

定常渦斑の数値計算法と数値検証に向けた展望

宇田 智紀*

京都大学 数学教室, 2016年2月

1 序論

2次元 Euler 方程式の解として, 一定渦度領域をもつ**渦斑**が知られ, 渦力学におけるもっとも基本的な解の一つとして活発に研究が行われている. 定常渦斑問題は渦斑境界を未知とする楕円型の自由境界問題である.

2次元の場合について, Pierrehumbert は非自明な定常渦斑解の存在を示唆している [4, '80]. Pierrehumbert は, 渦度が異符号の対称な渦斑の対を考え, これが定常的に一定速度で並行移動するときの渦斑境界の形状を数値計算した. これによって, 解の集合が渦斑の面積をパラメータとして連続な族をなすことが数値的に示された. Pierrehumbert が用いた数値計算法は, 本質的には Newton 法である. また, Wu らは効率的な定常渦斑の数値計算法を提案している [5, '84]. Wu らが用いた**等高線力学** (contour dynamics [6, Zabusky *et al.*, '79]) は, 渦斑境界の時間発展を記述する微分方程式である. 求める自由境界を等高線力学の相対的平衡状態とみなすことで, 1次元の積分方程式を解くことに帰着するのである. Elcrat らは一様流中の円柱障害物の背後に閉じ込められる定常渦斑を扱っている [2, '00]. Elcrat らも同様に等高線力学の平衡状態を Newton 法で数値計算した. さらに, 離散化した等高線力学系に対する安定性解析も行った. 定常渦斑に関連する解析的な結果としては, Crowdy による解析的渦斑 [1, '02] が挙げられる. Crowdy は N 個の点渦に囲まれた N 重回転対称な定常渦斑の形状を, 等角写像を用いることで陽的に構成することに成功している. Crowdy の解析的渦斑も, 連続な 1-パラメータ族をなす. 一方で, 解の存在とパラメータ族に関連する数学的結果としては, Gallizio らによる渦斑解の延長 [3, '10] がある. Gallizio らは, 定常渦斑が存在しある条件を満たすとき, 十分近いパラメータについてまた定常渦斑解が存在することを, **形状微分理論**および陰関数定理を用いて証明している.

このように, 数値解析および数学解析のいずれにおいても, 定常渦斑問題において重要な役割を果たすのは定常渦斑の形状である. そして, いくつかの限定的な場合については数学的な結果が知られている. 特に Gallizio らが示しているように, 解の存在を認めるならば, その近傍に解の連続な 1-パラメータ族が存在する. しかしながら, Crowdy の解析的渦斑のような特別な場合を除き, 一般に定常渦斑解の存在に関する数学的な結果は知られていない. 一方で数値計算を主とした多くの先行研究が非自明な解の 1-パラメータ族の存在を示唆している.

そこで本研究の目的は, 定常渦斑解の存在を計算機援用証明するための手法を確立することである. 計算機援用証明を実現するにあたって重要なことは, 問題を関数空間の上で定式化し, 解くべき方程式に関する写像の微分を具体的に求めることである. このレポートでは, その研究過程において導出された数値計算手法と数値計算結果を紹介する.

*uda@math.kyoto-u.ac.jp

2 等高線力学による定式化

渦斑を扱う上で重要な鍵となるのが等高線力学 [6] である。等高線力学は、渦斑境界の時間発展を記述する力学系である。例えば、2次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^2 を複素平面 \mathbf{C} と同一視して実軸対称な Euler 流を考え、上半 (resp. 下半) 平面に渦度の強さ ω (resp. $-\omega$) の渦斑 D (resp. \bar{D}) があるとすると (これは Pierrehumbert 渦斑対 [4] の設定である)。この場合の等高線力学は次の微分積分方程式で与えられる。

$$\frac{dz}{dt} = v(z; \partial D(t)) := -\frac{\omega}{4\pi} \oint_{\partial D(t)} \log(z-w) d\bar{w} + \frac{\omega}{4\pi} \oint_{-\bar{\partial D}(t)} \log(z-w) d\bar{w}. \quad (\spadesuit)$$

