線形常微分方程式とルート系

山川 大亮 *

東京工業大学 大学院理工学研究科，2016 年 2 月

次のような形で表される連立線形常微分方程式を**フックス系**と呼ぶ：

$$\frac{dv}{dx} = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{x - t_i} v.$$

ここで独立変数 x は複素変数，未知関数 v はある有限次元複素ベクトル空間 V に値を取る x の関数で，A_i 達は x に依らない V の線形変換，$t_1, \ldots, t_m$ は $\mathbb{C}$ 内の相異なる m 点である．本稿は，フックス系に対する（加法版）Katz の定理と箙（えびら）のワイル群との関係について紹介した第 13 回城崎新人セミナーにおける講演内容をまとめたものである．

1 中間畳み込みと Katz の定理

この節で，[8] における Katz の理論を基に Dettweiler–Reiter が導入した加法的中間畳み込みと呼ばれるものを定義し，それを用いて加法版 Katz の定理を紹介する．

以降，有限次元複素ベクトル空間 V と有限個の線形変換 $A_1, \ldots, A_m \in \mathrm{End}(V)$ からなる組 $(V, \boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{A} := (A_i)_{i=1}^m$ を**留数データ**と呼ぶ事にする．留数データ $(V, \boldsymbol{A})$ 及び $\mathbb{C}$ 内の相異なる m 点 $t_1, \ldots, t_m$ が与えられるとそれに付随してフックス系 $dv/dx = \sum_{i=1}^m A_i(x - t_i)^{-1} v$ が定まる事に注意しておこう．

定義 1.1. 留数データ $(V, \boldsymbol{A})$ 及び複素数 λ に対し，次のようにして定まる留数データ $(V', \boldsymbol{A}')$ を $mc_\lambda(V, \boldsymbol{A})$ と書いて $(V, \boldsymbol{A})$ の λ による**（加法的）中間畳み込み**と呼ぶ：

1. $W = \bigoplus_{i=1}^m (V/\operatorname{Ker} A_i)$ とおき，直和成分 $V/\operatorname{Ker} A_i$ に対応する W の射影子を E_i とおく．
2. $Q\colon V \to W$ を $v \mapsto (v + \operatorname{Ker} A_i)_{i=1}^m$ と定め，$P\colon W \to V$ を $(v_i + \operatorname{Ker} A_i)_{i=1}^m \mapsto \sum_{i=1}^m A_i v_i$ と定める．（このとき $PE_iQ = A_i$ が成り立つ事に注意しよう．）
3. $V' = W/\operatorname{Ker}(QP + \lambda \mathrm{Id}_W)$ とおき，W から V' への自然な全射を P'，$QP + \lambda \mathrm{Id}_W$ が誘導する単射 $V' \to W$ を Q' とおく．（従って $Q'P' = QP + \lambda \mathrm{Id}_W$ が成り立つ．）
4. $\boldsymbol{A}' = (A'_i)_{i=1}^m$ を $A'_i = P'E_iQ'$ と定める．

このように中間畳み込みは留数データの純粋に代数的な変換であるが，フックス系の変換と考えたとき解析的な意味を持つ．これについて少し説明しよう．

*yamakawa@math.titech.ac.jp

$t_1, \dots, t_m$ を $\mathbb{C}$ 内の相異なる m 点とし，留数データ $(V, \boldsymbol{A})$ にフックス系

$$\frac{dv}{dx} = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{x - t_i} v$$

を対応させよう．このとき定義の記号を用いて $T = \sum_{i=1}^{m} t_i E_i \in \mathrm{End}(W)$ とおくと，

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{x - t_i} = \sum_{i=1}^{m} P(x - t_i)^{-1} E_i Q = P(x \,\mathrm{Id}_W - T)^{-1} Q$$

が成り立つ．そこで $\partial_x = d/dx$ とおいて $V \oplus W$ に値を取る関数に対する方程式

$$\begin{pmatrix} \partial_x \,\mathrm{Id}_V & -P \\ Q & -x \,\mathrm{Id}_W + T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を考えると，これは元のフックス系と本質的に同じ方程式である．実際，フックス系の解 v に対し $w = (x \,\mathrm{Id}_W - T)^{-1} Q v$ とおけば v, w は上の方程式の解となり，逆に関しても方程式の第 2 行から $Qv = (x \,\mathrm{Id}_W - T) w$，すなわち $w = (x \,\mathrm{Id}_W - T)^{-1} Q v$ を第 1 行に代入する事でフックス系

$$\partial_x v = P w = P(x \,\mathrm{Id}_W - T)^{-1} Q v = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{x - t_i} v$$

