(x), \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}U(x), \mathrm{e}^{\mathrm{i}st}V(x), \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}V(x))$$

のまわりで線形化すると，線形化作用素 $\mathcal{L} : H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4) \to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4)$ は

$$\mathcal{L} = -\mathrm{i}\Sigma_3 \left(-\partial_x^2 + \begin{pmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & sI_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U^2(2I_2 + \sigma_1) + \beta V^2 I_2 & \beta_1 UV(I_2 + \sigma_1) \\ \beta UV(I_2 + \sigma_1) & \beta U^2 I_2 + \gamma V^2(2I_2 + \sigma_1) \end{pmatrix} \right)$$

と表される．ここで O_2 は 2 次の零行列,

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 := \begin{pmatrix} \sigma_3 & O_2 \\ O_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

と置いた．(CNLS) 単独ではなく，それの複素共役を取ったものとの連立系を考えた理由は，そうすることで $\mathcal{L}$ の非線形項由来の項がかけ算作用素となるためである．

孤立波解 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}U(x), \mathrm{e}^{\mathrm{i}st}V(x))$ が線形安定であるとは，$\mathcal{L}$ のスペクトル $\sigma(\mathcal{L})$ が左半平面 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\lambda \leq 0\}$ に含まれることを言うのだった．$\sigma(\mathcal{L})$ は点スペクトル $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{L})$ と本質的スペクトル $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L})$ の和集合で表される．また，本質的スペクトルが相対コンパクトな摂動に対して不変であること ([4], Theorem IV.5.35) から

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L}) = \mathrm{i}(-\infty, -\max\{1, s\}] \cup \mathrm{i}[\max\{1, s\}, +\infty)$$

であることが確かめられる．従って，$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{L})$，すなわち $\mathcal{L}$ の固有値の位置を決定することが問題となる．この問題に対する有効なアプローチが Evans 関数を用いた解析である．

講演では次の結果を紹介した．

定理 3.1. $\mathcal{L}$ のスペクトルの位置について，次が成り立つ．

1. ピッチフォーク分岐のまん中の枝 $(u, v)(t, x) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}U^{\mathrm{h}}(x), 0)$ について，$\mathcal{L}$ のすべての固有値は虚軸上にある．特に，孤立波解は線形安定である．
2. ピッチフォーク分岐の上下の枝 (2.3) について，$\mathcal{L}$ のすべての固有値は虚軸の $\mathcal{O}(\beta - \beta_\ell)$ 近傍にある．すなわち，固有値は摂動の *leading order* $\mathcal{O}(|\beta - \beta_\ell|^{1/2})$ の範囲では変化しない．

証明の鍵となる Evans 関数の構成と基本的な性質について述べる．固有値問題 $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$ を次の 1 階の微分方程式系に書き直す．

$$Y' = A(x, \lambda)Y, \tag{3.4}$$

ここで，$Y = (\psi_1, \psi_1', \ldots, \psi_4, \psi_4')^T, \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_4)^T$ とした．

$$A_0(\lambda) := \lim_{|x| \to \infty} A(x, \lambda)$$

とおく．

次の補題は (3.4) の解の漸近挙動が $Y' = A_0(\lambda)Y$ の解の漸近挙動によって特徴付けられることを示している．

補題 3.2. $A(x)$ を各成分が $x \in \mathbb{R}$ の連続関数であるような $n \times n$ 行列とする．対角化可能な行列 $A_0 = \lim_{|x| \to \infty} A(x)$ が存在して，さらに次を満たすと仮定する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|A(x) - A_0\| \, \mathrm{d}x < \infty.$$

ここで，$\|\cdot\|$ は行列の適当なノルムを表す．A_0 の固有値，固有ベクトルをそれぞれ $\mu_1,\dots,\mu_n$, $v_1,\dots,v_n$ とする．このとき，$j=1,\dots,n$ に対して $Y'=A(x)Y$ の解 $Y_j^{\mathrm{u}}, Y_j^{\mathrm{s}}$ が一意に存在して

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\mu_j x} Y_j^{\mathrm{u}}(x) = v_j, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\mu_j x} Y_j^{\mathrm{s}}(x) = v_j$$

が成り立つ．

我々の $A_0(\lambda)$ に対しては，固有値と固有ベクトルは次のように取れる．

$$\mu_1 = \sqrt{1-\mathrm{i}\lambda},\ \mu_2 = -\mu_1,\ \mu_3 = \sqrt{1+\mathrm{i}\lambda},\ \mu_4 = -\mu_3,$$
$$\mu_5 = \sqrt{s-\mathrm{i}\lambda},\ \mu_6 = -\mu_5,\ \mu_7 = \sqrt{s+\mathrm{i}\lambda},\ \mu_8 = -\mu_7,$$
$$(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_5 & \mu_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_7 & \mu_8 \end{pmatrix}.$$

補題 3.2 で存在が示された解 $Y_1^{\mathrm{u}},\dots,Y_8^{\mathrm{s}}$ に対して，$\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L})$ のとき

- Y_1^{u}, Y_3^{u}, Y_5^{u}, Y_7^{u} は $x\to-\infty$ で減衰するような (3.4) の解空間の基底,
- Y_2^{s}, Y_4^{s}, Y_6^{s}, Y_8^{s} は $x\to+\infty$ で減衰するような (3.4) の解空間の基底

