トロピカル幾何学とモノドロミー変換

山本 悠登 *

東京大学大学院数理科学研究科，2016 年 2 月

1　概要

トロピカル幾何学は，通常の加法を 2 つの数の max をとる操作に，乗法を通常の加法 $+$ に取り換えて得られる max-plus 代数上の代数幾何学である．この max と plus の演算は，通常の演算 $+, \times$ のある種の極限（トロピカル極限）として現れるが，複素代数多様体にその極限を施すと，その多様体の “骨格” が現れる．この “骨格” が，トロピカル幾何学の主な研究対象であるトロピカル多様体である．

トロピカル多様体は，極限を取る前の元の多様体に関する様々な情報を持っていることが知られている．例えば Itenberg，Khazarkov，Mikhalkin，Zharkov [1] によって導入されたトロピカルホモロジーを用いれば，トロピカル多様体の組み合わせ的なデータから，元の複素多様体の Hodge 数を回復できることが知られられている．「トロピカル多様体から，元の多様体の情報をどこまで引き出せるか？」という問いが，トロピカル幾何学における中心的な課題の一つとなっている．

トロピカル多様体は（ある種のアファイン構造を持つ）多面複体であり，基本的にトロピカル多様体が持つ情報は，組み合わせ的なものに限られる．また，トロピカル化によって得られるトロピカル多様体の次元は，実次元で元の多様体の次元の半分になる．そのため，トロピカル極限を取る過程でかなりの情報を捨ててしまっていることになる．しかし，逆にその構造が組み合わせ的で単純である故にトロピカル多様体の取り扱いは比較的簡単で，様々な量を具体的に計算することを可能にする．

本講演では，トロピカル多様体と元の多様体のトロピカル極限周りのモノドロミーとの関係について述べる．[5] において，トーリック超曲面の場合に，それのトロピカル化によって得られるトロピカル多様体を用いて，元の多様体の幾何学的モノドロミーの具体的な記述を与えた．特に，一次元の場合にはモノドロミーが多様体のコホモロジーにどのように作用するのかも計算可能である．具体例を扱いながらこの結果を紹介する．

2　トロピカル幾何学

max-plus 代数 $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ は次のように定義される．$\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ として，これに加法 $\oplus$，乗法 $\odot$ を

$$a \oplus b := \max\{a, b\}, \quad a \odot b := a + b \qquad (a, b \in \mathbb{T}) \tag{2.1}$$

*yuto@ms.u-tokyo.ac.jp

で与える．$(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ は結合法則や交換法則を満たすが，加法 $\oplus$ に関して逆元が必ずしも存在しない．そのため，これは環にはならず半環と呼ばれる．

トロピカル幾何学における多項式は，次の形の関数 $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ として定義される．

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \bigoplus_{m \in A} a_m \odot X_1^{m_1} \odot \cdots \odot X_{n+1}^{m_{n+1}} \\ &= \max_{m \in A} \{a_m + m_1 X_1 + \cdots + m_{n+1} X_{n+1}\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで，$n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$ で，A は $\mathbb{Z}^{n+1}$ の有限部分集合とする．各 $a_m \odot X_1^{m_1} \odot \cdots \odot X_{n+1}^{m_{n+1}}$ が単項式であり，それらはすべて $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の一次関数である．そして，全ての単項式の max を取って得られる F は $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の下に凸な区分線型関数を定める．

また，トロピカル多項式 F が定める超曲面 $V(F) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は，次で定義される．

$$V(F) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \exists p \neq \exists q \in A, \text{s.t. } F(X) = a_p + p \cdot X = a_q + q \cdot X \right\}. \tag{2.3}$$

ここで，$p \cdot X$ は $p_1 X_1 + \cdots + p_{n+1} X_{n+1}$ を表す．$q \cdot X$ も同様である．

トロピカル幾何学と複素代数幾何学の間の関係を考える上で用いる典型的な対象は，収束 Puiseux 級数体や収束 Laurent 級数体上の多項式である．ここでは，収束 Laurent 級数体 $K := \mathbb{C}\{t\}$ を用いる．これは次の標準的な非アルキメデス付値を持つ．

$$\mathrm{val}\colon K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \quad k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j t^j \mapsto -\min \{j \in \mathbb{Z} \mid c_j \neq 0\}. \tag{2.4}$$

K 上の Laurent 多項式 $f = \sum_{m \in A} k_m x^m \in K[x_1^{\pm}, \cdots, x_{n+1}^{\pm}]$ のトロピカル化とは，次式で与えられるトロピカル多項式 $\mathrm{trop}(f)\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ である．

$$\mathrm{trop}(f)(X_1, \cdots, X_{n+1}) := \max_{m \in A} \; \{\mathrm{val}(k_m) + m_1 X_1 + \cdots + m_{n+1} X_{n+1}\}. \tag{2.5}$$

トロピカル化によって得られる超曲面と元の複素代数超曲面の間には，次のような関係がある．まず，十分大きい実数 $R \in \mathbb{R}^{>0}$ をとり固定する．$f_R \in \mathbb{C}[x_1^{\pm}, \cdots, x_{n+1}^{\pm}]$ を f の t に $1/R$ を代入して得られる $\mathbb{C}$ 上の Laurent 多項式とする．さらに，$\mathrm{Log}_R\colon (\mathbb{C}^*)^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ を