が得られる．さて書き換えた方程式に対し，形式的なラプラス変換を施してみよう．すなわち新しい独立変数 y を導入し，∂_x を y に，x を $-\partial_y$ に置き換える．すると新しい方程式

$$\begin{pmatrix} y \,\mathrm{Id}_V & -P \\ Q & \partial_y \,\mathrm{Id}_W + T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \check{v} \\ \check{w} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が得られる．これから $\check{v}$ を消去すると

$$\partial_y \check{w} = -T \check{w} - Q \check{v} = -\left(T + \frac{QP}{y} \right) \check{w}$$

となる．

一方，$mc_\lambda(V, \boldsymbol{A}) = (V', \boldsymbol{A}')$ に対しても

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{A'_i}{x - t_i} = \sum_{i=1}^{m} P'(x - t_i)^{-1} E_i Q' = P'(x \,\mathrm{Id}_W - T)^{-1} Q'$$

が成り立つので，これも

$$\begin{pmatrix} \partial_x \mathrm{Id}_{V'} & -P' \\ Q' & -x \,\mathrm{Id}_W + T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

と書き換える事ができる．先と同様，ラプラス変換を施して未知関数の片方を消去する事で方程式

$$\partial_y \check{w}' = -\left(T + \frac{Q'P'}{y} \right) \check{w}'$$

を得る．$Q'P' = QP + \lambda \,\mathrm{Id}_W$ であるから，$\check{w}' = y^{-\lambda} \check{w}$ によって二つの微分方程式が移り合う事が分かる．

まとめると，$(V, \boldsymbol{A})$ と $mc_\lambda(V, \boldsymbol{A})$ は，両者のある種のラプラス変換がべき関数をかける操作によって結びつくような関係にある．これが「畳み込み」と呼ばれる所以である．

加法版 Katz の定理は，ある特別なクラスの留数データに対し，中間畳み込みを用いてその下部ベクトル空間の次元を簡約するアルゴリズムを与える．

留数データ $(V, \boldsymbol{A})$ に対し $A_0 = -\sum_{i=1}^m A_i \in \mathrm{End}(V)$ とおく．留数定理から

$$A_0 = \operatorname*{res}_{x=\infty}\left(\sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x-t_i}\,dx\right)$$

が成り立つ事に注意しよう．また $A \in \mathrm{End}(V)$ に対し $\mathrm{ad}_A\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ を $\mathrm{ad}_A(X) = AX - XA$ と定める．

定義 1.2. (1) 留数データ $(V, \boldsymbol{A})$ が**既約**であるとは，$A_1, \ldots, A_m$ で保たれる V の部分ベクトル空間が $\{0\}, V$ のみである事をいう．

(2) 既約留数データ $(V, \boldsymbol{A})$ は，等式

$$\sum_{i=0}^m \operatorname{rank}\mathrm{ad}_{A_i} = 2(\dim V)^2 - 2$$

が成り立つとき**剛性を持つ**という．

何故上の等式が成り立つとき「剛性を持つ」というのかは次の事実が教えてくれる：

定理 1.3. (1) 任意の n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，その共役類 $\mathcal{O}$ は $M_n(\mathbb{C})$ の複素部分多様体で次元は $\operatorname{rank}\mathrm{ad}_A$ に等しい．

(2) $M_n(\mathbb{C})$ の共役類 $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_m$ に対し，

$$\mathcal{M}(n; \mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_m) := \left\{ (A_i)_{i=0}^m \in \prod_{i=0}^m \mathcal{O}_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^m A_i = 0,\ (\mathbb{C}^n, (A_i)_{i=1}^m)\ \text{は既約} \right\} / \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

は空でなければ連結な複素多様体の構造を持ち，次元は $\sum_{i=0}^m \operatorname{rank}\mathrm{ad}_{A_i} - 2n^2 + 2$ に等しい．ここで A_i は $\mathcal{O}_i$ の任意の元である．

$\mathcal{M}(n; \mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_m)$ を**留数多様体**と呼ぶ．

