積分変換と $\mathcal{D}$ 加群

八尋耕平*

東京大学大学院数理科学研究科，2016 年 2 月

1 イントロダクション

この文書の前半では積分変換に関する古典的な結果について述べ、後半では $\mathcal{D}$ 加群の積分変換について説明する。前半部分は主に Helgason の本 [H] に従う。記号は気に入らないものが多いので Helgason とは違うものも使っている。主張の仮定も述べやすいように弱くしてある。D 加群の積分変換に関しては Goncharov(Adv. in Math., 1997) の論文が前半の内容との関連性が強いが、理解する余裕がなかったので D'Agnolo Schapira[DS] の結果を紹介する。

2 積分変換

X をリーマン多様体とする。リーマン多様体 S で添え字付けられた X の "連続的に変化"する部分多様体の族 $\{Z_s\}_{s\in S}$ が与えられているとする。"連続的に変化"するということは正確に定義できないが、以下で現れる例は等質空間で S はひとつの部分多様体を群の作用で動かしたもの全体の集合 (これも等質空間) になっているのでこの点は問題ない。

$\mathcal{C}_c(X)$ で X 上の台がコンパクトな連続関数の空間を表す。次のように定義される写像を積分変換 (またはラドン変換) と呼ぶ。

$$\mathcal{C}_c(X) \ni f(x) \mapsto I(f)(s) := \hat{f}(s) := \int_{x\in Z_s} f(x)dx \in \mathcal{C}_c(S)$$

各 $x \in X$ に対して S の部分集合 $\check{x} := \{s \in S | x \in X_s\}$ が X の部分多様体であって、"連続的に変化"すれば、次のような線形写像も定義できる。

$$\mathcal{C}_c(S) \ni \phi(s) \mapsto \check{\phi}(x) := \int_{s\in\check{x}} f(s)ds \in \mathcal{C}_c(S)$$

これら二つの線形写像は次の意味で互いに随伴になっている。

$$\int \hat{f}(s)\phi(s)ds = \int f(x)\check{\phi}(x)dx$$

Remark. リーマン多様体の仮定は部分多様体に自然な測度を入れるためだけに課している。

このような X, S にはたとえば以下のようなものがある。

例 2.1. $X = \mathbb{R}^n$, $S = \tilde{G}_{d,n}$: $\mathbb{R}^n$ の d 次元アファイン部分空間全体の集合。

*yahiro@ms.u-tokyo.ac.jp

例 2.2. K を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいづれかとするとき、$X = \mathbb{P}^n_K$, $S = G(d, n+1 : K)$: K^{n+1} の d 次元 K 部分空間 (=$\mathbb{P}^n_K$ の $d-1$ 次元超平面の集合) 全体の集合

積分変換について、ここでは以下のような問題を考える。

Q1. f の性質と $I(f)$ の性質の間にはどのような関係があるか？

Q2. I の像 (核) はどのようなものになるか？

Q3. I の核が 0 のとき、f を $I(f)$ からどのように復元することができるか?

この節では $X = \mathbb{R}^n$, S が X 内の超平面すべてからなる集合 $\widetilde{G}_{n-1,n}$ のときにひとつの答を与える。

$\mathbb{R}^n$ 内の超平面は単位法線ベクトル $\omega \in S^{n-1}$ と実数 $p \in \mathbb{R}$ により $\{x \in \mathbb{R}^n | (\omega, x) = p\}$ と表せる。(ω, p) と $(-\omega, -p)$ は同じ超平面を定めるので $S^{n-1} \times \mathbb{R}/\{\pm\} \cong \widetilde{G}_{n-1,n}, (\omega, p) \mapsto \{x \in \mathbb{R}^n | (\omega, x) = p\}$ という写像ができる。これは全単射である。以下ではこの全単射で $\widetilde{G}_{n-1,n}$ をリーマン多様体だと思うことにする。

Q1. の f の性質と $I(f)$ の性質の間の関係としてはたとえば次のようなことが知られている。$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ で $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数の空間を表す。

定理 2.3 ([H, Theorem. 2.6])**.** $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し次が成立。