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\log_R |x_1|, \dots, \log_R |x_{n+1}|) \tag{2.6}$$

とし，$\mathcal{A}_R := \mathrm{Log}_R \left(\left\{ x \in (\mathbb{C}^*)^{n+1} \;\middle|\; f_R(x) = 0 \right\} \right)$ とおく．

Theorem 2.1. ([3, 4]) $R \to \infty$ の極限の下で，$\mathcal{A}_R$ は，$V(\mathrm{trop}(f))$ に Hausdorff 収束する．

ここで，$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合の Hausdorff 収束は，次の Hausdorff 距離によって定義される．

$$d(X, Y) := \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(X, y) \right\}, \quad (X, Y \subset \mathbb{R}^{n+1}) \tag{2.7}$$

Example 2.2. K 上の多項式 f が次で与えられる場合を考える．

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 + x_2 \left(x_1^3 + t^{-2} x_1^2 + t^{-2} x_1 + t^{-1} \right) + 1. \tag{2.8}$$

このとき f のトロピカル化は，

$$\mathrm{trop}(f)(X_1, X_2) = \max \{2X_2, 3X_1 + X_2, 2X_1 + X_2 + 2, X_1 + X_2 + 2, X_2 + 1, 0\} \tag{2.9}$$

となる．図 2.1 の太線部は，$\mathrm{trop}(f)$ によって定められるトロピカル超曲面 $V(\mathrm{trop}(F))$ を示している．また，$\mathcal{A}_R$ は図 2.2 の灰色の領域のようになる．

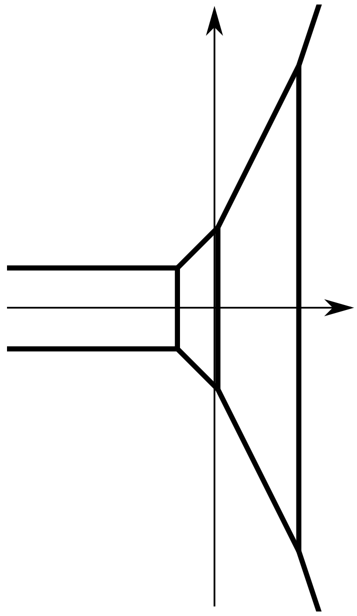

図 2.1: (2.8) の場合の $V(\mathrm{trop}(f))$

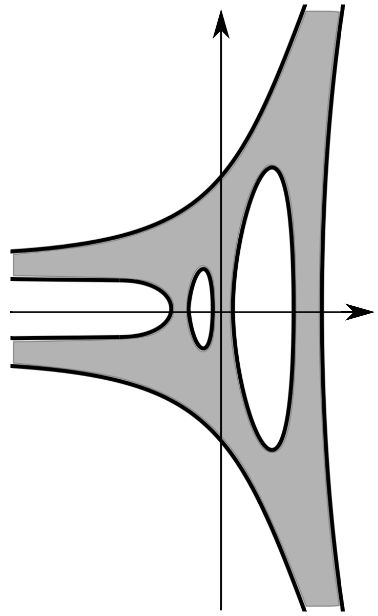

図 2.2: (2.8) の場合の $\mathcal{A}_R$

3　設定

$K := \mathbb{C}\{t\}$ を収束 Laurent 級数体とする．$n \in \mathbb{N}$ を自然数とし，M を階数 $n+1$ の自由 Z-加群とする．また，$M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とし，$\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$ を凸格子多面体とする．$A := \Delta \cap M$ とおく．さらに，$f = \sum_{m \in A} k_m x^m \in K[x_1^{\pm}, \cdots, x_{n+1}^{\pm}]$ を K 上の $n+1$ 変数 Laurent 多項式とする．ただし，全ての $m \in A$ に対して $k_m \neq 0$ であると仮定する．十分大きい実数 $R \in R^{>0}$ をとり固定する．$S_R^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ とおく．$q \in S_R^1$ に対して，$f_q \in \mathbb{C}[x_1^{\pm}, \cdots, x_{n+1}^{\pm}]$ を f の t に $1/q$ を代入して得られる $\mathbb{C}$ 上の多項式とする．$(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ での f_q の零点集合を適当にコンパクト化したものを V_q とする．$\{V_q\}_{q \in S_R^1}$ の $q = \infty$ 周りのモノドロミー変換について考える．

モノドロミーを考える上で本質的ではないが，ここでのコンパクト化について正確に述べると，$\mathcal{F}$ を Δ に対する正規扇とし，それのユニモジュラーな細分 $\mathcal{F}'$ をとる．$X_{\mathcal{F}'}$ を $\mathcal{F}'$ に関する $\mathbb{C}$ 上のトーリック多様体とする．$V_q \subset X_{\mathcal{F}'}$ を f_q によって定められる $X_{\mathcal{F}'}$ 内のトーリック超曲面として考える．