補足 1.4. (1) 定理 (1) は代数群の作用に関する一般的事実から従う．

(2) $\mathcal{M}$ が複素多様体の構造を持つ事は，シンプレクティック幾何学におけるハミルトン簡約の理論と，複素リー群の固有作用に関するスライス定理を用いて示す事ができる．ハミルトン簡約やスライス定理に関しては例えば [5] を参照されたい．

(3) $\mathcal{M}$ が空でないための $\mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_m$ に対する必要十分条件を求める問題は**加法的** *Deligne–Simpson* **問題**と呼ばれている．これは $\mathcal{M}$ の連結性と併せて Crawley-Boevey によって [2, 3] において解かれた．

中間畳み込みは留数多様体の間の写像として次のような性質を持つ：

定理 1.5. mc_λ は留数多様体の間の双正則写像

$$\mathcal{M}(n; \mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_m) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{M}(n'; \mathcal{O}'_0, \ldots, \mathcal{O}'_m)$$

を誘導する．また双正則写像として $mc_\lambda \circ mc_\mu = mc_{\lambda+\mu}$, $mc_0 = \mathrm{Id}$ を満たす．

留数データ $(V, \boldsymbol{A})$ 及び複素数の組 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m$ に対し

$$add_{\boldsymbol{\lambda}}(V, \boldsymbol{A}) = (V, (A_i + \lambda_i \mathrm{Id}_V)_{i=1}^m)$$

とおく．

定理 1.6 (加法版 Katz の定理 [4])**.** $(V, \boldsymbol{A})$ を剛性を持つ既約留数データとし，$\dim V > 1$, $A_0 = 0$ と仮定する．各 A_i の固有値 λ_i で固有空間の次元が最も大きいものを取り，

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i,\ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^{m}, \quad (V', \boldsymbol{A}') = (add_{-\boldsymbol{\lambda}} \circ mc_\lambda \circ add_{-\boldsymbol{\lambda}})(V, \boldsymbol{A})$$

とおくと，$\dim V' < \dim V$, $A'_0 = 0$ が成り立つ．

もし $\dim V' > 1$ ならば，$(V', \boldsymbol{A}')$ に更に定理を適用する事ができる．このようにして，剛性を持つ既約留数データは行列のスカラーシフトと中間畳み込みを有限回繰り返す事で $\dim V = 1$ とする事ができる．中間畳み込みは未知関数のある種の畳み込みと関係するため，このアルゴリズムによって剛性を持つ既約フックス系の解の積分表示を得る．例えば [6] を参照されたい．

2　中間畳み込みと鏡映

定義 2.1. 有限集合 $\mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_1$ と写像 $\mathsf{s}, \mathsf{t} \colon \mathsf{Q}_1 \to \mathsf{Q}_0$ からなる四つ組 $\mathsf{Q} = (\mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_1, \mathsf{s}, \mathsf{t})$ を**箙**（有向グラフ）と呼ぶ．Q_0 の元を頂点，Q_1 の元を矢と呼び，$a \in \mathsf{Q}_1$ に対し $\mathsf{s}(a)$ を a の始点，$\mathsf{t}(a)$ を a の終点と呼ぶ．

以降箙はループを持たない，すなわち任意の $a \in \mathsf{Q}_1$ に対し $\mathsf{s}(a) \neq \mathsf{t}(a)$ を満たすものしか考えない．

格子 $\mathbb{Z}^{\mathsf{Q}_0} = \bigoplus_{p \in \mathsf{Q}_0} \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_p$ 上の対称双線形形式

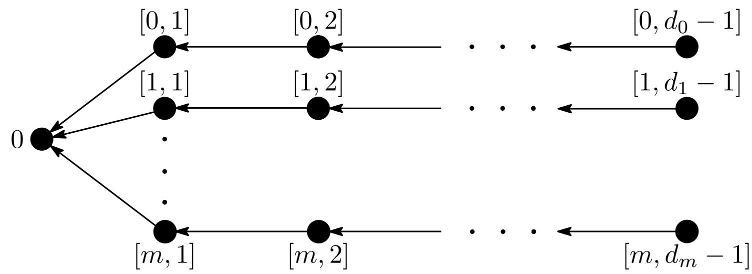
$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = 2 \sum_{p \in \mathsf{Q}_0} n_p m_p - \sum_{a \in \mathsf{Q}_1} (n_{\mathsf{s}(a)} m_{\mathsf{t}(a)} + n_{\mathsf{t}(a)} m_{\mathsf{s}(a)})$$