ここで、 $z(s, t)$ ($0 \leq s \leq 2\pi$) は時刻 t における渦斑境界 $\partial D(t)$ のパラメータ表示であり、 $v(z; \partial D(t))$ は渦斑 $D(t)$ が誘導する速度場である。式 (\spadesuit) は2つの実軸対称な渦斑 D, \bar{D} が誘導する速度場を表している。 $\omega > 0$ (resp. $-\omega < 0$) であるから、第1項 (resp. 第2項) は渦斑 D (resp. \bar{D}) の周りに反時計回り (resp. 時計回り) の速度場を誘導しており、これらが相互に作用しあって渦斑対は実軸方向に時間発展する。

渦斑ではなく、逆符号の点渦の対が実軸対称に配置されている場合を考えると、点渦対は実軸を挟んである一定速度 V_T で並行移動することが知られている。このことから、一定速度 V_T で実軸方向に定常的に併進する渦斑対 (Pierrehumbert 渦斑対) の存在が予想される。これは等高線力学の言葉でいえば、相対的平衡状態 (すなわち $[v - V_T] \cdot n = 0$) に対応する。

一般に、渦斑の集まり $\{D_1, \dots, D_K\}$ が相対速度 v_0 で静止しているとは、方程式

$$[v(z; \{\partial D_k(t)\}) - v_0(z)] \cdot n(z; \{\partial D_k(t)\}) = 0 \quad \text{on } \partial D_k, \forall t \geq 0, k = 1, \dots, K$$

を満たすことと定義する。ただし、 v は渦斑の集まり $\{D_k\}$ が誘導する速度場、 n は境界 ∂D_k 上の外向き単位法ベクトル、複素数 a, b に対して $a \cdot b := \text{Re}(a\bar{b})$ は標準的な2次元 Euclid 内積を表す。また便宜上、渦斑の面積0極限 (すなわち点渦) も定義に含めることにし、点 z にある点渦に対する静止条件は単に $v(z; \{\partial D_k\}) = v_0(z)$ とする。後に見る Crowdy 渦斑族の場合が点渦を含む例である。

簡単のため、以降 Pierrehumbert 渦斑対の場合 (\spadesuit) のみを扱う。相対的に静止した Pierrehumbert 渦斑対は等高線力学 (\spadesuit) の相対的平衡状態に対応し、よって形状 ∂D を未知とする零点問題とみなすことができる。

与えられた $\omega > 0, V_T > 0$ に対して、次を満たす境界 ∂D をみつければ：

$$\mathcal{F}(\partial D) := [v(z; \partial D) - V_T] \cdot n(z; \partial D) = 0 \quad \text{on } \partial D.$$

非線型写像 \mathcal{F} は形状依存の写像であり、また解くべき方程式において変数 z はその未知境界 ∂D 上を動く変数であることに注意する。この問題を数学的に取り扱うために、 ∂D に対して適当なパラメータ表示を導入し、方程式を関数空間の上で議論する。

反時計回りに向き付けられた滑らかな単純閉曲線 ∂D_0 を一つ固定し、そのパラメータ表示を $z_0: S^1 \rightarrow \mathbf{R}, S^1 := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ とする。また、このパラメータ表示に関する外向き単位法ベクトルを $n_0(s) := -iz'_0(s)/|z'_0(s)|$ とおく。このとき、十分小さい滑らかな 2π 周期実数値関数 $r(s)$ に対して、新たな閉曲線 ∂D_r とそのパラメータ表示

$$z_r(s) := z_0(s) + r(s)n_0(s)$$

が得られる。このパラメータ表示を用い形状 ∂D 依存の写像を S^1 上の関数へと統一する：

$$\mathcal{F}: H^1(S^1; \mathbf{R}) \rightarrow L^2(S^1; \mathbf{R}); \quad \mathcal{F}(r) := [v(z_r; \partial D_r) - V_T] \cdot n(z_r; \partial D_r).$$

