Fibred Fibration Categories

上村 太一 [*]

京都大学数理解析研究所, 2016 年 2 月

1　序文

Homotopy Type Theory [13] は、Martin-Löf 型理論 [6] とホモトピー論が結びついた、計算機科学とホモトピー論双方の観点から注目されている研究テーマである。モデル圏 [7] や $(\infty, 1)$-圏 [5] のように、抽象ホモトピー論の言語を与えるが、従来のものと比べて、計算機を使った形式証明と相性が良いという特徴がある。また、ホモトピー論的な視点から、*Univalence Axiom* と *Higher Inductive Type* という、ホモトピー論、型理論双方にとって興味深い概念が生まれた。この 2 つは、抽象ホモトピー論を展開する上で強力な道具となり、Univalence Axiom と Higher Inductive Type に基づくライブラリが活発に開発されている [1]。

しかし、Homotopy Type Theory の意味論は十分に発展しているとは言えない。具体的なモデルを作ることにより、Homotopy Type Theory の無矛盾性は示された [4] が、canonicity, disjunction property, definability などの議論はまだ尽くされていない。

古くから型理論の意味論においては、*logical relation* と呼ばれるテクニックがよく使われてきた。Logical relation には、*fibred category (Grothendieck fibration)* を使った圏論的定式化がある [2]。Logical relation のテクニックを使えるかどうかは、圏論的には fibrewise な構造から total category の構造を作れるか (時にはその逆も) という問題に帰着される。

本研究では、Homotopy Type Theory そのものではないがその土台である Martin-Löf 型理論に対応する圏論的構造について、fibrewise な構造と total な構造とを比較する。これは、 *identity type* についての logical relation の理論を与えることになる。

2　Type-theoretic fibration categories

この章では、Martin-Löf のモデルである *type-theoretic fibration category* を導入する。

定義 1 (左リフト性、右リフト性)**.** $i : A \to B,\ p : X \to Y$ を圏 $\mathbb{C}$ の射とする。i が p に対して左リフト性を持つ (p が i に対して右リフト性を持つ) とは、すべての $f : A \to X,\ g : B \to Y$ で $p \circ f = g \circ i$ を満たすものに対して、$h : B \to X$

[*] uemura@kurims.kyoto-u.ac.jp

で、$h \circ i = f$, $p \circ h = g$ を満たす射が存在することである。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

定義 2 (Type-theoretic fibration category [10, Definition 2.2])**.** Type-theoretic fibration category とは、圏 $\mathbb{C}$ と部分圏 $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$ で、次を満たすものである。ここで、$\mathcal{F}$ の射を fibration と呼び、二重矢印 $X \twoheadrightarrow Y$ と書く。また、すべての *fibration* に対して左リフト性を持つ射を acyclic cofibration と呼び、$X \overset{\sim}{\rightarrowtail} Y$ と書く。

1. $\mathbb{C}$ は終対象 1 を持つ。
2. すべての同型射と、1 への射は *fibration* である。
3. *Fibration* は *pullback* について閉じる*:* $p : X \twoheadrightarrow J$ を *fibration,* $f : I \to J$ を任意の射とすると、*pullback* f^*X が存在し、$f^*X \to I$ は *fibration* である。
4. 任意の射は *acyclic cofibration* と *fibration* に分解する。
5. $\mathbb{C}$ は dependent products を持つ*: fibration* $f : X \twoheadrightarrow Y$ に対して、$f^* : \mathbb{C}/Y \to \mathbb{C}/X$ は *partial right adjoint* Π_f を持ち、その定義域は X 上の *fibration* を含み、値は Y 上の *fibration* である。

定義 3 (Strong fibration functor)**.** *Type-theoretic fibration category* の間の関手 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ が strong fibration functor であるとは、F が終対象*, fibration, fibration* の *pullback* と *acyclic cofibration* を保つことである。

3 Fibred type-theoretic fibration categories

この章では、主定理とその証明のスケッチを述べる。完全な証明は [12] にある。

定義 4. Fibred type-theoretic fibration category とは、*strong fibration functor* $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ で、次を満たすものである。