に関する $\boldsymbol{e}_p$ の**鏡映**

$$s_p \colon \mathbb{Z}^{\mathsf{Q}_0} \to \mathbb{Z}^{\mathsf{Q}_0}; \quad \boldsymbol{n} \mapsto \boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_p)\boldsymbol{e}_p$$

が生成する群 $W := \langle s_p \mid p \in \mathsf{Q}_0 \rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{\mathsf{Q}_0})$ を**ワイル群**と呼ぶ．

留数多様体を定めるデータ $(n; \mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_m)$ が与えられたとき，各 $\mathcal{O}_i$ の最小多項式の次数を d_i として次のような**星形箙** Q を考える．



$\mathcal{O}_i$ の最小多項式の根を重複度込みで $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \ldots, \lambda_{i,d_i}$ と並べ，$A_i \in \mathcal{O}_i$ を任意に取って $\boldsymbol{n} = (n_p)_{p \in \mathsf{Q}_0} \in \mathbb{Z}^{\mathsf{Q}_0}$ を

$$n_0 = n, \quad n_{[i,j]} = \mathrm{rank}(A_i - \lambda_{i,1} I_n) \cdots (A_i - \lambda_{i,j} I_n)$$

と定める．すると $\dim \mathcal{M}(n; \mathcal{O}_0, \ldots, \mathcal{O}_m) = 2 - (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})$ が成り立つ事を確かめられる．

また $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_p)_{p \in \mathsf{Q}_0} \in \mathbb{C}^{\mathsf{Q}_0}$ を

$$\zeta_0 = -\sum_{i=0}^{m} \lambda_{i,1}, \quad \zeta_{[i,j]} = \lambda_{i,j} - \lambda_{i,j+1}$$

と定める．

定理 2.2. 留数多様体を定めるデータ $(n;\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_m)$, $(n';\mathcal{O}'_1,\ldots,\mathcal{O}'_m)$ が二つ与えられたとし，上記の方法で各々に $(\mathsf{Q},\boldsymbol{n},\boldsymbol{\zeta})$, $(\mathsf{Q}',\boldsymbol{n}',\boldsymbol{\zeta}')$ が付随しているとする．Q, Q' を含む脚が m 本の星形箙 $\widetilde{\mathsf{Q}}$ を取り，自明な方法で $\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'\in\mathbb{Z}^{\widetilde{\mathsf{Q}}_0}$, $\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}'\in\mathbb{C}^{\widetilde{\mathsf{Q}}_0}$ とみなす．もしある $p\in\widetilde{\mathsf{Q}}_0$ について $(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{\zeta}')=(s_p(\boldsymbol{n}),s_p^T(\boldsymbol{\zeta}))$, $\zeta_p\neq 0$ なら，ある $\boldsymbol{\lambda}$ に関する $add_{-\boldsymbol{\lambda}}\circ mc_\lambda\circ add_{-\boldsymbol{\lambda}}$ によって双正則写像

$$\mathcal{M}(n;\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_m)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{M}(n';\mathcal{O}'_1,\ldots,\mathcal{O}'_m)$$

が定まる．

この事実は例えば [1] で（特別な場合に）紹介されている．これを用いる事で，加法版 Katz の定理におけるアルゴリズムをワイル群の作用によって解釈する事ができる．

こういった中間畳み込みの概念や箙のワイル群作用との関係については，最近フックス系ではない連立線形常微分方程式 $dv/dx=A(x)v$ についても理解が進んでいる．これについては [9, 7]，またそれらで引用されている文献を参照すると良い．

参考文献

[1] P. Boalch, *Quivers and difference Painlevé equations*, Groups and symmetries, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 25–51.

[2] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, Compositio Math. **126** (2001), no. 3, 257–293.

[3] ———, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero*, Duke Math. J. **118** (2003), no. 2, 339–352.

[4] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), no. 6, 761–798.

[5] V. Guillemin, V. Ginzburg, and Y. Karshon, *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, Appendix J by Maxim Braverman.

[6] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房叢書, 数学書房, 2015.

[7] K. Hiroe, *Linear differential equations on the Riemann sphere and representations of quivers*, preprint (2013), arXiv:1307.7438.

[8] N. M. Katz, *Rigid local systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[9] D. Yamakawa, *Middle convolution and Harnad duality*, Math. Ann. **349** (2011), no. 1, 215–262.