ここで、 $L^2(S^1; X)$ は S^1 上 X 値二乗可積分関数全体のなす Hilbert 空間、また $H^1(S^1; \mathbf{R})$ は 1 次の Sobolev 空間 (すなわち、 $L^2(S^1; \mathbf{R})$ の元であって超関数の意味での微分がふたたび L^2 関数となるようなものの全体のなす Hilbert 空間) である。

これらの記法を用いて、相対的に静止した渦斑を求める問題を次のように定式化する。

与えられた $\omega > 0, V_T > 0, z_0$ に対して、次を満たす r をみつけよ：

$$\mathcal{F}(r) = [v(z_r; \partial D_r) - V_T] \cdot n(z_r; \partial D_r) = 0 \quad \text{on } \partial D. \quad (\diamond)$$

問題 (\diamond) は形状依存の非線型写像 \mathcal{F} の零点問題である。零点問題の解析においては、 \mathcal{F} の微分が重要な役割をもつ。そこで、方向微分の一般化である Gâteaux 微分を計算する。

ノルム空間 X から Y への写像 $F: X \rightarrow Y$ が $r \in X$ において $\Delta r \in X$ 方向への Gâteaux semiderivative をもつとは、次の極限が存在することをいい、そのときの極限を $dF(r; \Delta r)$ とかく：

$$dF(r; \Delta r) := \lim_{h>0, h \rightarrow +0} \frac{F(r + h\Delta r) - F(r)}{h} = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=+0} F(r + h\Delta r).$$

\mathcal{F} の Gâteaux 微分を求めるためには、 (\spadesuit) に現れる複素積分の Gâteaux 微分を求めれば十分である。具体的な計算は省略するが、これは次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=+0} \oint_{\partial D_{r+h\Delta r}} \log(z_{r+h\Delta r} - w) d\bar{w} \\ &= -2i \int_0^{2\pi} \frac{\text{Im}[(z_r - z_r(t))(\overline{\Delta r n_0 - \Delta r(t) n_0(t)})]}{(z_r - z_r(t))^2} z_r'(t) dt - \int_0^{2\pi} \frac{z_r - z_r(t)}{z_r - z_r(t)} (\Delta r(t) n_0(t))' dt. \end{aligned}$$

3 数値スキームと数値計算結果

線型作用素 $d\mathcal{F}(r; \cdot)$ が具体的に得られたので、これを用いて Newton 法による数値計算を行うことができる。すなわち、適当に与えられた初期予測 $r^{(0)}$ に対し、反復列

$$r^{(m+1)} := r^{(m)} - M_{r^{(m)}}^\dagger \mathcal{F}(r^{(m)}), \quad M_r := d\mathcal{F}(r; \cdot) \quad (3)$$

を計算する。ここで、 M_r は一般に可逆ではないので、擬逆作用素 M_r^\dagger を用いる。 $r \in H^1(S^1; \mathbf{R})$ を適当な方法で離散化すれば、それに応じて数値スキームが一つ得られる。以下に示す数値結果では、Fourier 級数 (三角級数) による離散化を用いた。

一般に Newton 反復 (3) の過程で、渦斑の面積は大きく変化し得る。渦斑族 (特に面積極大の極限渦斑) の計算をするとき、面積をうまく制御できると都合がよいことがある。実は、面積が所与の定数であるような形状 D_r 全体の集合は、ある Hilbert 多様体の部分集合であり、したがって多様体上の Newton 法 (制限付き Newton 法) を適用することで面積を一定の値に保つことができる。これについての詳細は割愛する。