ある正の実数 A が存在して任意の ω, p で $|p| > A$ を満たすものに対し $\hat{f}(\omega, p) = 0$ であるとする。このとき任意の $x \in \mathbb{R}^n$ で $|x| > A$ を満たすものに対し $f(x) = 0$ である。

Q2. この場合には I は単射である。I の像については次のことが知られている。

定理 2.4 ([H, Theorem. 2.4])**.** $I : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \cong \mathcal{S}_H(\widetilde{G}(n-1, n))$

ただし $\mathcal{S}_H(\widetilde{G}(n-1,n)) := \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{G}(n-1,n)) | \phi$を $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ に引き戻すと $\mathbb{R}$ の方向に急減少関数であり、かつ任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\int_{p\in\mathbb{R}} \phi(\omega, p) p^k dp$ は $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数として多項式で表される。$\}$

$\mathcal{S}_H$ の定義に現れる条件は Cavalieri condition と呼ばれている。

Q3. f は $I(f)$ から次のように復元される。

L を $\mathbb{R}^n$ 上の Laplacian とする。

定理 2.5 ([H, Theorem. 3.1])**.** n は奇数とする。このとき次が成立する。

$$(4\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(1/2)} f = (-L)^{\frac{n-1}{2}} \check{\hat{f}}, f \in C^\infty$$

n が偶数のときも $(-L)^{\frac{n-1}{2}}$ を適切に定義すれば (Riesz distribution, [H, Chapter I, §3 および Chapter V, §5]) 同じ等式が成立する。

3 インタールード

D 加群の積分変換につなげるため、この節では §2 で定義した積分変換を関手的な言葉で言い換える。設定は §2 と同じとする。$X \times S$ の部分集合 C を $C := \{(x, s) \in X \times S | x \in Z = s\}$ で定める (部分多様体であると仮定する)。写像 $p_1^* : \mathcal{C}_c(X) \to \mathcal{C}_c(C)$, $p_{2!} : \mathcal{C}_c(C) \to \mathcal{C}_c(S)$ を以下で定義する。

$$(p_1^* f)(x, s) = f(x), \qquad (p_{2!} F)(s) = \int_{x \in Z_s} F(x, s) dx$$

すると積分変換 I は $I = p_{2!} \circ p_1^*$ と書ける。このように書き直すと、積分変換 I は順像と逆像の定義される各 “sheaf theory” に対して定義することができる。C 上の関数 K に対して、K を核とする積分変換 I_K は $I(f) = p_{2!}(p_1^*(f) \cdot K)$ と書ける。このような “sheaf theory” の例としては、局所コンパクト空間上の層 (Kashiwara Schapira ’90)、代数多様体や複素多様体上の D 加群や E 加群 (D’Agnolo Schapira)、代数多様体上の ℓ 進層 (Laumon)、代数多様体上の連接層 (Mukai) がある。

次の節では D 加群の積分変換について説明する。

4　D 加群の積分変換

4.1　D 加群

この節では複素多様体上の D 加群の積分変換を扱う。標数 0 の体上の代数多様体でも D 加群を考えることはできるが,、D 加群の解の層に関係する部分は複素多様体を持ち出さないとうまく機能しない。実多様体上では特性多様体の部分などもうまくいかないようである。

複素多様体 X に対し、$\mathcal{O}_X$ で正則関数の層をあらわし、$\mathcal{D}_X$ で正則関数係数の有限階の微分作用素のなす層をあらわす。D 加群とは $\mathcal{D}_X$ 加群のことを指す。この文書では $\mathcal{D}_X$ 加群は左加群のみ考える。

D 加群は微分方程式系を抽象化 (一般化？) したものである。たとえば P_i, $1 \leq i \leq n$ を X 上の微分作用素とし、$\mathcal{M} := \mathcal{D}/(P_1, \ldots, P_n)$ とおく。この $\mathcal{D}_X$ 加群に対し次のような同型がある。

$$\mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)(U) \cong \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) | P_1 f = \cdots = P_n f = 0\}$$