4　一次元の場合のモノドロミー

超曲面が一次元の場合 $(n = 1)$ に限って主結果を紹介する．[5] では，一般の次元 n でのモノドロミー変換についても述べている．$\{\rho_i\}_{i=1,\ldots d}$ を $V(\mathrm{trop}(f))$ の有界な辺全体の集合とする．各辺 ρ_i には，次のようにしてその長さ $L_i \in \mathbb{R}^{>0}$ を定義することができる．$\nu_{i1}, \nu_{i2} \in \mathbb{R}^{n+1}$ を ρ_i の端点とし，原始的なベクトル $V_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$ を用いて $\nu_{i1} - \nu_{i2} = l_i V_i (l_i \in \mathbb{R}^{>0})$ と書けるとする．このとき，ρ_i の長さを $L_i := l_i$ と定義する．また，$C_i (i = 1, \ldots d)$ を各 ρ_i に対応する $V_{q=R}$ 上の単純閉曲線とし，$T_i \colon V_{q=R} \to V_{q=R}$ を C_i に沿った Dehn 振りとする．

Theorem 4.1. ([5, Corollary 1.1.]) $n=1$ の場合，$\{V_q\}_{q\in S^1_R}$ のモノドロミー変換は，$T_1^{L_1}\circ\cdots\circ T_d^{L_d}$ によって与えられる．

これは，日本数学会 2010 年度秋季総合分科会の岩尾氏による企画特別講演 [2] において，予想として述べられている．

5 具体例

再び (2.8) の例を考える．このとき，

$$f_q(x_1,x_2)=x_2^2+x_2\left(x_1^3+q^2x_1^2+q^2x_1+q^1\right)+1. \tag{5.1}$$

図 5 に示すように，$\rho_i(i=1\ldots 7)$ を $V(\mathrm{trop}(F))$ の辺とし，C_i を ρ_i に対応する $V_{q=R}$ 上の単純閉曲線とする．左の図の背景にある格子は，$\mathbb{Z}^2\subset\mathbb{R}^2$ を示す．

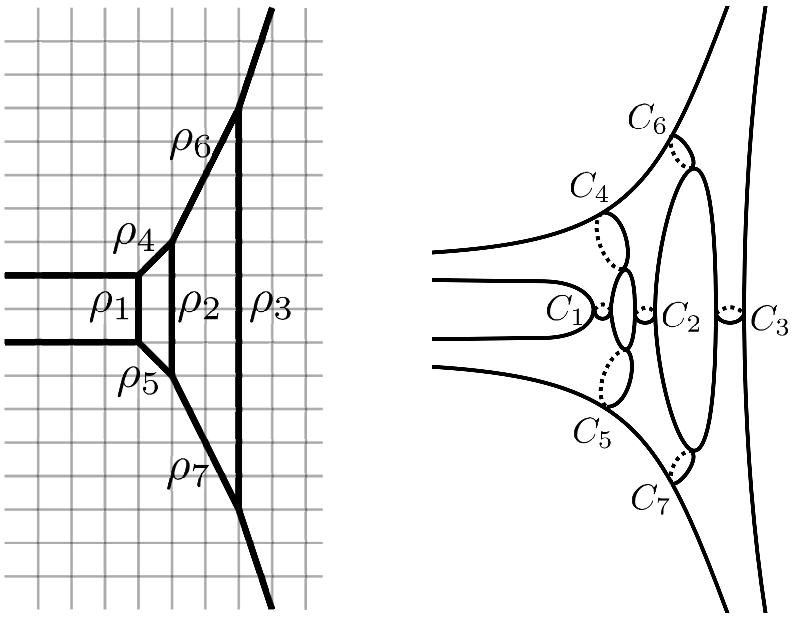

図 5.1: (2.8) の場合のトロピカル超曲面 $V(\mathrm{trop}(f))$ とトーリック超曲面 V_q

各 ρ_i の長さ L_i は，その辺の上にある格子の数を数えることで，

$$L_1=2,\quad L_2=4,\quad L_3=12,\quad L_4=L_5=1,\quad L_6=L_7=2 \tag{5.2}$$

とわかり，Theorem 4.1 から $\{V\}_{q\in S^1_R}$ のモノドロミー変換が

$$T_1^2\circ T_2^4\circ T_3^{12}\circ T_4\circ T_5\circ T_6^2\circ T_7^2 \tag{5.3}$$

によって与えられることが分かる．

参考文献

[1] I. Itenberg, L. Khazarkov, G. Mikhalkin, and I. Zharkov. *Tropical homology*, In preparation.

[2] 岩尾慎介，複素積分 vs トロピカル積分，日本数学会 2010 年度秋季総合分科会企画特別講演，http://mathsoc.jp/videos/2010shuuki.html, 2010.

[3] Grigory Mikhalkin, *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*, Topology **43** (2004), no. 5, 1035-1065.

[4] Hans Rullgärd, *Polynomial amoebas and convexity*, Preprint, Stockholm University, 2001.

[5] Yuto Yamamoto, *Geometric monodromy around the tropical limit*, arXiv:1509.00175.