3.1 Pierrehumbert 渦斑族

提案手法 (3) による近似計算で得た Pierrehumbert 渦斑対の 1-パラメータ族を図 1 に示す。

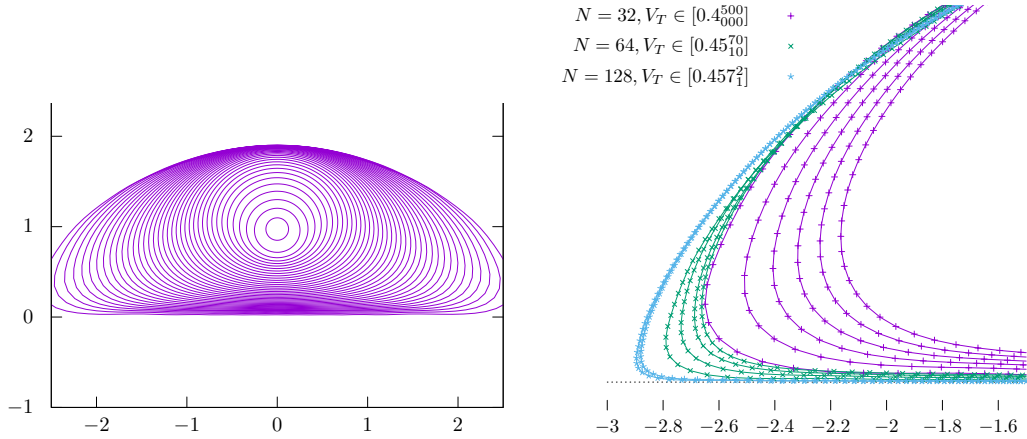


図 1: パラメータを $\omega = 1.0$ で固定, 左図: V_T を 0.004 (内側) から 0.450 (外側), 右図: V_T を 0.4000 から 0.4572 まで変化させた渦斑族. 拡大図の $x = -3$ 付近では, カスプを持った形状に近づいていることが観察できる.

図 1 は基準となる閉曲線 ∂D_0 を固定して, 並行移動の速さを表すパラメータ V_T を変えることで得られた渦斑族である. それぞれの閉曲線が, 各パラメータ V_T ごとに得られる相対的に静止した渦斑の境界をあらわしている. V_T を大きくするにしたがって, 実軸に張り付いてカスプを持った形状へと近づいていることが見てとれる. これらの数値結果のそれぞれにおいて, 絶対残差 (\mathcal{F} の L^2 ノルム $\|\mathcal{F}(r^{(m)})\|_{L^2}$) はおよそ $O(10^{-9})$ から $O(10^{-14})$ 程度を実現しており, 十分な精度で計算できていると考えられる.

3.2 Crowdy 渦斑族

Crowdy は, 原点を中心に 1 個の渦斑 (渦度 ω) とその周りに N 個の点渦 (強さ γ) を回転対称に配置した場合について, 厳密解を具体的に示した [1]. Crowdy 渦斑は, 回転速度 $v_0(z) = i\omega z/2$ に関して相対的に静止した渦斑であり, その境界を等角写像を用いて解析的に書き下すことができる. また, Crowdy 渦斑は連続な 1-パラメータ族をなす. 厳密解の境界の媒介変数表示においてパラメータを臨界値にとると, カスプを N 個もった星型形となり面積が極大となる (ただし滑らかさを失っているためこれは解ではない).

図 2 に $N = 4$ の場合の数値結果を示す. 計算には多様体上の Newton 法をもちいた. これは点渦の強さ γ を変えて得られる渦斑族である. Pierrehumbert 渦斑族の場合と同様に, 渦斑の面積が大きくなるにつれてカスプをもった形状に近づく様子を観察できる. いずれの渦斑においても, 絶対残差は $O(10^{-14})$ を実現している. さらに, モーメントと呼ばれる形状特徴量によって厳密解との絶対誤差はかったところ, 4 の倍数次数において $O(10^{-7})$, 他の次数で $O(10^{-17})$ となった. よって, 数値計算により得た渦斑形状は厳密解に十分近く, 提案手法の精度は高いといえる.