1. p は *fibred category* である。
2. *Fibration* の上の *Cartesian morphism* は *fibration* である。
3. $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, two heads, "g"] & & \\
& v^*Z \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[dr, two heads, "u"'] \arrow[drr, "vu"] & & \\
& J \arrow[r, "v"'] & K
\end{tikzcd}$$

   に対して、g と u が *fibration* なら、誘導される射 $X \to v^*Z$ も *fibration* である。

4. *Acyclic cofibration* の上の *Cartesian morphism* は *acyclic cofibration* である。

5. p は *dependent product* を保つ。

定理 5. 次を仮定する。

1. $p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ は *fibred category* である。

2. $\mathbb{B}$ と各 *fiber* $\mathbb{E}_I$ は *type-theoretic fibration category* である。

3. $\mathbb{B}$ の射 $u : I \to J$ に対して、$u^* : \mathbb{E}_J \to \mathbb{E}_I$ は *strong fibration functor* である。

4. $\mathbb{B}$ の *acyclic cofibration* $u : I \overset{\sim}{\rightarrowtail} J$ と $\mathbb{E}_J$ の *fibration* $Y \twoheadrightarrow X$ に対して、$u^* : \mathbb{E}_J/X(X, Y) \to \mathbb{E}_I/u^*X(u^*X, u^*Y)$ は全射である。

5. $\mathbb{B}$ の *fibration* $u : I \twoheadrightarrow J$ に対して、$u^* : \mathbb{E}_J \to \mathbb{E}_I$ は *fibration* を保つ *right adjoint* u_* を持ち、*Beck-Chevalley condition* を満たす。

このとき、$\mathbb{E}$ に *type-theoretic fibration category* の構造が入り、$p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ は *fibred type-theoretic fibration category* になる。

$\mathbb{E}$ に type-theoretic fibration category の構造を入れるには、$\mathbb{E}$ の fibration を決めればよい。$\mathbb{E}$ の fibration は次の *Reedy fibration* とすればよい。

定義 6 (Reedy fibration)**.** $\mathbb{E}$ の射 $f : X \to Y$ が Reedy fibration であるとは、$pf : pX \to pY$ が $\mathbb{B}$ の *fibration* でありかつ誘導される射 $X \to (pf)^*Y$ が $\mathbb{E}_{pX}$ の *fibration* であることである。

次に、$\mathbb{E}$ の射は (Reedy fibration についての) acyclic cofibration と Reedy fibration に分解することを示す。p が bifibred category であれば [8] [11] の方法がそのまま使えるが、今回は p が bifibred category とは仮定しない。その代わり、acyclic cofibration の強い性質を使えば同様のことができる。

補題 7. *Type-theoretic fibration category* $\mathbb{C}$ の *acyclic cofibration* $f : A \overset{\sim}{\rightarrowtail} B$ に対して、$g : B \to A$ で、$gf = 1$ を満たすものが存在する。

Proof. Fibration $A \twoheadrightarrow 1$ に対する左リフト性を使えばよい。 □

補題 8. $\mathbb{B}$ の *acyclic cofibration* $u : I \overset{\sim}{\rightarrowtail} J$ と $X \in \mathbb{E}_I$ に対し、$u_!X \in \mathbb{E}_J$ と u の上の *Cartesian morphism* $X \to u_!X$ が存在する。

Proof. 補題 7 より、$v : J \to I$ で、$vu = 1$ となる射が存在する。$u_!X = v^*X$ とすれば、Cartesian morphism $X \cong u^*v^*X \to v^*X = u_!X$ を得る。 □

定理 5 の仮定 4 により、acyclic cofibration の上の Cartesian morphism は特別な性質を持つ。

補題 9. $\mathbb{E} \to \mathbb{B}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d, two heads, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[urr] & B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \\
I \arrow[r, tail, "\sim", "u"'] & J \arrow[r] & K
\end{tikzcd}$$