になっていることに注意する．このとき，これらの解 $Y_1^{\mathrm{u}}, Y_2^{\mathrm{s}},\dots,Y_8^{\mathrm{s}}$ の Wronskian を $\mathcal{L}$ に付随する Evans 関数と呼び

$$E(\lambda) := \det(Y_1^{\mathrm{u}}, Y_2^{\mathrm{s}}, Y_3^{\mathrm{u}}, Y_4^{\mathrm{s}}, Y_5^{\mathrm{u}}, Y_6^{\mathrm{s}}, Y_7^{\mathrm{u}}, Y_8^{\mathrm{s}})(x,\lambda) \quad (\lambda\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L})) \tag{3.5}$$

と書く．なお，$\operatorname{tr} A(x,\lambda)=0$ であることから (3.5) の右辺は x に依らない．

Evans 関数の基本的な性質を次の補題にまとめる．

補題 3.3. 次が成り立つ．

1. $E(\lambda)$ は $\mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L})$ 上の正則関数である．
2. $\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L})$ が $\mathcal{L}$ の固有値であることと $E(\lambda_0)=0$ であることは同値である．
3. $\mathcal{L}$ の固有値 λ_0 の代数的多重度は $E(\lambda)$ の零点 λ_0 の位数と一致する．

$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L})$ に埋め込まれた固有値が摂動によってどのように動くかを決定するためには補題 3.3 では不十分である．この問題は Evans 関数を Riemann 面上の正則関数として見直すことにより解消される．

補題 3.3 によって，$\mathcal{L}$ の固有値を求める問題は正則関数 $E(\lambda)$ の零点を求める問題に帰着される．ピッチフォーク分岐のまん中の枝については Evans 関数が具体的に計算できて，次のようになる．

$$E(\lambda) = E_1(\lambda)E_2(\lambda)E_3(\lambda), \quad E_1(\lambda) = \frac{4\mu_1(\lambda)\mu_3(\lambda)(\mu_1(\lambda)-1)^2(\mu_3(\lambda)-1)^2}{(\mu_1(\lambda)+1)^2(\mu_3(\lambda)+1)^2},$$
$$E_2(\lambda) = -\frac{2\Gamma(\mu_5(\lambda)+1)^2}{\Gamma(\mu_5(\lambda)-\sigma)\Gamma(\mu_5(\lambda)+\sigma+1)}, \quad E_3(\lambda) = E_2(-\lambda), \qquad \sigma = \frac{-1+\sqrt{1+8\beta_1}}{2}.$$

ピッチフォーク分岐の上下の枝については Evans 関数は具体的には計算できないが，孤立波解 (2.3) の表示を基にして Evans 関数の摂動パラメータに関する導関数を計算することができ，それによって定理 3.1 が証明される．

4 今後の課題

今後の課題としては次のことが挙げられる．

- ピッチフォーク分岐の上下の枝についても線形安定性を決定する．そのためには Evans 関数の摂動展開をもう一つ高次の項まで行えばよい．具体的には，孤立波解 (2.3) の $\mathcal{O}(\beta-\beta_\ell)$ の項を決定することで，それを足がかりにして計算が実行できる．
- 孤立波解 (2.3) の軌道安定性や漸近安定性について調べる．もしこの孤立波解が線形安定であれば，そのことに加えて $\mathcal{L}$ の固有値に付随して定まる Krein signature と呼ばれる数を計算することで，軌道安定性を判定できる可能性がある [6].

参考文献

[1] J. Alexander, R. Gardner and C.K.R.T. Jones, A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves, *J. reine angew. Math.* **410** (1990), 167–212.

[2] D. Blázquez-Sanz and K. Yagasaki, Analytic and algebraic conditions for bifurcations of homoclinic orbits I: Saddle equilibria, *J. Differential Equations*, **253** (2012), 2916–2950.

[3] J. Evans, Nerve axon equations, I: Linear approximations, *Indiana Univ. Math. J.* **21** (1972), 877–955.

[4] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd. ed., Springer, Berlin, 1980.

[5] T. Kapitula, The Evans function and generalized Melnikov integrals, *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1998), 273–297.

[6] R. Kollár and P.D. Miller, Graphical Krein Signature Theory and Evans-Krein Functions, *SIAM Review* **56** (2014), 73–123.

[7] T. Kapitula and B. Sandstede, Stability of bright solitary-wave solutions to perturbed nonlinear Schrödinger equations, *Physica D* **124** (1998), 58–103.

[8] T. Kapitula and B. Sandstede, Edge bifurcation for near integrable systems via Evans function techniques, *SIAM J. Math. Anal.* **33** (2002), 1117–1143.

[9] Y.A. Li and K. Promislow, The mechanism of the polarizational mode instability in birefringent fiber optics, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000), 1351–1373.

[10] N.V. Nguyen, On the orbital stability of solitary waves for the 2-coupled nonlinear Schrödinger system, *Commun. Math. Sci.* **9** (2011), 997–1012.

[11] M. Ohta, Stability of solitary waves for coupled nonlinear Schrödinger equations, *Nonlinar Anal.* **26** (1996), 933–939.