4 結論

定常渦斑問題に対する定式化と数値計算をおこなった. 定常 Euler 方程式の渦斑解を等高線力学の相対的平衡状態とみなすことで, 速度場に由来する形状依存の写像 \mathcal{F} に関する零点問題に帰

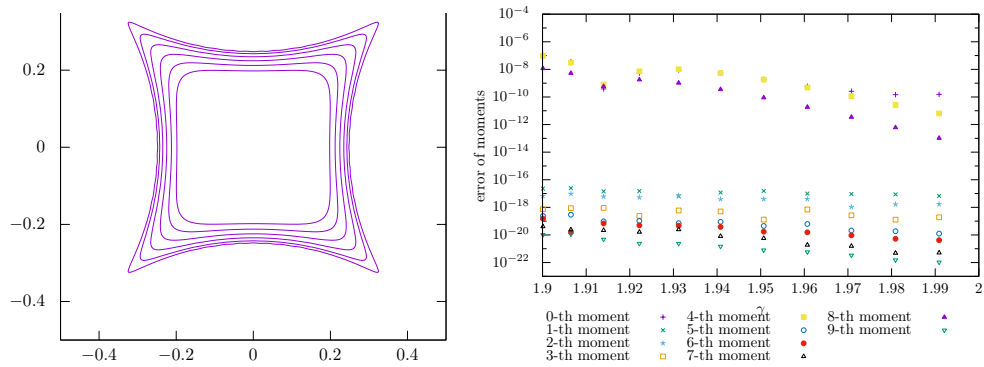


図 2: 左図: パラメータを $\omega = 1.0$ で固定, γ を 1.99 (内側) から 1.90 (外側) まで変化させた渦斑族. 右図: k 次モーメント (形状特徴量) について, 得られた数値解と厳密解との絶対誤差 (横軸は γ).

着した. 形状微分のアイデアを応用してその Gâteaux 微分 $d\mathcal{F}$ を具体的に得た. Fourier 級数による離散化で Newton 法を適用し, Pierrehumbert 渦斑族および Crowdy 渦斑族を数値計算した. また, 所与の面積をもつ渦斑形状を計算するために, 多様体上の Newton 法を応用できることも示した.

今後の課題は, 提案手法を他の場合に適用することと, 提案手法における数値解析 (特に計算機援用証明の実現に向けた数学解析) である.

また, 計算機援用解析の実現に向けては, 写像 \mathcal{F} およびその微分 $d\mathcal{F}$ の打ち切りなどに対する不等式評価を得たい. 構成的不等式評価を得ることができれば, それを用いて Krawczyk 作用素を定めることができ, 計算機援用証明が可能になると期待している.

参考文献

- [1] D. G. Crowdy. Exact solutions for rotating vortex arrays with finite area core. *Journal of Fluid Mechanics*, 469:209–235, 2002.
- [2] Alan Elcrat, Bengt Fornberg, and Kenneth Miller. Some steady vortex flows past a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 409:13–27, 2000.
- [3] Federico Gallizio, Angelo Iollo, Bartosz Protas, and Luca Zannetti. On continuation of inviscid vortex patches. *Physica D*, 239:190–201, February 2010.
- [4] R. T. Pierrehumbert. A family of steady, translating vortex pairs with distributed vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, 99(1):129–144, July 1980.
- [5] H. M. Wu, E. A. Overman II, and Norman J. Zabusky. Steady-state solutions of the euler equations in two dimensions: Rotating and translating v-states with limiting cases. i. numerical algorithms and results. *Journal of Computational Physics*, 53(1):42–71, January 1984.
- [6] Norman J. Zabusky, M. H. Hughes, and K. V. Roberts. Contour dynamics for the euler equations in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 30(1):96–106, January 1979.