この式は $\mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ が、X の各開集合 U に対し U 上の $P_1 f = \cdots P_n f = 0$ の解を与える層と同型であることを示している。とくに $\mathrm{Hom}_{D_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)(X)$ の元は微分方程式系 $P_1 f = \cdots P_n f = 0$ の X 全体で定義される解と 1 対 1 に対応する。終域の層 $\mathcal{O}_X$ を $\mathcal{C}_X^\infty$, $\mathcal{D}b_X$(シュワルツ超関数の層), $\mathcal{B}$(佐藤超関数の層) などに変えることにより、解のクラスを変えることができる。

後で定理を述べる際に必要となる D 加群の特性多様体を定義しておく。環の層 $\mathcal{D}_X$ には微分作用素の次数によりフィルター (部分層の族) が定まる。これを $\mathrm{F}_i\mathcal{D}_X$ とする。連接 $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{M}$ に対し、X 上局所的に $\mathrm{F}_i\mathcal{D}_X$ と整合的なフィルター $\mathrm{F}_i\mathcal{M}$ が存在する。それに付随する次数付き加群の零化イデアルの零点集合を $\mathcal{M}$ の特性多様体とよぶ。ここでは $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ とかくことにする。構成から特性多様体は T^*X の解析的閉部分集合である。

特性多様体は T^*X の自然なシンプレクティック構造に関して包合的であることが知られている。

特性多様体は微分方程式系に対してはその解の特異性を表す。

例 4.1 (D 加群の例)**.** $X = \mathbb{C}$ の場合に簡単な例で解と特性多様体がどのようになるかを見る。$\mathbb{C}$ の座標を x とし、対応する微分を ∂ で表す。

(1) $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\partial\mathcal{D}_X$

このとき $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b) \cong \mathbb{C}_X$ となる ($\mathbb{C}_X$ は定数層)。これは $\partial f = 0$ を満たす正則関数 f が定数関数のみであることに対応している。特性多様体は余接束の零切断である。

(2) $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/x\mathcal{D}_X$

このとき $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b) \cong \mathbb{C}_0$ となる ($\mathbb{C}_0$ は 0 に台を持つ摩天楼層)。これは $xf = 0$ を満たす超関数 f がデルタ関数のみであることに対応している。

値域を正則関数の層に取ると結果が少し変わる。$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X)\cong\mathbb{C}_0$ であり、ほかの次数の $\mathcal{E}xt$ はすべて消える。

特性多様体は余接束の原点におけるファイバーである。

(3) $\mathcal{M}=\mathcal{D}_X/(x\partial-\lambda)\mathcal{D}_X$

このとき

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{D}b)\cong\begin{cases}\mathbb{C}_X & \lambda\in\mathbb{N}\\ j_!\mathbb{C}_U & \lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}\end{cases}\tag{1}$$

ただし $j:U:=\mathbb{C}\setminus\{0\}\hookrightarrow\mathbb{C}$ である。

これは λ が整数のときは $\mathbb{C}$ 全体における解が存在することと、λ が整数でないときは原点を含まない単連結開集合上では解が x^λ であり原点を含む連結開集合上では解が存在しないことに対応している。

特性多様体は余接束の零切断と余接束の原点におけるファイバーの合併である。

ホロノミックで確定特異点型 (正則ともいう) であるときには解層から D 加群を復元できることが知られている。もう少し精密に書くと、$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(-,\mathcal{O}_X)$ が反変圏同値 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)\to\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X)$ を与える。$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{rh}}(\mathcal{D}_X)$ は $\mathcal{D}_X$ 加群の圏の導来圏の、コホモロジーが確定特異点型でホロノミックな複体全体のなす部分圏であり、$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(X)$ は X 上の層の圏の導来圏の、コホモロジーが構成可能なもののなす充満部分圏である。

ホロノミックではあるが確定特異点型でないときについても、D'Agnolo-柏原 (Publ. Math. IHES, 2016) によって拡張された (enhanced) 解関手が定義され、拡張された解から D 加群の復元ができることが証明されている。柏原-Schapira(Sel. Math. New. Ser., 2016) では積分変換との関連も調べられている。

4.2 積分変換

以下では考える圏はすべて導来圏とし、関手もすべて導来関手とする。$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ で $\mathcal{D}_X$ 加群の圏の導来圏を表す