において、$u : I \overset{\sim}{\rightarrowtail} J$ が $\mathbb{B}$ の *acyclic cofibration,* $f : A \to B$ が u の上の *Cartesian morphism,* $g : X \twoheadrightarrow Y$ が $\mathbb{E}_K$ の *fibration* ならば、間を埋める射 $B \to X$ が存在する。

以上の補題を使えば、$\mathbb{E}$ において Reedy fibration への分解を実現できる。

$f : X \to Y$ を $\mathbb{E}$ の射, $pf = u : I \to J$ とする。まず、$\mathbb{B}$ において u を $I \overset{\sim}{\underset{v}{\rightarrowtail}} K \underset{w}{\twoheadrightarrow} J$ と分解する。Cartesian morphism $w^*Y \to Y$ と誘導される v の上の射 $\langle f \rangle : X \to w^*Y$ を得る。補題 8 より、v の上の Cartesian morphism $\bar{v} : X \to v_!X$ が存在する。補題 9 より、K の上の射 $[f] : v_!X \to w^*Y$ で、$[f]\bar{v} = \langle f \rangle$ を満たすものが存在する。$\mathbb{E}_K$ で $[f]$ を分解することにより、次の図のように f の分解 $X \to Z \to Y$ を得る。

$$
\begin{tikzcd}
 & v_!X \arrow[d, tail, "\sim"] & \\
X \arrow[ur] & Z \arrow[d, two heads] & Y \\
 & w^*Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, tail, "\sim", "v"'] & K \arrow[r, two heads, "w"'] & J
\end{tikzcd}
$$

この形の $X \to Z$ が Reedy fibration に対して左リフト性を持つことは、補題 9 を使えば示せる。

$\mathbb{E}$ が type-theoretic fibration category の残りの公理を満たすこととまた、$p : \mathbb{E} \to \mathbb{B}$ が fibred type-theoretic fibration category になることは容易に示せる。詳細は [12] を見よ。

4　結論と今後の課題

本研究では、 base category が type-theoretic fibration category で各 fiber が type-theoretic fibration category である fibred category に対して、total category の type-theoretic fibration category の構造を与えた。今後の課題として、*univalent universe* [9, Section 7] を持つ type-theoretic fibration category について同様の構成ができるかという問いがある。

また、応用として *(weak) generic object* [3, Definition 5.2.8] を持つ fibred type-theoretic fibration category を考えると、これは *polymorphic* Homotopy Type Theory をモデルしているとみなせる。しかし、そのような fibred type-theoretic fibration category を作れるかどうかはわかっていない。

References

[1] `https://github.com/HoTT/HoTT`.

[2] C. Hermida. *Fibrations, Logical Predicates and Indeterminates.* PhD thesis, University of Edinburgh, 1993.

[3] Bart Jacobs. *Categorical logic and type theory.* Elsevier Science, 1st edition, December 1999.

[4] Chris Kapulkin, Peter L. Lumsdaine, and Vladimir Voevodsky. The simplicial model of univalent foundations, April 2014.

[5] Jacob Lurie. *Higher topos theory.* Princeton University Press, 2009.

[6] Per Martin-Löf. An intuitionistic theory of types. In H. E. Rose and J. C. Shepherdson, editors, *Logic Colloquium '73, Proceedings of the Logic Colloquium*, volume 80 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 73–118. North-Holland, 1975.

[7] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra.* Springer, 1967.

[8] Agustí Roig. Model category structures in bifibred categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 95(2):203–223, August 1994.

[9] Michael Shulman. Univalence for inverse diagrams and homotopy canonicity. *Mathematical Structures in Computer Science*, 25(05):1203–1277, June 2015.

[10] Michael Shulman. Univalence for inverse EI diagrams, August 2015. arXiv:1508.02410.

[11] Alexandru E. Stanculescu. Bifibrations and weak factorisation systems. *Applied Categorical Structures*, 20(1):19–30, 2012.

[12] Taichi Uemura. Fibred fibration categories, February 2016. arXiv:1602.08206.

[13] The Univalent Foundatiosn Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics.* `http://homotopytypetheory.org/book/`, 2013.