$f:X\to Y$ を正則写像とする。順像 $f_+:\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)\to\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y)$ と逆像 $f^!:\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(D_Y)\to\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(D_X)$ を以下のように定義する。

$$f^!(\mathcal{N})=\mathcal{O}_X\otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}f^{-1}\mathcal{N}\tag{2}$$

$$f_+(\mathcal{M})=f_*((\mathcal{M}\otimes\omega_X)\otimes_{\mathcal{D}_X}f^!\mathcal{D}_Y)\otimes\omega_Y^{-1}\tag{3}$$

ω_X,ω_Y は X,Y の標準束。D 加群の順像が逆像の定義に比べて複雑であることの一つの説明は、関数のなす層は左加群なので逆像は引き戻すだけでよい ($f^!(\mathcal{O}_Y)\cong\mathcal{O}_Y$ は $\mathcal{D}_X$ 加群) のに対し、積分が自然に定義されるのは密度 (density, ω の切断) に対してであり ω は右加群なので順像を定義する際に ω をテンソルして右加群にしてから押し出してそのあとに左加群に戻す必要がある、である。

ホロノミック加群に対しては双対を用いて f^*, $f_!$ を定義することができる。

X,Y,S を複素多様体とし、$f:S\to X,g:S\to Y$ を正則写像とする。積分変換を $\Phi_S:=g_+\circ f^!:\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)\to\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y)$, $\Phi_{\tilde{S}}:=f_+\circ g^!:\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_Y)\to\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_X)$ で定める。

これらの関手も §2 と同様に随伴関手になっている。([DS, Proposition 2.6, (2.18)])

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\Phi_{\tilde{S}}\mathcal{N}[\dim Y-\dim X])\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\Phi_S\mathcal{M},N)$$

$\mathcal{D}_S$ 加群 $\mathcal{K}$ に対し、$\mathcal{K}$ を核とする積分変換 $\Phi_S^{\mathcal{K}}$, $\Phi_{\tilde{S}}^{\mathcal{K}}$ も次のように定義することができる。

$$\Phi_S^{\mathcal{K}}(\mathcal{M}) := g_+(f^!(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{K}) \tag{4}$$

$$\Phi_{\tilde{S}}^{\mathcal{K}}(\mathcal{N}) = f_+(g^!(\mathcal{N}) \otimes \mathcal{K}) \tag{5}$$

4.3 射影空間の場合

$X = \mathbb{P}^n$, $Y = \mathbb{P}^{n*}$ とする。ここでは $\mathbb{P}^n = \{\mathbb{C}^{n+1}$内の直線$\} = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, $\mathbb{P}^{n*} = \{\mathbb{C}^{n+1}$内の原点を通る超平面$\} = ((\mathbb{C}^{n+1})^* \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$ と思う。

S としては $A := \{(z, \zeta) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n*} | \langle z, \zeta \rangle = 0\}$ または $U := \{(z, \zeta) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n*} | \langle z, \zeta \rangle \neq 0\}$ を考える。射影空間の元はスカラー倍の作用での商なのでペアリングが $= 0$ と $\neq 0$ という条件はそれぞれ意味を持つ。

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n*}$ の第一成分への射影、第二成分への射影の A, U への制限を $p_1^A, p_2^A, p_1^U, p_2^U$ で表す。

定理 4.2. (1)(Brylinski) $p_{1+}^A \circ p_2^{A!}$ は平坦接続の生成する部分圏による剰余圏の間の圏同値を誘導する。

(2)(Marastoni)

$$p_{1+}^U \circ p_2^{U!} : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_X) \rightleftarrows \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_Y) : p_{2!}^U \circ p_1^{U!}$$

は互いに逆な圏同値である

定理の (2) はグラスマン多様体の場合 (Marastoni, Ann. scient. ENS, 1998) や一般旗多様体の場合 (Marastoni, Math. Nachr., 2013, Y.) にも拡張できることがわかっている。

参考文献

[DS] D'Agnolo, A.; Schapira, P., Radon-Penrose transform for $\mathcal{D}$-modules, J. Funct. Anal. 139 (1996), no. 2, 349–382.

[H] Helgason, S., The Radon Transform, Second Edition, Springer, (1990). available at http://www-math.mit.edu/~helgason/Radonbook.pdf